

УДК 531.38;532.5

© 2000 г. С.Т. Садэтов

О ЧЕТВЕРТОМ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Рассматривается поставленная Стекловым [1] задача о нахождении всех случаев, когда уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости допускают четвертый интеграл в виде однородного полинома произвольной степени. При наличии определенной симметрии, когда не работают другие методы [2–6], эта задача решена, в том числе для частного интеграла: все такие случаи исчерпываются классическими. Предложено усовершенствование подхода Гюссона [7], начиная со второго шага.

1. Введение и формулировка результата. Уравнения движения по инерции твердого тела при безвихревом обтекании идеальной однородной несжимаемой жидкостью, покоящейся на бесконечности, имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega + p \times v, \quad \dot{p} = p \times \omega, \quad \omega = \partial T / \partial M, \quad v = \partial T / \partial p \\ 2T &= \langle aM, M \rangle + 2\langle bM, p \rangle + \langle cp, p \rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь M имеет смысл суммарного момента системы "тело плюс жидкость", p – суммарного импульса; дифференцирование по времени производится в системе координат, вмороженной в тело; a, b, c – постоянные матрицы 3×3 , составляющие положительно определенную матрицу $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, обратную к матрице коэффициентов инерции при учете присоединенных масс, T – суммарная кинетическая энергия; ω – угловая скорость тела; v – скорость начала координат [9].

Уравнения (1.1) имеют инвариантную меру и три квадратичных закона сохранения, обнаруженные Кирхгофом: $T, \langle M, p \rangle, p^2$.

Эти уравнения возникают и в других физических задачах. Например, они описывают вращение вокруг неподвижной точки электрически заряженного твердого тела в однородном магнитном поле и осесимметричном силовом поле с квадратичным потенциалом при пренебрежении эффектом самоиндукции (в этом случае положительно определена лишь форма $\langle aM, M \rangle$) [10, 11].

Функция $F(x)$ называется алгебраической в точке $x = 0$, если $A_0 + A_1 F + \dots + A_k F^k = 0$, где $A_0(x), \dots, A_k(x)$ – функции, аналитические в точке $x = 0$, $A_k(x) \not\equiv 0$, $k \in N$, см. [12].

Интеграл системы (1.1) называется дополнительным [1, 8], если он независим с классическими; частным [13, 14], если он сохраняется лишь при $\langle M, p \rangle = 0$. Можно показать, что дополнительный алгебраический в точке $M = p = 0$ (общий либо частный) интеграл системы (1.1) сводится к соответствующему дополнительному однородному рациональному [15, 2].

Стекловым [1] и Ляпуновым [16] были найдены все случаи существования дополнительного линейного и квадратичного интеграла системы (1.1) (позднее это было сделано [17] для произвольной, не обязательно положительно определенной, формы T).

Теорема. При значениях параметров

$$a = \text{diag}(a_1, a_1, a_3), \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad b = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad c = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$$

все случаи существования дополнительного алгебраического общего или частного интеграла системы (1.1) исчерпываются классическими: Кирхгофа [8], Клебша [18], Чаплыгина [13].

Следствие. Интеграл четвертой степени Чаплыгина [13] не продолжается до алгебраического интеграла вне поверхности $\langle M, p \rangle = 0$.

При $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ и произвольных b, c эта задача была исследована [2] заменой $p \rightarrow \varepsilon p$ и расщеплением сепаратрис случая Эйлера, причем существенно использовалась гамильтоновость возмущенной задачи (1.1), см. [3, 4].

При $a_1 = a_2$ в невозмущенном случае регулярной прецессии Эйлера – Лагранжа сепаратрисы отсутствуют. Расщепление других сепаратрис при другом введении малого параметра установлено либо при малых $c_1 - c_2 \neq 0$ [5], либо при достаточно больших a_3/a_1 [6]; плотность векового множества – при почти всех $a_3/a_1 > 2$ [6] (за исключением классических интегрируемых случаев).

Замечание. В важнейшем случае, когда тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad b = 0, \quad c = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$$

теорема данной работы вместе с результатом [2] завершает поставленную Стекловым [1] проблему.

Доказательство теоремы опирается на метод Гюссона [7] разложения дополнительного интеграла по малому параметру, использует технику анализа алгебраических зависимостей абелевых интегралов, восходящую к классическим результатам Абеля и Чебышева [19] и опирающуюся на оценки определяемой в разд. 1 алгебраической кратности нуля.

В случае, когда невозмущенная система имеет полный набор алгебраических интегралов (разд. 5), в оскулирующих алгебраических переменных препятствия к интегрируемости сведены непосредственно к вычетам и периодам на невозмущенном решении у некоторых интегродифференциальных операторов от векторного поля (ср. [20, 14]). Эти операторы содержат интегрирование вдоль невозмущенного решения и дифференцирование по оскулирующим переменным и параметру возмущения.

2. Алгебраическая кратность нуля. Пусть $\kappa \in \mathbb{Q}$. Обозначим

$$W = s^2 - 1, \quad \vartheta = (s - 1)/(s + 1), \quad \mathbf{M} = N_0 \cup (-\frac{3}{2} - N_0), \quad N = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Лемма Абеля [21]. Интеграл $\int W^\kappa ds$ является алгебраической функцией s , $\ln \vartheta$ тогда и только тогда, когда $\kappa \in \mathbb{Z}/2$. В частности, он будет алгебраической функцией s тогда и только тогда, когда $\kappa \in \mathbf{M}$.

Доказательство леммы Абеля вытекает из известных результатов [31, 22].

Пусть кольцо K порождено над $\mathbb{C}$ функциями $s, 1/\sqrt{W}$, кольцо L над K – функцией $\ln \vartheta$. Для

$$f = \sum_{l=0}^n f_l (\ln \vartheta)^l, \quad f_l \in K + W^{1/4} K, \quad n \in N_0$$

положим $v_\infty f = \min_l \text{ord}_\infty f_l$.

Следующие два свойства ord_∞ обобщаются на v_∞ .

Свойство 1

$$v_\infty(f + g) \geq \min\{v_\infty f, v_\infty g\}$$

При $v_\infty f \neq v_\infty g$ имеет место равенство.

Свойство 2

$$v_\infty(fg) = v_\infty f + v_\infty g$$

Лемма 1. Пусть $g(s)$ – функция, алгебраическая в точке $s = \infty$. Тогда

а) если $\text{ord}_\infty g \neq 0$, то $\text{ord}_\infty g' = \text{ord}_\infty g + 1$;

б) если $\text{ord}_\infty g = 0$, то $\text{ord}_\infty g' > 1$.

Свойство 3. Пусть $f \in L$. Тогда

а) $v_\infty f' \geq 1 + v_\infty f$;

б) если $v_\infty f' \leq 1$, то $v_\infty f' = 1 + v_\infty f$.

