

УДК 62–50

© 2000 г. Н.Ю. Лукоянов

ОБ УРАВНЕНИИ ТИПА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В задаче конфликтного управления при дефиците информации, формализуемой как дифференциальная игра [1–11] в системе с последствием, для функционала цены на основе понятия коинвариантных производных [12] выписано уравнение типа Гамильтона–Якоби. Подобно изложенному ранее [10] рассмотрено соответствующее обобщенное минимаксное решение этого уравнения. Построены стратегии управления, экстремальные к данному решению. Доказано, что эти стратегии образуют седловую точку рассматриваемой игры, а функционал цены совпадает с минимаксным решением выписанного уравнения.

1. Дифференциальная игра с наследственной информацией. Рассмотрим систему с последствием

$$\begin{aligned} dx[t]/dt &= f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v), \quad t_* \leq t_0 \leq t \leq T \\ x &\in R^n, \quad u \in U \subset R^r, \quad v \in V \subset R^m \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x – фазовый вектор, u и v – управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, t_* , t_0 и T – заданные моменты времени ($t_0 < T$), U и V – известные компакты, $x[t_*[\cdot]t] = \{x[\tau], t_* \leq \tau \leq t\}$ – история движения, реализовавшаяся к моменту времени t .

Пусть $C([t_*, T], R^n)$ – пространство непрерывных функций $x(\cdot) = \{x[t] \in R^n, t_* \leq t \leq T\}$. Через G обозначим совокупность пар $g = (t, x[t_*[\cdot]t])$, у которых $t_0 \leq t \leq T$, а $x[t_*[\cdot]t]$ – часть (от t_* до t) некоторой функции из $C([t_*, T], R^n)$. На G определим метрику

$$\rho(g_1, g_2) = \max\{\rho^*(g_1, g_2), \rho^*(g_2, g_1)\} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= (t_1, x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1]) \in G, \quad g_2 = (t_2, x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2]) \in G \\ \rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}) &= \max_{t_* \leq \xi \leq t_{i+1}} \min_{t_* \leq \eta \leq t_{2-i}} \max\{\|\xi - \eta\|, \|x^{(i+1)}[\xi] - x^{(2-i)}[\eta]\|\}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Ниже свойства непрерывности по $(t, x[t_*[\cdot]t])$ понимаются относительно изменения в метрике $\rho(\cdot, \cdot)$ (1.2).

Например, функция $z(t, x[t_*[\cdot]t]) : G \rightarrow R^n$ непрерывна на G , если для любых $g^* = (t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) \in G$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, таких, что $\rho(g, g^*) \leq \delta$, выполняется неравенство

$$\|z(t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) - z(t, x[t_*[\cdot]t])\| \leq \varepsilon$$

В (1.1) функция $f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \in R^n$ определена на $G \times U \times V$ и удовлетворяет следующим требованиям.

(1_f) Функция $f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v)$ непрерывна по совокупности своих аргументов на $G \times U \times V$.

(2_f) Для любого компакта $D \subset C([t_*, T], R^n)$ существует такое число $\Lambda > 0$, что для всех $t \in [t_0, T]$, $u \in U$, $v \in V$ и $x'(\cdot) \in D$, $x''(\cdot) \in D$ справедлива оценка (условие Липшица по $x[t_*[\cdot]t]$)

$$\|f(t, x'[t_*[\cdot]t], u, v) - f(t, x''[t_*[\cdot]t], u, v)\| \leq \Lambda \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x'[\tau] - x''[\tau]\|$$

(3_f) Существует число $\kappa > 0$, такое, что при всех $(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \in G \times U \times V$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v)\| \leq \kappa(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|)$$

(4_f) Для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s \in R^n$ имеет место равенство (условие седловой точки в маленькой игре [1–3])

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \rangle$$

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов.
Пусть задано начальное состояние

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t^0 < T$$

системы (1.1). Допустимы измеримые по Борелю реализации

$$u[t^0[\cdot]T] = \{u[t] \in U, \quad t^0 \leq t < T\}, \quad v[t^0[\cdot]T] = \{v[t] \in V, \quad t^0 \leq t < T\}$$

При условиях (1_f)–(3_f) из состояния g^0 такие реализации единственным образом порождают движение системы (1.1) – функцию $x(\cdot) \in C([t_*, T], R^n)$, совпадающую с $x^0[t_*[\cdot]t^0]$ на $[t_*, t^0]$ и удовлетворяющую при $t \in [t^0, T]$ равенству

$$x[t] = x[t^0] + \int_{t^0}^t f(\tau, x[t_*[\cdot]\tau], u[\tau], v[\tau]) d\tau$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Показатель качества γ этого движения задан непрерывным функционалом $\sigma: C([t_0, T], R^n) \mapsto R$, так что

$$\gamma = \sigma(x[t_0[\cdot]T]) \quad (1.3)$$

Цель первого игрока – минимизировать γ , второго – максимизировать γ .

Стратегиями управления первого и второго игроков назовем произвольные функции $u(t, x[t_*[\cdot]t]) \in U$ и $v(t, x[t_*[\cdot]t]) \in V$ соответственно, где $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t \in [t^0, T]$. Выбранные стратегия $u(\cdot)$ и разбиение

$$\Delta_\delta = \{t_i : t_1 = t^0, \quad 0 < t_{i+1} - t_i \leq \delta, \quad i = 1, \dots, k, \quad t_{k+1} = T\} \quad (1.4)$$

отрезка времени $[t^0, T]$ образуют пошаговый закон управления первого игрока ($u(\cdot)$, Δ_δ), который, формируя реализацию $u[t^0[\cdot]T]$ согласно правилу

$$u[t] = u(t_i, x[t_*[\cdot]t_i]), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.5)$$

в паре с допустимой реализацией $v[t^0[\cdot]T]$ порождает из начального состояния $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ единственное движение $x(\cdot | t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u(\cdot), \Delta_\delta, v[t^0[\cdot]T])$.

Определим величину

$$\Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u(\cdot)) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[t^0[\cdot]T)} \sigma(x([t_0[\cdot]T | t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u(\cdot), \Delta_\delta, v[t^0[\cdot]T))) \quad (1.6)$$

называемую гарантированным результатом стратегии $u(\cdot)$ первого игрока. Оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\Gamma_u^0 = \Gamma_u^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) = \inf_{u(\cdot)} \Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u(\cdot)) \quad (1.7)$$

Подобным образом определяются величины гарантированного результата стратегии $v(\cdot)$ второго игрока и оптимального гарантированного результата второго игрока (замена в (1.6), (1.7) символов $u, v, \sup, \inf$ соответственно на $v, u, \inf, \sup$). Отсюда следует, что для любого начального состояния $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$ справедливо неравенство

$$\Gamma_u^0 \geq \Gamma_v^0 \quad (1.8)$$

В случае, когда в (1.8) имеет место равенство, говорят, что дифференциальная игра с наследственной информацией (1.1), (1.3) имеет цену

$$\Gamma^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) = \Gamma_u^0 = \Gamma_v^0$$

в классе чистых стратегий. При этом, если в (1.7) и аналогичном выражении для $\Gamma_v^0 \inf$ и $\sup$ достигаются, т.е.

$$\Gamma_u^0 = \Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u^0(\cdot)), \quad \Gamma_v^0 = \Gamma_v(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], v^0(\cdot))$$

то говорят, что пара стратегий $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ образует седловую точку игры (1.1), (1.3) и называют эти стратегии оптимальными.

Далее рассматриваемой дифференциальной игре с наследственной информацией (1.1), (1.3) поставлено в соответствие функциональное уравнение типа Гамильтона – Якоби в коинвариантных производных [12]. Это уравнение наряду с трудностями, связанными с анализом обычных уравнений Гамильтона – Якоби [10, 11, 13, 14], осложнено особенностями, обусловленными эффектом последействия. Подобно описанному ранее подходу [10] дано соответствующее определение обобщенного минимаксного решения этого уравнения. При условиях (1_р)–(4_р) данное минимаксное решение существует, единственно и корректно. Указан способ построения оптимальных стратегий и доказано, что функционал $\Gamma^0 : G \mapsto R$ цены игры (1.1), (1.3) совпадает с минимаксным решением сопоставленного уравнения.

2. Функциональное уравнение типа Гамильтона – Якоби в коинвариантных производных. Рассмотрим функционал

$$\varphi(g) = \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) : G \mapsto R$$

Пусть $g^* = (t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) \in G (t^* < T)$, $\text{Lip}(g^*)$ – множество функций $y(\cdot) \in C([t_*, T], R^n)$, совпадающих с $x^*[t_*[\cdot]t^*]$ на $[t_*, t^*]$, каждая из которых с некоторой (своей) константой удовлетворяет на $[t^*, T]$ условию Липшица. Будем говорить [12], что функционал φ коинвариантно-дифференцируем в точке g^* относительно $\text{Lip}(g^*)$ (си-дифференцируем в g^*), если существуют такие число $\partial_t \varphi(g^*)$ и n -вектор $\nabla \varphi(g^*)$, что для любой функции $y(\cdot) \in \text{Lip}(g^*)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \varphi(t^* + \xi, y[t_*[\cdot]t^* + \xi]) - \varphi(t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) &= \partial_t \varphi(g^*) \xi + \langle \nabla \varphi(g^*), y[t^* + \xi] - x^*[t^*] \rangle + \\ &+ o_{y(\cdot)}(\xi), \quad \xi \in [0, T - t^*] \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем $o_{y(\cdot)}(\xi)$ зависит от выбора $y(\cdot) \in \text{Lip}(g^*)$ ($o_{y(\cdot)}(\xi)/\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +0$).

Величины $\partial_t \varphi(g^*)$ и $\nabla \varphi(g^*)$ будем называть коинвариантными производной по t и градиентом, соответственно, функционала φ в точке g^* . Функционал φ назовем сi -дифференцируемым на G , если он сi -дифференцируем в каждой точке $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G (t < T)$. Если при этом величины $\partial_t \varphi(g)$ и $\nabla \varphi(g)$ непрерывны, то будем говорить, что функционал φ непрерывно сi -дифференцируем.

Более подробные сведения о свойствах, способах вычисления и применениях коинвариантных производных функционалов можно найти, например, в [12].