Критерий 1. Пусть $f \in L$, $v_\infty f \geq 2$. Тогда

$$\int f ds \in L, \quad v_\infty(\int f ds) \geq 0$$

Критерий 2. Пусть

$$J_{lm} = \int (W^l \int W^m ds) ds, \quad l, m \in \mathbb{Z}$$

Тогда условие $J_{lm} \notin L$ эквивалентно $\min\{l, m\} \leq -1 \leq l + m$.

Доказательства свойств 1, 2, 3 леммы 1 и критериев 1, 2 приведены в разд. 6.

3. Переменные Гюссона. Произведем замену

$$(M, p) \rightarrow (y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3), \quad t \rightarrow it$$

$$\omega = (p, q, r), \quad p = (p_1, p_2, p_3)$$

$$y_1 = p + iq, \quad y_2 = p - iq, \quad z_1 = p_1 + ip_2, \quad z_2 = p_1 - ip_2$$

использованную Гюссоном для симметричного тяжелого твердого тела (см. [23]).
Получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha r y_1 + p_3(\beta_3 z_1 + \beta_2 z_2)/2 - \beta(1 - \alpha)(r z_1 + y_1 p_3) + 2\beta_1 r z_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha r y_2 + p_3(\beta_2 z_1 + \beta_3 z_2)/2 + \beta(1 - \alpha)(r z_2 + y_2 p_3) - 2\beta_1 r z_1 \\ \dot{r} &= \frac{\beta_2}{4(1 - \alpha)}(z_1^2 - z_2^2) + \frac{\beta}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) - \frac{\beta_1}{1 - \alpha}(y_2 z_2 - y_1 z_1) \\ \dot{z}_1 &= y_1 p_3 - r z_1, \quad \dot{z}_2 = r z_2 - y_2 p_3, \quad \dot{p}_3 = (y_2 z_1 - y_1 z_2)/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$1 - \alpha = a_1 / a_3, \quad 2\beta = 2b_3 - b_1 - b_2, \quad 2\beta_1 = b_1 - b_2$$

$$\beta_2 = a_1(c_1 - c_2), \quad \beta_3 = a_1(c_1 + c_2 - 2\tilde{c}_3), \quad \tilde{c}_3 = c_3 - \beta^2 / a_3 + \beta_1^2 / a_1$$

Линейные комбинации исходных интегралов

$$H = 2a_1 T + (\beta_1^2 - a_1(c_1 + c_2)/2)p^2, \quad H_1 = 2a_1 \langle M, p \rangle - 2\beta p^2, \quad H_2 = p^2$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} H &= y_1 y_2 + (1 - \alpha)r^2 + \beta_2(z_1^2 + z_2^2)/4 - \beta_3 p_3^2 / 2 \\ H_1 &= y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2(1 - \alpha)rp_3 - \beta_1(z_1^2 + z_2^2) - 2\beta z_1 z_2 - 2(2 - \alpha)\beta p_3^2 \\ H_2 &= z_1 z_2 + p_3^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $\beta_2 \neq 0$ (т.е. за исключением интегрируемого случая Кирхгофа), не ограничивая общности, можно положить $\beta_2 = 1$, предполагая, что либо $p, b \in \mathbb{R}^3$, либо $p, b \in i\mathbb{R}^3$ (последнее эквивалентно замене p, b, c на $p\sqrt{\beta_2}, b\sqrt{\beta_2}, c\beta_2$).

4. Замена $(y_1, z_1, p_3) \rightarrow \epsilon(y_1, z_1, p_3)$. Следуя Гюссону, введем при $\beta_1 = 0$ в систему малый параметр ϵ посредством указанной замены.

Система и интегралы примут вид

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\alpha r y_1 + p_3(\epsilon \beta_3 z_1 + z_2)/2 - \beta(1-\alpha)(r z_1 + \epsilon y_1 p_3) \\ \dot{y}_2 &= \alpha r y_2 - p_3(\epsilon z_1 + \beta_3 z_2)/2 + \beta(1-\alpha)(r z_2 + \epsilon y_2 p_3)\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{4(1-\alpha)}(\epsilon^2 z_1^2 - z_2^2) + \frac{1}{2}\epsilon \beta(y_2 z_1 - y_1 z_2)$$

$$\dot{z}_1 = \epsilon y_1 p_3 - r z_1, \quad \dot{z}_2 = r z_2 - \epsilon y_2 p_3, \quad \dot{p}_3 = (y_2 z_1 - y_1 z_2)/2$$

$$z_2^2/4 + (1-\alpha)r^2 + \epsilon y_1 y_2 + \epsilon^2(z_1^2/4 - \beta_3 p_3^2/2) = h$$

$$y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2(1-\alpha)r p_3 - 2\beta h_2 - 2\epsilon(1-\alpha)\beta p_3^2 = h_1 \quad (4.2)$$

$$z_1 z_2 + \epsilon p_3^2 = h_2$$

Здесь h, h_1, h_2 – постоянные интегралов.

Предположим, что система (1.1), а следовательно и (4.1) при $\epsilon = 1$, имеет дополнительный однородный рациональный интеграл $\mathcal{F}(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3)$ (возможно, только на поверхности $\langle M, p \rangle = 0$, т.е. при $(H_1 + 2\beta H_2)(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3) = 0$). Тогда $\mathcal{F}(\epsilon y_1, y_2, r, \epsilon z_1, z_2, \epsilon p_3)$ – однородный рациональный интеграл системы (4.1) при произвольном ϵ (на поверхности

$$\epsilon^{-1}(H_1 + 2\beta H_2)(\epsilon y_1, y_2, r, \epsilon z_1, z_2, \epsilon p_3) = h_1 + 2\beta h_2 = 0)$$

В силу соотношений (4.2) последовательно выражаем

$$\begin{aligned}z_2 &= 2[w - \epsilon y_1 y_2 - \epsilon^2(z_1^2/4 - \beta_3 p_3^2/2)]^{1/2}, \quad z_1 = (h_2 - \epsilon p_3^2)z_2^{-1} \\ y_1 &= -(y_2 z_1 + 2(1-\alpha)r p_3 - h_1 - 2\beta h_2 - 2\epsilon(1-\alpha)\beta p_3^2)z_2^{-1}\end{aligned}\quad (4.3)$$

где $w = h - (1-\alpha)r^2$. Поэтому в переменных

$$u = (y_2 - \beta z_2)z_2^{-\alpha}, \quad R = w^{(\alpha-1)/2} p_3$$

система (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} &= \frac{\epsilon}{\rho} p_3 \left[\frac{1}{2} \beta_4 z_2^{1-\alpha} + \alpha u^2 z_2^{\alpha-1} + 2\beta u - \frac{1}{2} \epsilon (h_2 - \epsilon w^{1-\alpha} R^2) z_2^{-1-\alpha} \right] = \\ &= \epsilon f_1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \epsilon^2 f_2(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots \\ w^{(1-\alpha)/2} \frac{dR}{dr} &= \frac{S}{\rho} + (1-\alpha)^2 r w^{-1} p_3 = g_0(h, h_1, h_2, u, r) + \epsilon g_1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\rho = -\frac{z_2^2}{4(1-\alpha)} + \epsilon \beta S + \epsilon^2 \frac{(h_2 - \epsilon p_3^2)z_2^{-2}}{4(1-\alpha)}, \quad \beta_4 = 2(2-\alpha)\beta^2 - \beta_3$$

$$S = h_2 u z_2^{\alpha-1} + (1-\alpha)r p_3 - h_1/2 - \epsilon p_3^2[(2-\alpha)\beta + u z_2^{\alpha-1}]$$

Из соотношений (4.4) и рекуррентных формул (4.3) вытекает следующее предложение.