Замечание. Определение коинвариантных производных дано выше (см. (2.1)) для функционалов $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$, определенных, вообще говоря, только на непрерывных функциях $x[t_*[\cdot]t]$, поэтому оно отличается от соответствующего определения, приведенного ранее ([12], с. 28–50), где коинвариантные производные естественным образом вводятся для функционалов, определенных на кусочно-непрерывных функциях. Тем не менее, если некоторый, определенный на кусочно-непрерывных функциях, функционал $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ является сi -дифференцируемым в точке $g^* = (t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) \in G$ относительно $\text{Lip}(g^*)$ в смысле [12], то его сужение φ_G на непрерывные функции будет сi -дифференцируемо в g^* в смысле (2.1), при этом, соответствующие коинвариантные производные будут совпадать.

Для системы (1.1) определим гамильтониан $H(t, x[t_*[\cdot]t], s): G \times R^n \mapsto R$ согласно равенству

$$H(t, x[t_*[\cdot]t], s) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \rangle \quad (2.2)$$

Рассмотрим уравнение типа Гамильтона – Якоби в коинвариантных производных

$$\partial_t \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) + H(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla \varphi(t, x[t_*[\cdot]t])) = 0, \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad t < T \quad (2.3)$$

при условии на правом конце

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(x[t_0[\cdot]T]), \quad x(\cdot) \in C([t_*, T], R^n) \quad (2.4)$$

Отметим, что при требованиях (1_f) – (4_f) гамильтониан (2.2) будет удовлетворять следующим условиям.

(1_H) Для любого $s \in R^n$ функционал $(t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto H(t, x[t_*[\cdot]t], s)$ непрерывен на G .

(2_H) Для любого компакта $D \subset C([t_*, T], R^n)$ существует такое число $\Lambda > 0$, что для всех $t \in [t_0, T]$, $s \in R^n$, $\|s\| = 1$ и $x'(\cdot) \in D$, $x''(\cdot) \in D$ справедлива оценка (условие Липшица по $x[t_*[\cdot]t]$)

$$|H(t, x'[t_*[\cdot]t], s) - H(t, x''[t_*[\cdot]t], s)| \leq \Lambda \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x'[\tau] - x''[\tau]\|$$

(3_H) Для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s', s'' \in \{s \in R^n: \|s\| \leq 1\}$ справедливо неравенство (условие Липшица по s)

$$|H(t, x[t_*[\cdot]t], s') - H(t, x[t_*[\cdot]t], s'')| \leq L(t, x[t_*[\cdot]t]) \|s' - s''\|$$

где $L(t, x[t_*[\cdot]t])$ – непрерывный на G функционал, удовлетворяющий оценке

$$L(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \kappa(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|), \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad \kappa = \text{const} > 0$$

(4_H) Для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ функция $s \mapsto H(t, x[t_*[\cdot]t], s)$ положительно однородна, т.е.

$$H(t, x[t_*[\cdot]t], \alpha s) = \alpha H(t, x[t_*[\cdot]t], s), \quad \alpha \geq 0$$

При рассматриваемых условиях может не существовать сi -дифференцируемого

функционала, удовлетворяющего соотношениям (2.3), (2.4). Как и в случае обычных уравнений Гамильтона – Якоби, в задаче (2.3)–(2.4) возникает потребность определения подходящего обобщенного решения.

Дадим определение минимаксного решения задачи (2.3), (2.4).

Пусть P и Q – некоторые непустые множества (для определенности можно считать, что P и Q – подмножества некоторых конечномерных пространств), многозначные отображения

$$(t, x[t_*[\cdot]t], q) \mapsto F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) \subset R^n$$

$$(t, x[t_*[\cdot]t], p) \mapsto F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) \subset R^n$$

где $(t, x[t_*[\cdot]t], p, q) \in G \times P \times Q$, удовлетворяют следующим требованиям.

(1_K) Для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $p \in P$ и $q \in Q$ множества $F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q)$ и $F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p)$ – непустые выпуклые компакты в R^n . Существует такое число $a > 0$, что справедлива оценка

$$\max \{ \|f\| \mid f \in F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) \cup F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) \} \leq a(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|)$$

$$(t, x[t_*[\cdot]t], p, q) \in G \times P \times Q$$

(2_K) Для любых $p \in P$ и $q \in Q$ многозначные отображения

$$(t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q), \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p)$$

полунепрерывны сверху по включению.

(3_K) Для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s \in R^n$ справедливы равенства

$$\sup_{q \in Q} \min_{f \in F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q)} \langle s, f \rangle = H(t, x[t_*[\cdot]t], s) = \inf_{p \in P} \max_{f \in F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p)} \langle s, f \rangle$$

Совокупность пар $\{Q, F^*(\cdot)\}$ ($\{P, F_*(\cdot)\}$), удовлетворяющих требованиям (1_K)–(3_K), обозначим $K^*(H)$ ($K_*(H)$).

Замечание. При условиях (1_H)–(4_H) $K^*(H) \neq \emptyset$, $K_*(H) \neq \emptyset$. В частности, требования (1_K)–(3_K) выполняются для

$$P = Q = R^n$$

$$F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) = \{f \in F(t, x[t_*[\cdot]t]) : \langle f, q \rangle \geq H(t, x[t_*[\cdot]t], q)\}$$

$$F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) = \{f \in F(t, x[t_*[\cdot]t]) : \langle f, p \rangle \leq H(t, x[t_*[\cdot]t], p)\}$$

где $F(t, x[t_*[\cdot]t]) = \{f \in R^n : \|f\| \leq \sqrt{2}L(t, x[t_*[\cdot]t])\}$, $L(t, x[t_*[\cdot]t])$ из условия (3_H).