Предложение 1. Функции f_i, g_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) являются полиномами от h_1, h_2, u, R .

Доказательство. Разложение числителей и знаменателей правых частей системы (1.4) и

правых частей рекуррентных формул (4.3) в ряд по степеням ε полиномиально по $h_1, h_2, u, R, y_2, p_3, y_1, z_1$. Таковы и формулы $y_2(u, z_2), p_3(h, R, r)$. Ввиду произвольности h

$$z_2|_{\varepsilon=0} = 2w = 2(h - (1 - \alpha)r^2) \neq 0$$

Но только z_2 и w стоят не под натуральной степенью. Индукция по i завершает доказательство.

Интегрируя систему (4.4) при $\varepsilon = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 2^{-\alpha} C, \quad \tilde{R} = D + I + CJ \\ I &= \frac{1}{2}(1 - \alpha)h_1 \int w^{(\alpha-3)/2} dr, \quad J = -\frac{1}{2}(1 - \alpha)h_2 \int w^{\alpha-2} dr \end{aligned} \quad (4.5)$$

где C, D – постоянные интегрирования. Будем полагать, что C, D выбраны в качестве постоянных интегрирования системы (4.4) при произвольном ε .

Во всех случаях ниже предполагается $h \neq 0$.

1°. *Случай $\alpha \notin \mathbb{Q}, (h_1, h_2) \neq 0$.* Из существования четырех независимых алгебраических интегралов системы (4.1) вытекает алгебраическое соотношение на $\tilde{y}_2(r), \tilde{p}_3(r), r$ – компоненты решения системы (4.1) при $\varepsilon = 0$, откуда вытекает алгебраическая зависимость $r, w^\alpha, \tilde{R}$ для произвольных C, D . Из этого соотношения в силу первой леммы Абеля ([23], 9.2) получаем $\alpha \in \mathbb{Q}$, противоречие.

2°. *Случай $\alpha \in \mathbb{Q}$.* Тогда $u(y_2, z_2), R(p_3, r)$ – алгебраические функции и интеграл

$$\mathcal{F}(\varepsilon y_1, y_2, r, \varepsilon z_1, z_2, \varepsilon p_3) = \sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l F^l(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

– алгебраическая функция от $h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon$. Пусть m – минимальное такое, что коэффициент F^m функционально независим от h, h_1, h_2 . Тогда интеграл $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l F^l$ можно заменить на $\sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon^{l-m} F^l$, функционально независимый с h, h_1, h_2 при $\varepsilon = 0$.

Определение. Функцию

$$F(h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon) = F^0(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots + \varepsilon^n F^n(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

будем называть ε^n -интегралом системы (4.4), если в силу нее $dF/dr = o(\varepsilon^n)$. Этот интеграл называется дополнительным, если F^0 не есть функция только от h, h_1, h_2 .

При $\alpha \in \mathbb{Q}$ система (4.4) имеет дополнительный алгебраический ε^0 -интеграл u .

Предложение 2. За исключением случаев

$$1) \alpha \in \frac{1}{2} - N_0, \quad h_1 = 0; \quad 2) \alpha \in -2N_0, \quad h_2 = 0; \quad 3) h_1 = h_2 = 0 \quad (4.6)$$

дополнительный алгебраический ε^0 -интеграл определен однозначно, с точностью до функциональной зависимости.

Доказательство. В случае двух дополнительных независимых алгебраических ε^0 -интегралов все решения (4.5) должны быть алгебраическими кривыми в пространстве u, R, r для произвольных C, D . Следовательно, I и J должны быть алгебраическими функциями r . Отсюда, используя лемму Абеля, имеем одну из следующих возможностей:

- 1) $\alpha = 1$; 2) $h_1 = h_2 = 0$; 3) $h_1 = 0, \quad \alpha - 2 \in \mathbb{M}$;
- 4) $h_2 = 0, \quad (\alpha - 3)/2 \in \mathbb{M}$; 5) $\alpha - 2, \quad (\alpha - 3)/2 \in \mathbb{M}$

Учитывая $\alpha < 1$, получаем требуемое.

В рассматриваемых ниже случаях 3°–9° это условие единственности выполнено.

Ищем общее решение системы (4.4) в виде рядов

$$u(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon) = \tilde{u} + \varepsilon u' + \varepsilon^2 u'' + \dots,$$

$$R(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon) = \tilde{R} + \varepsilon R' + \varepsilon^2 R'' + \dots$$

приравнивая коэффициенты при степенях ε . Интегрируя систему, получающуюся приравниванием коэффициентов при ε^1 , имеем

$$u' = \int^r \kappa \tilde{R} dr \quad (4.7)$$

$$\kappa = \sum_{i=0}^2 \kappa_i C^i \equiv (\alpha - 1) 2^{-\alpha} \left\{ \beta_4 w^{-\alpha} + 2\beta w^{-(\alpha+1)/2} C + \frac{1}{2} \alpha w^{-1} C^2 \right\}$$

$$\frac{du''}{dr} = \frac{\partial f_1}{\partial u}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) u' + \frac{\partial f_1}{\partial R}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) R' + f_2(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) \quad (4.8)$$

Предложение 3. Функции $u'(h_1, h_2, C, D, r)$, R' , u'' , R'' , ... являются полиномами от h_1 , h_2 , C , D .

Доказательство вытекает из треугольности системы (4.4), формул (4.4) и предложения 1.

Подслучай единственности дополнительного алгебраического интеграла при $\varepsilon = 0$. Подставляя в дополнительный алгебраический ε^1 -интеграл

$$u + \varepsilon F^1(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

разложение общего решения по ε , получаем алгебраическую зависимость

$$u' + F^1(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(h, h_1, h_2, C, D) \quad (4.9)$$

аналогично, наличие ε^2 -интеграла

$$u + \varepsilon F^1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \varepsilon^2 F^2(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

эквивалентно дополнительной алгебраической зависимости

$$u'' + \frac{\partial F^1}{\partial u}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) u' + \frac{\partial F^1}{\partial R}(h, h_1, h_2, \tilde{R}, r) R' + F^2(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(h, h_1, h_2, C, D) \quad (4.10)$$

Предложение 4. Имеет место формула

$$F^1 = \lambda(u) R^2 + \mu(u, r) R + \nu(u, r)$$

где λ , μ , ν – алгебраические функции от u , r (зависимость от h , h_1 , h_2 здесь и ниже для краткости не указывается).

Доказательство. Функции $\tilde{R}(C, D, r)$, $u'(C, D, r)$ являются многочленами не выше первой степени по D . Дифференцируя тождество Гюссона (4.9) в переменных C , D , r по D , получаем

$$\int \kappa dr + \frac{\partial F^1}{\partial R}(\tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(C, D), \quad \frac{\partial^2 F^1}{\partial R^2}(\tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(C, D) \quad (4.11)$$

Из второго тождества (4.11) вытекает, что $\partial^2 F^1(u, R, r)/\partial R^2$ – алгебраический ε^0 -интеграл системы (4.4), функционально зависимый от h , h_1 , h_2 , u в силу предположения подслучая, что доказывает предложение 4.

Подставляя выражение для F^1 в первое тождество (4.11), имеем

$$\sum_{i=0}^2 C^i \int \kappa_i dr + 2\lambda(2^{-\alpha} C)(I + CJ) + \mu = \text{const}(C) \quad (4.12)$$

3°. *Случай Q* $\exists \alpha \notin Z/2, (h_1, h_2) \neq 0$. Это – случай единственности дополнительного алгебраического интеграла, поэтому, в силу предложения 4 имеет место формула (4.12).

Подставим в (4.12) ряды Пюизе функций λ и μ в точке $C = \infty$

$$2\lambda(2^{-\alpha} C) = \sum_{l=-\infty}^{l_0} \lambda_l C^l, \quad \mu(2^{-\alpha} C, r) = \sum_{m=-\infty}^{m_0} \mu_m(r) C^m$$

где $\lambda_{l_0} \neq 0$ при $l \neq 0$.

При $\lambda \equiv 0$, или $l_0 \leq 0$, или $h_2 = 0, l_0 \leq 1$, рассматривая в (4.12) коэффициент при C^2 , получаем алгебраичность $\int \kappa_2 dr$ по r , откуда $\alpha = 0$, противоречие.

При $\lambda_0 \geq 1, h_2 \neq 0$, рассматривая коэффициент при C^{l_0+1} , получаем алгебраичность по r выражения $\delta_{l_0,1} \int \kappa_2 dr + \lambda_{l_0} J$, где δ_{ij} – символ Кронекера, откуда, в силу леммы Абеля, $\alpha - 2 \in Z/2$, противоречие.

При $\lambda_0 \geq 2, h_2 = 0, h_1 \neq 0$ аналогично приводит к противоречию рассмотрение коэффициента при C^{l_0} .

4°. *Случай* $\alpha \in 1/2 - N_0, h_1 \neq 0$. Согласно лемме Абеля все слагаемые в левой части тождества (4.12), кроме второго и четвертого, берутся в алгебраических функциях и логарифмах; но по отдельности, ни второе, ни четвертое – не берутся. Следовательно, либо $\beta = h_1 = 0$ (что противоречит условию случая), либо $2\lambda = \lambda_1 C$. Но последняя возможность исключена, ибо тогда коэффициент при C^2 в тождестве (4.12) имел бы вид

$$2^{-\alpha-1} \alpha(\alpha-1) \int w^{-1} dr + \lambda_1 J + \mu_2(r) = \text{const}$$

где $\alpha \neq 0$, а второй интеграл – алгебраическая функция r .

Следовательно, случай Чаплыгина не продолжается до случая общей интегрируемости.

5°. *Случай* $\alpha \in -2N_0, h_2 \beta \neq 0$. В этом случае все слагаемые тождества (4.12), кроме $\int \kappa_1 dr$, представляются в виде суммы мономов $\ln \vartheta, rw^l, rw^{l+1/2}, l \in Z$ с постоянными коэффициентами, $\vartheta = (s-1)/(s+1), s = -r\sqrt{(1-\alpha)/h}$, а указанное слагаемое содержит в разложении $\beta \ln \sigma, \sigma = \sqrt{\alpha-1}r + w^{1/2}$, противоречие.

6°. *Случай* $\alpha \in -1-2N_0, h_1 \beta_4 \neq 0$. Воспользуемся тем, что $\tilde{R} \in L$, а коэффициент при $C^0 D^0$ в u' равен

$$2^{-\alpha}(\alpha-1)\beta_4 \int w^{-\alpha} l dr$$

и содержит $\ln w$. Последнее вытекает из критерия 2 в силу того, что -1 содержится в целочисленном интервале $\{(\alpha-3)/2, -(\alpha+3)/2\}$. Получаем противоречие с первым равенством Гюссона.

7°. *Случай, когда* $\alpha \in -N_0$ либо $\{\alpha \in -1/2 - N_0, \beta = h_1 = 0\}$. Из формул для решений (4.5), (4.7) и рекуррентных формул (4.3) находим

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2 &= 2w^{1/2}, \quad \tilde{u} = C2^{-\alpha}, \quad \tilde{y}_2 \tilde{z}_2^{-1} \sim \beta, \quad \tilde{R} = D + I + CJ \\ -\tilde{y}_1 \tilde{z}_2 &\sim 2(1-\alpha)rw^{(1-\alpha)/2} \tilde{R} \\ \tilde{z}_2 \tilde{z}_2' / 2 &= -\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \sim 2\beta(1-\alpha)rw^{(1-\alpha)/2} \tilde{R}, \quad u' \sim (\alpha-1)2^{-\alpha} \beta_4 \int w^{-\alpha} \tilde{R} dr \end{aligned} \quad (4.13)$$

где тильда означает, что в выражениях τ_i опущены слагаемые $\tau_{ij} \in L$ с пониженным порядком полюса по r в $r = \infty$: такие, что $v_\infty(\tau_{ij}) - v_\infty(\tau_i) \geq 1 - \alpha$; для u' соответствующее выражение получено при учете критерия 2; для $f(h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon)$ через $\tilde{f}, f', f'', \dots$ здесь и ниже обозначены производные по ε общего решения:

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial \varepsilon^i}(h, h_1, h_2, u(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon), R(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon), r, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

величины z'_2, z'_1, u'_1 выражены из соотношений (4.3).

Дифференцируя по ε при $\varepsilon = 0$ равенство (4.4) и подставляя в его правую часть выражения (4.13), получаем

$$dR'/dr \sim (\alpha - 1)\beta w^{-(\alpha+1)/2} \tilde{R}^2 [\alpha - 2 - (1 + \alpha)(1 - \alpha)^2 r^2 w^{-1}] \quad (4.14)$$

Следовательно, $v_\infty(dR'/dr) \geq 1 - \alpha$ и отброшенные в (4.14) слагаемые лежат в $L_2 = \{f \in L | v_\infty f \geq 2\}$.

8°. Случай $\alpha \in -1 - 2N_0, \beta_4 = 0$. Из критериев 1 и 2 вытекает $\tilde{R}, u' \in L$, и следовательно, существует дополнительный алгебраический ε^1 -интеграл $u + \varepsilon F^1(u, R, r)$.

Предложение 5. В условиях данного случая R' принадлежит L .