Пусть

$$\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H), \quad \{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$$

Рассмотрим дифференциальные включения с последствием

$$dx[t]/dt \in F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) \tag{2.5}$$

$$dx[t]/dt \in F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) \tag{2.6}$$

Пусть

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad p \in P, \quad q \in Q$$

Под решением включения (2.5) (соответственно (2.6)) с начальным условием g^0 , при фиксированном q (p), будем понимать функцию $x(\cdot) \in C([t_*, T], R^n)$, совпадающую с $x^0[t_*[\cdot]t^0]$ на $[t_*, t^0]$, абсолютно непрерывную на $[t^0, T]$ и при почти всех $t \in [t^0, T]$ удовлетворяющую включению (2.5) (соответственно (2.6)). Множество всех таких решений обозначим $X^*(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], q | F^*)$ ($X_*(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], p | F_*)$). В силу условий (1_K) , (2_K) эти множества будут непустыми компактами в $C([t_*, T], R^n)$ при любых $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], p, q) \in G \times P \times Q$.

Определение. Минимаксным решением (МР) задачи (2.3), (2.4) назовем непрерывный функционал $\varphi: G \rightarrow R$, удовлетворяющий краевому условию (2.4) и, при некоторых $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$, паре неравенств

$$\sup_{(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]; t, q)} \min_{x^*(\cdot)} [\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])] \leq 0 \quad (2.7)$$

где

$$(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t \in [t^0, T], \quad q \in Q, \quad x^*(\cdot) \in X^*(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], q | F^*)$$

и

$$\inf_{(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]; t, p)} \max_{x_*(\cdot)} [\varphi(t, x_*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])] \geq 0 \quad (2.8)$$

где

$$(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t \in [t^0, T], \quad p \in P, \quad x_*(\cdot) \in X_*(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], p | F_*)$$

Можно проверить, что при условиях (1_H) – (4_H) , накладываемых на гамильтониан H , и непрерывном краевом функционале σ МР задачи (2.3), (2.4) существует, единственно и обладает следующими свойствами. Оно удовлетворяет неравенствам (2.7) и (2.8) при любых $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$. Оно корректно, т.е. непрерывно зависит от вариации краевого условия и гамильтониана. МР задачи (2.3), (2.4) может не быть $\bar{c}$ -дифференцируемым на G , однако, с одной стороны, в каждой точке $(t, x[t_*[\cdot]t])$, где это решение $\bar{c}$ -дифференцируемо, оно удовлетворяет уравнению (2.3), а с другой – непрерывный, непрерывно $\bar{c}$ -дифференцируемый на G функционал, удовлетворяющий соотношениям (2.3), (2.4), является МР.

Замечание. Обоснование данных утверждений проводится в основном по плану, изложенному ранее ([10], с. 13–40), с учетом особенностей, связанных с эффектом последствия и функциональностью аргумента искомого решения. Соответствующие рассуждения выходят за рамки настоящей статьи и здесь не приводятся.

3. Экстремальные стратегии. Определим многозначные отображения

$$\begin{aligned} F^u(t, x[t_*[\cdot]t], v) &= \text{co}\{f = f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \mid u \in U\} \\ F_v(t, x[t_*[\cdot]t], u) &= \text{co}\{f = f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \mid v \in V\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \in G \times U \times V$$

Здесь $\text{co } F$ – выпуклая оболочка множества F в R^n .

Учитывая условия (1_f) – (4_f) и равенство (2.2), можно проверить, что для

$$P = U, \quad Q = V, \quad F^*(\cdot) = F^u(\cdot), \quad F_*(\cdot) = F_v(\cdot)$$

выполняются требования (1_K) – (3_K) (причем (1_K) при $a = \kappa$ из (3_f)), так что

$$\{V, F^u(\cdot)\} \in K^*(H), \quad \{U, F_v(\cdot)\} \in K_*(H)$$

Отметим еще, что многозначные отображения

$$(t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto F^u(t, x[t_*[\cdot]t], u), \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto F_v(t, x[t_*[\cdot]t], v)$$

непрерывны (по включению) на G равномерно по $v \in V$ и $u \in U$.

Пусть $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ – минимаксное решение задачи (2.2)–(2.4).

Тогда согласно материалу разд. 2 функционал φ , в частности, удовлетворяет неравенствам (2.7) и (2.8), соответственно при $Q = V$, $F^*(\cdot) = F^u(\cdot)$ и $P = U$, $F_*(\cdot) = F_v(\cdot)$.

Замечание. При этих условиях неравенства (2.7) и (2.8) выражают, соответственно, должные свойства u - и v -стабильности [3–8] функционала цены дифференциальной игры (1.1), (1.3).

Пусть $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$ ($t^0 < T$) – начальное состояние системы (1.1). Через $X^0 = X(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ обозначим множество исходящих из g^0 решений дифференциального включения

$$dx[t]/dt \in \{f \in R^n : \|f\| \leq \kappa(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|)\} \quad (3.2)$$

где κ из условия (3_f). Множество X^0 будет непустым компактом в $C([t_*, T], R^n)$. Положим

$$\begin{aligned} W_u(t) &= \{w(\cdot) \in X^0 : \varphi(t, w[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])\} \\ W_v(t) &= \{w(\cdot) \in X^0 : \varphi(t, w[t_*[\cdot]t]) \geq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$t^0 \leq t \leq T$$

В силу неравенств (2.7) ($Q = V$, $F^*(\cdot) = F^u(\cdot)$), (2.8) ($P = U$, $F_*(\cdot) = F_v(\cdot)$), условия (1_K) ($a = \kappa$) и включения (3.2) множества $W_u(t)$ и $W_v(t)$ непусты при любом $t \in [t^0, T]$. Функционал φ непрерывен на G , поэтому $W_u(t)$ и $W_v(t)$ компактны в $C([t_*, T], R^n)$.

Экстремальную стратегию $u_e(\cdot)$ первого игрока определим на основе произвольного выбора

$$u_e(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \arg \min_{u \in U} \{ \max_{f \in F_v(t, x[t_*[\cdot]t], u)} \langle s_u^0, f \rangle \} \quad (3.4)$$

где

$$s_u^0 = x[t] - w_u^0[t], \quad w_u^0(\cdot) \in \arg \min_{w(\cdot) \in W_u(t)} \{ \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau] - w[\tau]\| \} \quad (3.5)$$

Экстремальную стратегию $v_e(\cdot)$ второго игрока определим на основе произвольного выбора

$$v_e(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \arg \max_{v \in V} \{ \min_{f \in F^u(t, x[t_*[\cdot]t], v)} \langle s_v^0, f \rangle \} \quad (3.6)$$

где

$$s_v^0 = w_v^0[t] - x[t], \quad w_v^0(\cdot) \in \arg \min_{w(\cdot) \in W_v(t)} \{ \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau] - w[\tau]\| \} \quad (3.7)$$

Здесь $F^u(\cdot)$ и $F_v(\cdot)$ из (3.1), $W_u(t)$ и $W_v(t)$ из (3.3). Выполнено требование (1_f). Поэтому нужные в (3.4) и (3.6) значения u_e и v_e существуют при любом $t \in [t^0, T]$.

4. Минимаксное решение и цена игры.

Теорема 1. Пусть для системы (1.1) выполнены требования (1_f)–(4_f), в (1.3) функционал $\sigma : C([t_0, T], R^n) \mapsto R$ непрерывен. Тогда для любого начального состояния

$$(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t^0 < T \quad (4.1)$$

дифференциальная игра с наследственной информацией (1.1), (1.3) имеет цену $\Gamma^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ в классе чистых стратегий. Функционал $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \mapsto \Gamma^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ совпадает с минимаксным решением φ задачи (2.2)–(2.4). Экстремальные стратегии $u_e(\cdot)$ и $v_e(\cdot)$ образуют седловую точку рассматриваемой игры.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой пары $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$, удовлетворяющей условию (4.1), справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot)) &\leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \\ \Gamma_v(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], v_e(\cdot)) &\geq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])\end{aligned}\quad (4.2)$$

Действительно, из этих неравенств, если учесть выражение (1.7), аналогичное ему выражение для Γ_v^0 , а также неравенство (1.8), вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) &\geq \Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot)) \geq \Gamma_u^0 \geq \\ &\geq \Gamma_v^0 \geq \Gamma_v(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], v_e(\cdot)) \geq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])\end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Доказательства неравенств (4.2) не различаются по существу.

Ниже приведена схема доказательства первого неравенства (4.2).

Пусть выполнено условие (4.1) и $X^0 = X(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ (см. (3.2)). Обозначим

$$v(t, x[t_*[\cdot]t], w[t_*[\cdot]t]) = \exp\{-2\Lambda(t - t_0)\} \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau] - w[\tau]\|^2 \quad (4.3)$$

где $\Lambda > 0$ из условия (2_f) при $D = X^0$.

Лемма 1. Для любой пары $(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$, удовлетворяющей условию (4.1), и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta^0 > 0$, что справедливо следующее утверждение.

Пусть $x^*(\cdot) \in X^0$, $w^*(\cdot) \in X^0$, $t^* \in [t^0, T)$, $t \in (t^*, T]$ и $t - t^* \leq \delta^0$. Пусть $s^* = x^*[t^*] - w^*[t^*]$, $u_e = u_e(t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*])$ из (3.4) при $s_u^0 = s^*$, $v_e = v_e(t^*, w^*[t_*[\cdot]t^*])$ из (3.6) при $s_v^0 = s^*$. Тогда для любых $x(\cdot) \in X_*(t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*], u_e|F_v)$ и $w(\cdot) \in X^*(t^*, w^*[t_*[\cdot]t^*], v_e|F_u)(F_u(\cdot) \text{ и } F_v(\cdot) \text{ из (3.1)})$ имеем $x(\cdot) \in X^0$, $w(\cdot) \in X^0$ и справедливо неравенство

$$v(t, x[t_*[\cdot]t], w[t_*[\cdot]t]) \leq v(t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*], w^*[t_*[\cdot]t^*]) + \varepsilon(t - t^*) \quad (4.4)$$

Доказательство этой леммы проводится по изложенному ранее плану ([3], с. 59–61, см. также [10], с. 97–99) и здесь опускается.