Доказательство. Из формулы (4.14), согласно критерию 2, ввиду $-1 \notin [(\alpha - 3)/2, -2 - j]$ ($j = 0, 1$), получаем, что линейные по D члены в R' принадлежат L . Очевидно, коэффициенты при D^2 в R' принадлежат L . Для коэффициентов при h_1^2 , интегрируя по частям, имеем

$$\int w^{-j-(\alpha+1)/2} (\int w^{(\alpha-3)/2} dr)^2 dr = J_j \int w^{(\alpha-3)/2} dr - \int w^{(\alpha-3)/2} J_j dr \quad (4.15)$$

$$J_j = \int w^{-j-(\alpha+1)/2} (\int w^{(\alpha-3)/2} dr) dr$$

Согласно критерию 2 имеем $J_j \in L$; $v_\infty(dJ_j/dr) = 2j + (\alpha + 1)$. За исключением $\{j = 1, \alpha = -1\}$, по свойству 3, б $v_\infty J_j = 2j + \alpha$ и, согласно критерию 1, ввиду $v_\infty(w^{(\alpha-3)/2} J_j) \geq 3$, последний интеграл в (4.15) принадлежит L . При $\alpha = -1$, согласно лемме 1, $v_\infty J_1 = 0$ и, в силу критерия 1,

$$\int w^{-2} J_1 dr \in L$$

Для коэффициентов при h_1, h_2, h_2^2 эти оценки тем более выполняются.

Подслучай $\alpha \neq -1, h_1 h_2 \neq 0$. Ввиду предложений 1 и 3 коэффициент при $C^0 D^0$ в u'' вычисляется подстановкой $u = 0$ в первое уравнение системы (4.4). Он равен

$$2^{-\alpha-2} (1 - \alpha) h_2 \int w^{-1-\alpha} I dr$$

Согласно критерию 2 этот интеграл содержит $\ln w$ тогда и только тогда, когда $-1 \in [(\alpha - 3)/2, -1 - (\alpha + 3)/2]$. В условиях данного подслучая -1 принадлежит указанному интервалу. Получаем противоречие со вторым тождеством Гюссона.

9°. Случай $\alpha \in -N_0$. Подставляя в правую часть (4.8) члены максимальной степени по D (что и означает ниже тильда) в указанных ниже величинах:

$$\tilde{u} = 2^{-\alpha} C, \quad \tilde{R} \sim D, \quad u' \sim (\alpha - 1) 2^{-\alpha} D \left(\beta_4 I_0 + 2\beta C I_1 + \frac{1}{2} \alpha C^2 I_2 \right)$$

$$R' \sim (\alpha - 1) D^2 \beta \{ (\alpha - 2) I_1 - (\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 I_3 \} - \frac{1}{2} D^2 C (\alpha - 1) \{ (1 - \alpha) r w^{-1} + \alpha I_2 \}$$

$$I_0 = \int w^{-\alpha} dr, \quad I_1 = \int w^{-(\alpha+1)/2} dr, \quad I_2 = \int w^{-1} dr, \quad I_3 = \int r^2 w^{-(\alpha+5)/2} dr$$

находим, ввиду предложений 1 и 3, коэффициент при D^2 в du''/dr в двух подслучаях ниже, используя аналитические вычисления в MAPLE V release 3.

Подслучай $\alpha = -1, \beta_4 = 0, \beta \neq 0, (h_1, h_2) \neq 0$. Коэффициент при D^2C^2 в du''/dr равен $-12\beta rw^{-1}$. Это противоречит алгебраической зависимости (4.10), ибо $\tilde{u}, \tilde{R}, u', R' \in L$, см. случай 8°.

Подслучай $\alpha \in -N_0, \beta = 0, \beta_4 \neq 0, h_2 \neq 0$. Из (4.7) вытекает включение $u' \in L$, а из (4.14) – включение $R' \in L$. Коэффициент при D^2C в du''/dr , ввиду

$$\int w^{-\alpha} I_2 dr = I_0 I_2 - \int w^{-1} I_0 dr$$

равен

$$2^{-\alpha} \alpha (\alpha - 1)^2 \beta_4 \left(\int r w^{-1-\alpha} dr + \frac{3}{2} \int w^{-1} I_0 dr \right)$$

где первый интеграл – алгебраический при $\alpha \neq 0$, а второй содержит $\ln w$ при $\alpha \in -N_0$. При $\alpha \neq 0$ это противоречит второму равенству Гюссона (4.10) (здесь выделяется третий случай Клебша $\alpha = 0$).

10°. *Случай* $\beta = h_1 = 0, \alpha \in 1/2 - N_0$. В этом случае выполняется условие неединственности 3 в (4.6), поэтому имеются два функционально независимых дополнительных алгебраических ε^0 -интеграла: $u, v := R - 2^\alpha uJ$. Перейдем в системе (4.4) к переменным u, v, r . Из существования дополнительного алгебраического ε^1 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, r)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^0}{\partial u} (2^{-\alpha} C, D) u' + \frac{\partial F^0}{\partial v} (2^{-\alpha} C, D) v' + F^1 (2^{-\alpha} C, D, r) &= \text{const} \\ \left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подслучай $\beta_3 \neq 0$. Разложение (4.7) принимает вид

$$\frac{u'}{\alpha - 1} = 2^{-\alpha} \int \left(-\beta_3 w^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} C^2 w^{-1} \right) (D + CJ) dr \quad (4.17)$$

где лишь коэффициент при $D^1 C^0$ не принадлежит L и содержит $\ln \sigma$; коэффициенты при D^0 принадлежат $K \subset L$. Из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{d\omega'}{dr} &= w^{-2} C \left(\frac{h_2}{4} (\alpha - 3) C w^{\alpha-1} + (\alpha - 1) r \tilde{R} \right) \times \\ &\times \left(\frac{h_2}{4} C w^{\alpha-1} - (\alpha - 1) r \tilde{R} \right) - \frac{C}{2} w^{-1} \tilde{R}^2 - \frac{2^\alpha}{\alpha - 1} J \frac{du'}{dr}, \quad \tilde{R} = D + CJ \end{aligned} \quad (4.18)$$

причем u' определяется формулой (4.17). Все слагаемые в правой части равенства (4.18), за исключением последнего, и коэффициенты при $DC^2, D^0 C^3$ в последнем принадлежат L_2 . Поэтому

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{d\omega'}{dr} = \beta_3 w^{-\alpha} J (D + CJ) \mod L_2 \quad (4.19)$$

Согласно критерию 1 первообразная коэффициента при D в этом равенстве $\mod L$ равна

$$\beta_3 A_0 \int r w^{-1} dr \sim \ln w$$

при C она равна

$$-\frac{1}{\alpha-1}\beta_3 A_0 A_n \int w^{-1/2} dr \sim \ln \sigma, \quad \alpha = \frac{1}{2} - n$$

где

$$\int w^{\alpha-2} dr = r \sum_{i=0}^n A_i w^{i-n-1/2}, \quad A_0 = \frac{1}{2n+1}, \quad A_n = \frac{2^n n! h^{-n}}{(2n+1)!!}$$

Коэффициенты при $\int r w^{-1} dr$ и $\int w^{-1/2} dr$ в левой части тождества (4.16) равны, соответственно,

$$\frac{(\alpha-1)^2}{2} \beta_3 A_0 h_2 D \frac{\partial F^0}{\partial v} (2^{-\alpha} C, D) - (\alpha-1) \beta_3 \left[\frac{1}{2^\alpha} \tilde{B} D \frac{\partial F^0}{\partial u} + \frac{\alpha-1}{4} A_0 A_n h_2^2 C \frac{\partial F^0}{\partial v} \right] \quad (4.20)$$

где $\tilde{B}$ – коэффициент при $\int w^{-1/2} dr$ в $\int w^{n-1/2} dr$, и должны обращаться в нуль.