Возьмем $\eta > 0$. Функционал $\sigma: C([t_0, T], R^n) \mapsto R$ непрерывен, $X^0 = X(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$ – компакт в $C([t_*, T], R^n)$. Поэтому существует такое $\zeta > 0$, что для всех $x(\cdot) \in X^0$ и $w(\cdot) \in X^0$, удовлетворяющих условию

$$\max_{t_* \leq \tau \leq T} \|x[\tau] - w[\tau]\| \leq \zeta$$

справедливо неравенство

$$|\sigma(x[t_0[\cdot]T]) - \sigma(w[t_0[\cdot]T])| \leq \eta \quad (4.5)$$

Положим

$$\varepsilon = \zeta^2 \exp\{-2\Lambda(T - t_0)\} / (T - t_0) \quad (4.6)$$

По этому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta^0 > 0$, для которого выполняются утверждения леммы 1. Для $\delta \in (0, \delta^0]$ возьмем разбиение Δ_δ (1.4). Рассмотрим закон управления первого игрока $(u_e(\cdot), \Delta_\delta)$. Пусть случилась какая-то допустимая реализация $v[t^0[\cdot]T]$ и реали-

зовалось движение $x^*(\cdot) = x(\cdot | t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot), \Delta_\delta, \nu[t^0[\cdot]T])$ системы (1.1). В силу требования (3_f) и (3.2) $x^*(\cdot) \in X^0$. Обозначим

$$\text{dist}[x[t_*[\cdot]t], W_u(t)] = \min_{w(\cdot) \in W_u(t)} \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau] - w[\tau]\| \quad (4.7)$$

$$x(\cdot) \in X^0, \quad t \in [t^0, T]$$

где $W_u(t)$ из (3.3).

Для любого $i = 1, \dots, k+1$ выполняется неравенство

$$\text{dist}[x^*[t_*[\cdot]t_i], W_u(t_i)] \leq \sqrt{\varepsilon(t_i - t_0)} \exp\{\Lambda(t_i - t_0)\} \quad (4.8)$$

доказываемое по индукции от $i = 1$ до $i = k+1$.

При $i = 1$ имеем $t_1 = t^0$, $x^*[t_*[\cdot]t^0] = x^0[t_*[\cdot]t^0]$, поэтому $x^*(\cdot) \in W_u(t^0)$, и неравенство (4.8) ($i = 1$) выполнено.

Предположим далее, что неравенство (4.8) справедливо при $i = j$ ($1 \leq j \leq k$) и покажем, что тогда (4.8) выполняется для $i = j+1$.

Положим $w^*(\cdot) = w_u^0(\cdot)$ из (3.5) при $t = t_j$; $s^* = x^*[t_j] - w^*[t_j]$; $u_e = u_e(t_j, x^*[t_*[\cdot]t_j])$ из (3.4) при $s_u^0 = s^*$; $v_e = v_e(t_j, w^*[t_*[\cdot]t_j])$ из (3.6) при $s_v^0 = s^*$. Тогда $w^*(\cdot) \in W_u(t_j) \subset X^0$, и по предположению индукции, учитывая соотношение (4.3), имеем

$$v(t_j, x^*[t_*[\cdot]t_j], w^*[t_*[\cdot]t_j]) \leq \varepsilon(t_j - t_0) \quad (4.9)$$

Согласно (2.7) ($Q = V$, $F^*(\cdot) = F^u(\cdot)$) существует такая функция $w(\cdot) \in X^*t_j, w^*[t_*[\cdot]t_j], v_e | F^u$, что

$$\varphi(t_j, w^*[t_*[\cdot]t_j]) \geq \varphi(t_{j+1}, w[t_*[\cdot]t_{j+1}])$$

Так как $w^*(\cdot) \in W_u(t_j)$, то в силу (3.3) имеем

$$\varphi(t_j, w^*[t_*[\cdot]t_j]) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$$

Отсюда получаем неравенство

$$\varphi(t_{j+1}, w[t_*[\cdot]t_{j+1}]) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \quad (4.10)$$

Пусть

$$x(\cdot) \in X_*(t_{j+1}, x^*[t_*[\cdot]t_{j+1}], u_e | F_v)$$

Согласно определению движения

$$x^*(\cdot) = x(\cdot | t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot), \Delta_\delta, \nu[t^0[\cdot]T])$$

(см. (1.4), (1.5) и (3.4), (3.5)) и (3.1) функция $x^*(\cdot)$ при почти всех $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$ удовлетворяет включению

$$dx^*[\tau]/d\tau \in F_v(\tau, x^*[t_*[\cdot]\tau], u_e)$$

Поэтому

$$x(\cdot) \in X_*(t_j, x^*[t_*[\cdot]t_j], u_e | F_v)$$

Заметим теперь, что для $t^* = t_j$, $t = t_{j+1}$ и выбранных выше $x^*(\cdot)$, $w^*(\cdot)$, $x(\cdot)$, $w(\cdot)$ выполняются все требования леммы 1.

Из (4.4) ($t^* = t_j$, $t = t_{j+1}$), учитывая соотношения (4.3), (4.9) и равенство

$$x[t_*[\cdot]t_{j+1}] = x^*[t_*[\cdot]t_{j+1}]$$

ВЫВОДИМ

$$\max_{t_* \leq \tau \leq t_{j+1}} \|x^*[\tau] - w[\tau]\| \leq \sqrt{\varepsilon(t_{j+1} - t_0)} \exp\{\Lambda(t_{j+1} - t_0)\} \quad (4.11)$$

Поскольку в силу (3.3) и (4.10) $w(\cdot) \in W_u(t_{j+1})$, то из (4.7) ($t = t_{j+1}$) и (4.11) следует справедливость нужного неравенства (4.8) при $i = j + 1$. В силу математической индукции неравенство (4.8) выполняется для любого $i = 1, \dots, k + 1$.

Из (4.8) (при $i = k + 1$), если учесть (4.6) и выбор числа $\zeta > 0$ (см. (4.5)), следует, что существует функция $w_0(\cdot) \in W_u(T)$, для которой выполняется неравенство

$$|\sigma(x^*[t_0[\cdot]T]) - \sigma(w_0[t_0[\cdot]T])| \leq \eta$$

Согласно соотношениям (2.4), (3.3) имеем

$$\sigma(w_0[t_0[\cdot]T]) = \varphi(T, w_0[t_*[\cdot]T]) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\sigma(x^*[t_0[\cdot]T]) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) + \eta \quad (4.12)$$

Напомним, что

$$x^*(\cdot) = x(\cdot | t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot), \Delta_\delta, v[t^0[\cdot]T])$$

причем $\delta \in (0, \delta^0]$, Δ_δ (1.4) и допустимая реализация $v[t^0[\cdot]T]$ были выбраны произвольно. Стало быть, из (4.12) согласно равенству (1.6) вытекает, что

$$\Gamma_u(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], u_e(\cdot)) \leq \varphi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) + \eta$$

Так как число $\eta > 0$ было выбрано также произвольно, то отсюда следует доказываемое первое неравенство (4.2).

Второе неравенство (4.2) доказывается подобным образом с понятными изменениями.

Замечание. При практическом построении экстремальных стратегий, в зависимости от конкретных свойств системы (1.1) и показателя (1.3), в (3.5) и (3.7) бывает удобным иначе оценивать близость между $x(\cdot)$ и $w(\cdot)$. При этом следует убедиться, что для подобранного соответствующим образом функционала v типа (4.3) выполняется утверждение, аналогичное лемме 1.

Теорема 1 и приведенные в разд. 2 свойства минимаксного решения задачи (2.3), (2.4) позволяют заключить, что функциональное уравнение (2.2), (2.3) можно (по аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных игр [1–4, 10, 11]) трактовать как основное уравнение дифференциальных игр с наследственной информацией.

5. Пример. Пусть

$$n = 2, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad h = \text{const} > 0, \quad t_0 = 0, \quad t_* = -h$$

Рассмотрим дифференциальную игру для системы с последствием

$$dx_1[t]/dt = \beta x_2[t-h], \quad dx_2[t]/dt = \alpha x_1[t] + b(t)u + v, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.1)$$

где α и β – известные числа, функция $b(t)$ непрерывна и удовлетворяет условиям $|b(t)| \geq 1$ при $t \in [0, t']$ и $|b(t)| \leq 1$ при $t \in [t', T]$ ($0 < t' \leq T$), $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, с показателем качества

$$\gamma_* = \max\{|x_2[t_1]|, |x_2[t_2]| + |x_1[T]|\} \quad (5.2)$$

где $t_1 \in [0, t')$ и $t_2 \in (t_1, t']$ – заданные моменты времени.

Пусть матрица-функция

$$\Psi[\xi] = \begin{pmatrix} \psi_{11}[\xi] & \psi_{12}[\xi] \\ \psi_{21}[\xi] & \psi_{22}[\xi] \end{pmatrix}$$

такова, что

$$\Psi[\xi] = 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0, \quad \Psi[0] = E, \quad \frac{d\Psi[\xi]}{d\xi} = \begin{pmatrix} \beta\psi_{21}[\xi-h] & \beta\psi_{22}[\xi-h] \\ \alpha\psi_{11}[\xi] & \alpha\psi_{12}[\xi] \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \xi \geq 0$$

Обозначим

$$y_j(t, x[t_*[\cdot]t]) = \begin{cases} \psi_{21}[t_j-t]x_1[t] + \psi_{22}[t_j-t]x_2[t] + \\ + \int_{t+h}^{t+h} \psi_{21}[t_j-\tau]\beta x_2[\tau-h]d\tau, & \text{если} \quad t < t_j; \quad j=1, 2 \\ x_2[t_j], & \text{если} \quad t_j \leq t \end{cases}$$

$$y_3(t, x[t_*[\cdot]t]) = \psi_{11}[T-t]x_1[t] + \psi_{12}[T-t]x_2[t] + \int_t^{t+h} \psi_{11}[T-\tau]\beta x_2[\tau-h]d\tau$$

$$l = (l_1, l_2, l_3) \in R^3, \quad \mu(l) = \max\{|l_1| + |l_2|, |l_3|\}$$

$$\chi(t, x[t_*[\cdot]t], l) = l_1 y_1(t, x[t_*[\cdot]t]) + l_2 y_2(t, x[t_*[\cdot]t]) + l_3 y_3(t, x[t_*[\cdot]t]) +$$

$$\begin{cases} -\int_{t'}^{t'} |l_1 \psi_{22}[t_1-\tau] + l_2 \psi_{22}[t_2-\tau] + l_3 \psi_{12}[T-\tau]| (|b(\tau)| - 1) d\tau + \\ + \int_{t'}^{t'} |\psi_{12}[T-\tau](1 - |b(\tau)|)| d\tau, & \text{если} \quad t < t' \\ \int_{t'}^{t'} |\psi_{12}[T-\tau](1 - |b(\tau)|)| d\tau, & \text{если} \quad t' \leq t \end{cases}$$