Воспользуемся произвольностью постоянных C, D . При $h h_2 \neq 0$ получаем $\beta_3 = 0$. При $h_2 = 0$, $\beta_3 h \neq 0$ имеем $\partial F^0 / \partial u \equiv 0$, а уравнение (4.18) сводится к

$$\frac{\omega'}{\alpha-1} = -CD^2 \int \left(\frac{(1-\alpha)^2 r^2}{w^2} + \frac{w^{-1}}{2} \right) dr \equiv -\frac{\alpha}{2} CD^2 \int \frac{dr}{w} \pmod{K} \quad (4.21)$$

откуда $\partial F^0 / \partial w \equiv 0$, т.е. получаем противоречие с (4.16).

Подслучай $\beta_3 = 0$. Из (4.17), (4.19), (4.20) вытекает $u', \omega' \in L$.

Последовательно доказываем принадлежность следующих функций кольцу L , либо множеству $w^{1/4}L$ и оцениваем их v_∞ : $v_\infty r = v_\infty w^{1/2} = v_\infty \tilde{z}_2 = -1$, $v_\infty \tilde{u} = v_\infty J = v_\infty \tilde{v} = v_\infty \tilde{R} = 0$ [24], $v_\infty \tilde{z}_1 = 1$; применяя свойства 1,2, имеем $v_\infty \tilde{p}_3 = v_\infty \tilde{y}_1 = \alpha - 1$; из (4.3) $v_\infty z'_2 = v_\infty u' = 0$, $v_\infty y'_2 = -\alpha$; в силу (4.19) и критерия $1 v_\infty u' \geq 0$; так как коэффициент при CD^2 в v' равен (4.21), а в v' нулю, то

$$v_\infty \omega' = v_\infty R' = 0, \quad v_\infty p'_3 = v_\infty y'_1 = \alpha - 1, \quad v_\infty z'_1 = 2\alpha - 1, \quad v_\infty z''_2 \geq 0$$

Из второго уравнения (4.4) получаем

$$\frac{1}{4(\alpha-1)} \frac{dR''}{dr} = h_2 w^{(\alpha-1)/2} (u z_2^{\alpha-3})'' + (1-\alpha) r [R(z_2^{-2} - \frac{1}{4} w^{-1})]'' - w^{(1-\alpha)/2} (R^2 u z_2^{\alpha-3})' + [h_2 w^{(\alpha-1)/2} \tilde{u} \tilde{z}_2^{\alpha-1} + (1-\alpha) r \tilde{R}] h_2^2 \tilde{z}_2^{-6} \quad (4.22)$$

Так как в правой части равенства (4.22) все слагаемые, кроме $h_2 w^{(\alpha-1)/2} u'' \tilde{z}_2^{\alpha-3}$, принадлежат L_2 , то величина

$$\frac{d\omega''}{dr} + 2^\alpha J \frac{du''}{dr} = \frac{dR''}{dr} - 2^\alpha \frac{dJ}{dr} u'' = \frac{dR''}{dr} - 4(\alpha-1) h_2 w^{(\alpha-1)/2} \tilde{z}_2^{\alpha-3} u''$$

принадлежит L_2 .

Подслучай $\beta_3 = 0$, $h_2 \neq 0$. Из системы (4.4) следует, что

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{du''}{dr} - 2 h_2 w^{(1-\alpha)/2} \tilde{R} \tilde{z}_2^{-\alpha-3} = 4\alpha w^{(1-\alpha)/2} (u^2 R z_2^{\alpha-3})' \in L_2$$

откуда, в силу критерия 1,

$$u'' = -2^{-2-\alpha}(\alpha-1)h_2 \int w^{-1-\alpha}(D+CJ)dr \bmod L$$

$$\omega'' = \frac{(\alpha-1)h_2}{4} \int w^{-1-\alpha}J(D+CJ)dr \bmod L$$

Из существования дополнительного алгебраического ε^2 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, r) + \varepsilon^2 F^2(u, v, r)$ вытекало бы

$$\frac{\partial F^0}{\partial u}(2^{-\alpha}C, D)u'' + \frac{\partial F^0}{\partial v}(2^{-\alpha}C, D)\omega'' \in C^-(r)[\ln v] \left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) \neq 0 \quad (4.23)$$

где $C^-(r)[\ln v]$ – кольцо над полем $C^-(r)$, порожденное элементом $\ln v$.

Но интегрирование по частям и использование известных формул [24] показывают, что

$$\frac{u''}{h_2} = -2^{-\alpha-2} \left\{ (\alpha-1)DB \ln \sigma + C \frac{A_1 \ln w}{2} \right\} \bmod L$$

$$\frac{\omega''}{h_2} = \frac{1}{4} \left\{ D \frac{A_1 \ln w}{2} + C \frac{A_1 A_n \ln \sigma}{(\alpha-1)^{1/2}} \right\} \bmod L$$

$$B = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ (\alpha-1)^{-1/2} 2^{1-n} (2n-3)!! h^{n-1} / (n-1)! & , n \in N' \end{cases} \quad A_1 = \frac{2}{h(4n^2-1)}$$

Из (4.23) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} CA_1 / (\alpha-1) & DB \\ DA_1 / (2(\alpha-1)) & CA_1 A_n / (\alpha-1)^{3/2} \end{vmatrix} = 0$$

откуда, ввиду произвольности C и D , следует, что $A_1 A_n = A_1 B = 0$, т.е. $A_1 = 0$ (здесь выделяется случай Чаплыгина $\alpha = 1/2, \beta = \beta_2 = \beta_3 = h_1 = 0$) или $A_n = B = 0$, что соответствует пустому множеству параметров задачи.

5. Замена $(y_1, y_2, p_3) \rightarrow \sqrt{\varepsilon}(y_1, y_2, p_3)$. В оставшемся случае $\beta_1 = \beta = \beta_3 = H_1 = H_2 = 0, \alpha \in -N_0$ введем в систему (3.1), (3.2) малый параметр ε посредством указанной замены. Имеем

$$\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{\alpha r y_1 - p_3 z_2 / 2}{r z_1 - \varepsilon y_1 p_3}, \quad \frac{dy_2}{dz_1} = \frac{-\alpha r y_2 + p_3 z_1 / 2}{r z_1 - \varepsilon y_1 p_3} \quad (5.1)$$

$$p_3 = \frac{y_1 z_2 + y_2 z_1}{2(\alpha-1)r} (\alpha-1)r^2 = h + \frac{1}{4}(z_1^2 + z_2^2) - \varepsilon y_1 y_2, \quad z_2 = -\varepsilon p_3^2 z_1^{-1}$$

где h – постоянная интеграла H .