Тогда функционал

$$\Gamma_*^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) = \max_{\mu(l) \leq 1} \chi(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0], l), \quad (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G \quad (5.3)$$

будет ценой игры (5.1), (5.2), что можно вывести, например, опираясь на конструкции из [7–9]. Функционал (5.3) является минимаксным решением следующего уравнения в коинвариантных производных:

$$\partial_t \varphi + \nabla_1 \varphi \beta x_2[t-h] + \nabla_2 \varphi \alpha x_1[t] + |\nabla_2 \varphi| (1 - |b(t)|) = 0$$

где

$$\partial_t \varphi = \partial_t \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]), \quad (\nabla_1 \varphi, \nabla_2 \varphi) = \nabla \varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$$

при условии на правом конце

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \max\{|x_2[t_1]|, |x_2[t_2]| + |x_1[T]|\}$$

Это можно проверить, взяв, например,

$$P = Q = [-1, 1]$$

$$F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) = \{f = (\beta x_2[t-h], \alpha x_1[t] + b(t)u + q) \mid |u| \leq 1\}$$

$$F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) = \{f = (\beta x_2[t-h], \alpha x_1[t] + b(t)p + v) \mid |v| \leq 1\}$$

Опираясь на конструкции из разд. 3, 4 и учитывая соотношения (5.1)–(5.3), получаем, что стратегии

$$u_e^*(t, x[t_*[\cdot]t]) = -\text{sign}[b(t)(l_1'' \psi_{22}[t_1-t] + l_2'' \psi_{22}[t_2-t] + l_3'' \psi_{12}[T-t])]$$

где

$$(l_1^u, l_2^u, l_3^u) \in \arg \max_{\mu(l) \leq 1} \{\chi(t, x[t_*[\cdot]t], l) - \varepsilon_u(t, x[t_*[\cdot]t])\mu(l)\}$$

$$\varepsilon_u(t, x[t_*[\cdot]t]) = \max\{0, \Gamma_*^0(t, x[t_*[\cdot]t]) - \Gamma_*^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0])\}$$

и

$$v_e^*(t, x[t_*[\cdot]t]) = \text{sign}[l_1^v \psi_{22}[t_1 - t] + l_2^v \psi_{22}[t_2 - t] + l_3^v \psi_{12}[T - t]]$$

где

$$(l_1^v, l_2^v, l_3^v) \in \arg \max_{\mu(l) \leq 1} \{\chi(t, x[t_*[\cdot]t], l) + \varepsilon_v(t, x[t_*[\cdot]t])\mu(l)\}$$

$$\varepsilon_v(t, x[t_*[\cdot]t]) = \max\{0, \Gamma_*^0(t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) - \Gamma_*^0(t, x[t_*[\cdot]t])\}$$

будут оптимальными в игре (5.1), (5.2).

Компьютерное моделирование процесса управления при

$$\alpha = \beta = 1, \quad b(t) = 2 - t/2, \quad h = 1, \quad t_1 = 1/2, \quad t_2 = 3/2, \quad T = 4$$

$$t^0 = 0, \quad x^0[-1[\cdot]0] = \{(x_1^0[\tau] = -2, x_2^0[\tau] = 1 + \sin 2\pi\tau), -1 \leq \tau \leq 0\}$$

на базе равномерного разбиения отрезка времени $[0, 4]$ с шагом $\delta = 0,01$ дало следующие результаты.

Априори подсчитанное значение цены игры $\Gamma_*^0 = \Gamma_*^0(0, x^0[-1[\cdot]0]) \approx 0,939$. Под действием пары стратегий $(u_e^*(\cdot), v_e^*(\cdot))$ реализовался результат $\gamma_* = 0,935 \approx \Gamma_*^0$. При действии $u_e^*(\cdot)$ в паре с $v(\cdot) = \sin 4\pi t$ реализовалось $\gamma_* = 0,638 < \Gamma_*^0$. При действии $v_e^*(\cdot)$ в паре с $u(\cdot) = \sin 4\pi t$ получилось $\gamma_* = 9,758 > \Gamma_*^0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00160).

ЛИТЕРАТУРА

1. Isaacs R. Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965. = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton, New Jersey: Univ. Press, 1957. = Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последствием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
6. Осипов Ю.С. Альтернатива в дифференциально-разностной игре // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 1022–1025.
7. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin et al.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
8. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
9. Лукоянов Н.Ю., Реуцетова Т.Н. Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 586–597.
10. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
11. Melikyan A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 310 p.
12. Кум А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН, 1996. 234 с.
13. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
14. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. N.Y. etc.: Springer, 1998. 278 p.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
28.IX.1999