Так как система (5.1) имеет два алгебраических ε^0 -интеграла

$$u = y_1 z_1^{-\alpha}, \quad v = y_2 z_1^\alpha w^{-1/2}, \quad w = 4h + z_1^2 \quad (5.2)$$

можно перейти к оскулирующим алгебраическим координатам (h, u, v, z_1) :

$$\dot{u} = \varepsilon f_1(h, u, v, z_1) + \varepsilon^2 f_2(h, u, v, z_1) + \dots$$

$$\dot{v} = \varepsilon g_1(h, u, v, z_1) + \varepsilon^2 g_2(h, u, v, z_1) + \dots$$

$$f_1 = \frac{v}{\alpha-1} [v^2 z_1^{1-4\alpha} + 2\alpha(\alpha-1)u^2 z_1^{-1}] w^{-1/2} \quad (5.3)$$

$$g_1 = \frac{uv^2}{1-\alpha} [2\alpha^2 w - 8\alpha w + 24\alpha h + 7(w - 4h)] z_1^{-1} w^{-3/2}, \dots$$

Выражения для f_1, g_1, f_2, g_2 вычислены в MAPLE V.

Пусть $\mathcal{F}(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3)$ – дополнительный алгебраический интеграл системы (3.1) при $H_1 = H_2 = 0$. Тогда

$$\mathcal{F}(\sqrt{\varepsilon} y_1, \sqrt{\varepsilon} y_2, r, z_1, z_2, \sqrt{\varepsilon} p_3) = \sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^{l/s} F^{l/s}(h, u, v, z_1), \quad l_0 \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}$$

– алгебраический интеграл (5.1) при произвольном ε . Пусть m – минимальное число такое, что величина $F^{m/s}$ функционально независима от h . Тогда интеграл $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^{l/s} F^{l/s}$

можно заменить на $\sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon^{(l-m)/s} F^{l/s}$. В силу рациональности по ε системы (5.1) его составляющая при целых степенях ε также будет интегралом (5.1).

Из существования дополнительного алгебраического ε^2 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, z_1) + \varepsilon^2 F^2(u, v, z_1)$ системы (5.1) вытекает

$$-\frac{\partial F^1}{\partial z_1} = \frac{\partial F^0}{\partial u}(u, v) f_1(u, v, z_1) + \frac{\partial F^0}{\partial v}(u, v) g_1(u, v, z_1) \quad \left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) \neq 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F^2}{\partial z_1} &= \frac{\partial F^0}{\partial u}(u, v) f_2(u, v, z_1) + \frac{\partial F^0}{\partial v}(u, v) g_2(u, v, z_1) + \\ &+ \frac{\partial F^1}{\partial u}(u, v, z_1) f_1(u, v, z_1) + \frac{\partial F^1}{\partial v}(u, v, z_1) g_1(u, v, z_1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь и ниже зависимость от h для краткости не указывается.

Из соотношений (5.3), (5.4) следует, что

$$\text{res}_{z_1=0} \left(-\frac{\partial F^1}{\partial z_1} \right) = -\alpha h^{-1/2} uv \left(v \frac{\partial F^0}{\partial v} - \frac{\partial F^0}{\partial u} \right) \equiv 0$$

откуда при $\alpha \neq 0$ (здесь выделяется третий случай Клебша $\alpha = 0$) следует $F^0 = F^0(uv)$, и, не ограничивая общности, можно положить $F^0 = uv$. Тогда, ввиду (5.4),

$$F^1 = \frac{v^2}{1-\alpha} \left[v^2 w^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{-2\alpha} \frac{C_{-2\alpha}^k}{2k+1} (-4h)^{-2\alpha-k} w^k \right) - u^2 (6\alpha - 7) w^{-1/2} \right] + \varphi^1(u, v)$$

Пусть $\mathbb{C}(z_1, w^{1/2})$ – пространство рациональных функций от $z_1, w^{1/2}$, $\delta = 2h^{1/2} + w^{1/2}$.

Пусть N – линейное пространство над $\mathbb{C}$, порожденное $\mathbb{C}(z_1, w^{1/2})$, $\ln z_1$, $\ln \delta$.

Ввиду того, что первообразные $\int f_1 dz_1, \int g_1 dz_1$ принадлежат N , слагаемое φ^1 не дает вклада в $-F^2 \bmod N$. Для вычисления $-F^2 \bmod N$ достаточно [24] подставить в соотношения (5.5) слагаемые меньших степеней по w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F^1 - \varphi^1)}{\partial u} &= \frac{2(6\alpha - 7)}{\alpha - 1} uv^2 w^{-1/2} (1 + O(w)) \\ \frac{\partial(F^1 - \varphi^1)}{\partial v} &= \frac{2v w^{-1/2}}{\alpha - 1} [(6\alpha - 7)u^2 - 2v^2 (4h)^{-2\alpha} w + O(w^2)] \end{aligned}$$

(остальные члены не дают вклада в вычеты в точке $w = 0$). Учитывая, что

$$uf_2 + ug_2 = \frac{2}{(\alpha - 1)^2} uv^3 z_1 w^{-2} [6(3\alpha^2 - 7\alpha + 4)u^2 + ((5\alpha - 6)w + 2h)v^2]$$

из соотношений (5.5) получаем, что $-F^2 \bmod N$ полиномиален по u, v и его коэффициент при uv^5 равен $(4h)^{-1\alpha}(\alpha - 1)^{-2} \ln w$, что противоречит алгебраичности F^2 .

Замечание. При наличии полного набора алгебраических ϵ^0 -интегралов вместо препятствий к интегрируемости Гюссона вида (4.16), (4.10), (4.23), ... в этой задаче использованы эквивалентные препятствия – вычеты и периоды правых частей (5.4); (5.5); ..., домноженных на dz_1 , на римановой поверхности $(z_1, \tilde{y}_1(z_1), \tilde{y}_2(z_1))$, определяемой соотношениями (5.2) (на которой они рациональны). Вычисление этих препятствий, в частности, требует меньшего числа квадратур.

6. Доказательства утверждений разд. 2.

Доказательство свойства 1. Пусть

$$g = \sum_{l=0}^{n_1} g_l \ln^l \vartheta$$

Тогда

$$v_\infty(f + g) = \min_l \text{ord}_\infty(f_l + g_l) \geq \min_l \{\text{ord}_\infty f_l, \text{ord}_\infty g_l\} = \min(v_\infty f, v_\infty g)$$

Доказательство свойства 2. Очевидно,

$$\text{ord}_\infty(f_l g_m) = \text{ord}_\infty f_l + \text{ord}_\infty g_m \geq v_\infty f + v_\infty g, \quad 0 \leq l \leq n, \quad 0 \leq m \leq n_1$$

Пусть l_0, m_0 – минимальные числа, такие, что

$$\text{ord}_\infty f_{l_0} = v_\infty f, \quad \text{ord}_\infty g_{m_0} = v_\infty g$$

Тогда

$$\text{ord}_\infty \left(\left(\sum_{l=0}^n f_l \ln^l \vartheta \right) \left(\sum_{l=0}^{n_1} g_m \ln^m \vartheta \right) \right)_{l_0+m_0} = \text{ord}_\infty \sum_{l=-l_0}^{m_0} f_{l_0+l} g_{m_0-l} = \text{ord}_\infty(f_{l_0} g_{m_0}) = v_\infty f + v_\infty g$$

Доказательство леммы 1. Пользуясь разложением Пюизе

$$g'(s) = s^{-k} (a_0 + a_1 s^{-1/t} + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad t \in N, \quad k \in \mathbb{Q}/1$$

имеем

$$g(s) = C + s^{1-k} [a_0 / (1-k) - a_1 s^{-1/t} / (1-k-1/t) + \dots], \quad C = \text{const}$$

откуда

$$\text{ord}_\infty g = \min\{\text{ord}_\infty C, \text{ord}_\infty g' - 1\}, \quad \text{ord}_\infty 0 = +\infty$$

Следовательно, при $\text{ord}_\infty g < 0$ получаем утверждение *a*, при $\text{ord}_\infty g = 0$ имеем $\text{ord}_\infty g' > 1$ и $C \neq 0$ б, при $\text{ord}_\infty g' > 0$ имеем $C = 0$ *a*.

Доказательство свойства 3, а. Действительно,

$$v_\infty f' = \min_l \text{ord}_\infty (f'_l + 2(l+1)W^{-1} f_{l+1}) \geq \min_l \{\text{ord}_\infty f'_l, \text{ord}_\infty (W^{-1} f_{l+1})\} \geq 1 + \min_l \text{ord}_\infty f_l = 1 + v_\infty f$$

где первое равенство вытекает из определения v_∞ , первое неравенство – из свойства 1, второе – из леммы 1.

Доказательство свойства 3, б. Пусть число l таково, что $v_{\infty}f = \text{ord}_{\infty}f_l$. Тогда

$$v_{\infty}f' \leq \text{ord}_{\infty}(f_l' + 2(l+1)W^{-1}f_{l+1}) = \text{ord}_{\infty}f_l' = 1 + \text{ord}_{\infty}f_l = 1 + v_{\infty}f$$

где неравенство вытекает из определения v_{∞} ; второе равенство – из леммы 1, ибо возможность б в ней исключена; первое равенство – из второго и соотношения

$$\text{ord}_{\infty}(f_{l+1}W^{-1}) = 2 + \text{ord}_{\infty}f_{l+1} \geq 1 + \text{ord}_{\infty}f_l$$

Доказательство критерия 1. Пусть либо $j = 0$, $k = -1, -3/2, -2, \dots$, либо $j = 1$, $k = -3/2, -2, -5/2, \dots$. Положим

$$I_{jkl} = \int s^j W^k \ln^l \vartheta ds, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $I_{jk0} - \delta_{0j}B_k \ln \vartheta \in K$ для некоторой постоянной B_k , и поэтому $I_{jk0} \in L$. Заменой $s = 1/z$ устанавливается, что I_{jkl} – аналитическая функция в точке $s = \infty$. Следовательно, $v_{\infty}I_{jk0} \geq 0$.

Интегрируя по частям

$$I_{jkl} = I_{jk0} \ln^l \vartheta - 2l \int W^{-1} I_{jk0} \ln^{l-1} \vartheta ds \quad (6.1)$$

воспользуемся индукцией по l , а внутри нее индукцией k . Рассматриваются четыре случая четности величин j и $2k$. Например, если $j = 0$, а k – целое число, имеем

$$I_{0k0} = B_k \ln \vartheta + s \sum_{m=k+1}^{-1} A_m W^m, \quad A_m = \text{const}$$

Подставляя это выражение в равенство (6.1), получаем

$$(1 + 2lB_{-1})I_{0-l0} = I_{0-l0} \ln^l \vartheta - 2l \sum_{m=k+1}^{-1} A_m I_{1,m-1,l-1}$$

где второе слагаемое принадлежит $L_0 = \{f \in L \mid v_{\infty}f \geq 0\}$ по предположению индукции.

Доказательство критерия 2. Если $l, m < 0$, то $J_{lm} \in L$ ввиду критерия 1. Если $l < 0 \leq m$, то

$$J_{lm} = - \sum_{i=l}^{m+l} A_i \int W^i dW \notin L \Leftrightarrow l \leq -1 \leq m+l$$

Случай $m < 0 \leq l$ сводится к предыдущему интегрированием по частям.

Автор благодарит В.В. Козлова за постановку задачи и ценные советы, Ю.А. Архангельского и Д.В. Трещева – за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков: Тип. Дарре, 1893. 234 с.
2. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
3. Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛШМ). I. // Функц. анализ и его приложения. 1981. Т. 15. № 3. С. 54–66.
4. Козлов В.В. Две интегрируемые задачи классической динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1981. Вып. 4. С. 80–83.
5. Козлов В.В. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Short Communications ICM. Sect. 13. Warszawa, 1982. P. 41.
6. Козлов В.В., Трещев Д.В. Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамики симметрично-тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. Вып. 1. С. 39–44.

7. *Husson E.* Recherche des integrales algebratique dans les mouvement d'un solide pesant autor d'un point fixe // *Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. Sci. math. et sci. phys.* 1906. V. 8. P. 73–152.
8. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit // *J. Reine und angew. Math.* 1870. Bd. 71. S. 237–262.
9. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
10. *Богоявленский О.И.* Уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // *Успехи мат. наук.* 1992. Т. 47. Вып. 1. С. 107–146.
11. *Яхья Х.М.* Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика,* 1985. № 5. С. 60–63.
12. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Т. 1. 336 с; Т. 2. 464 с.
13. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. М.: Наука, 1976. 495 с.
14. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I, II // *Функц. анализ и его прилож.* 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41; 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23.
15. *Liouville R.* Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points // *Acta math.* 1897. V. 20. P. 239–284.
16. *Ляпунов А.М.* Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // *Собр. соч.* М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 320–324.
17. *Рубановский В.Н.* О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости // *ПММ.* Т. 52. 1988. Вып. 3. С. 402–414.
18. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // *Mat. Ann.* 1870. Bd. 3. S. 238–262.
19. *Голубев В.В.* Работы П.Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций // *Научное наследие П.Л. Чебышева.* М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. Вып. 1. С. 88–121.
20. *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // *ПММ.* 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 400–406.
21. *Чебышев П.Л.* Об интегрировании иррациональных дифференциалов // *Чебышев П.Л. Полн. собр. соч.* Т. 2. 1947. С. 52–69.
22. *Abel N.* Oeuvres completes. V. 2. Cristiania, Gröndah, 1881. 338 p.
23. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
24. *Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986. 192 с.

Ростов-на-Дону

e-mail: ssadetov@uic2.rnd.runnet.ru

Поступила в редакцию
4.XI.1999