

УДК 531.36

© 2000 г. В.С. Сергеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ КРЫЛА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Исследуется устойчивость положения равновесия крыла, моделируемого тяжелым твердым телом с неподвижной точкой, по форме близким к тонкой пластине. Крепление крыла осуществляется с помощью вязкоупругого материала, который можно моделировать нелинейными вязкоупругими пружинами, удерживающими крыло в положении, близком к горизонтальному. Движение крыла описывается системой нелинейных обыкновенных интегродифференциальных уравнений, учитывающих в рамках принятой модели как нестационарность обтекания, так и вязкоупругие свойства материала пружин. Проведен анализ устойчивости равновесия при постоянно действующих возмущениях, который базируется на использовании рядов, аналогичных рядам первого метода Ляпунова. В критическом случае одного нулевого корня характеристического уравнения исследуется устойчивость равновесия при чисто вращательных движениях крыла вокруг продольной оси. Указаны постоянные Ляпунова, решающие задачу устойчивости.

1. Устойчивость равновесия при постоянно действующих возмущениях. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела (крыла) с неподвижной точкой под действием вязкоупругих сил в опоре (заделке крыла) и под влиянием нестационарного потока.

Будем считать твердое тело по форме близким к вытянутой пластине, с которой свяжем систему координат $Oxyz$ с центром в неподвижной точке O и осями, направленными по главным для точки O осям инерции тела. Ось Oz совпадает с наибольшей осью эллипсоида инерции, ось Oy – с наименьшей и ось Ox дополняет систему координат до правой.

Введем неподвижную правую прямоугольную систему координат $Ox_1y_1z_1$, ось Oy_1 которой направлена по восходящей вертикали и ось Ox_1 имеет направление, противоположное вектору скорости невозмущенного набегающего на пластину потока. На поток могут накладываться малые возмущения.

Положение системы координат $Oxyz$ относительно $Ox_1y_1z_1$ будем задавать самолетными углами: ψ (угол рысканья) – угол поворота триедра $Oxyz$ вокруг оси Oy_1 из положения, когда две системы координат совпадают, ϑ (угол тангажа) – угол поворота вокруг оси Oz_1 в ее новом положении Oz' после первого поворота, φ (угол крена) – угол поворота вокруг оси Ox в ее положении после второго поворота.

Обозначим через $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ проекции орта оси Oy_1 , через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции орта оси Oz_1 на оси системы координат $Oxyz$ и перейдем от угловых переменных ϑ, ψ, φ к направляющим косинусам $\beta_1, \beta_3, \gamma_1$, полагая

$$\sin \vartheta = \beta_1, \quad \sin \psi = -\frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{\beta_3}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \quad (1.1)$$

Пусть A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные для точки O моменты инерции тела, ω_i – проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения тела на оси подвижной системы

координат, x_0, y_0, z_0 – координаты центра масс тела в подвижных осях, L_i, M_i – моменты соответственно вязкоупругих и аэродинамических сил относительно подвижных осей. Запишем уравнения движения в виде (точкой обозначена производная по времени t)

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = mg(z_0 \beta_2 - y_0 \beta_3) + L_1 + M_1 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$\dot{\beta}_1 = \omega_3 \beta_2 - \omega_2 \beta_3, \quad \dot{\beta}_3 = \omega_2 \beta_1 - \omega_1 \beta_2, \quad \dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \quad (1.2)$$

Выразим входящие в уравнения (1.2) величины $\beta_2, \gamma_2, \gamma_3$ через $\beta_1, \beta_3, \gamma_1$ на основании геометрических соотношений, связывающих направляющие косинусы β_i и γ_k ($i, k = 1, 2, 3$). Имеем

$$\beta_2 = 1 + B_2, \quad \gamma_2 = -\beta_3 + \Gamma_2, \quad \gamma_3 = 1 + \Gamma_3$$

где B_2, Γ_2, Γ_3 – степенные ряды от $\beta_1, \beta_3, \gamma_1$.

Будем считать, что крыло удерживается в положении, близком к горизонтальному, вязкоупругими пружинами (вообще говоря, нелинейными). Моменты относительно координатных осей Ox, Oy, Oz действующих на тело вязкоупругих сил, принимая во внимание представление Вольтерры – Фреше [1, 2], запишем таким образом:

$$L_1 = l_1(\beta_3 + \beta_3^0) + \int_0^t L'_1(t-s)(\beta_3(s) + \beta_3^0)ds + L''_1(\beta_1, \beta_3, \gamma_1, t) \quad (1.3)$$

и аналогичные выражения для L_2, L_3 с заменой соответственно $l_1, \beta_3, \beta_3^0, L'_1, L''_1$ на $l_2, \gamma_1, \gamma_1^0, L'_2, L''_2$ и на $l_3, \beta_1, \beta_1^0, L'_3, L''_3$.

В (1.3) $l_i = \text{const}, \beta_i^0, \gamma_i^0 = \text{const}, L'_i$ – экспоненциально убывающие ядра (характеризующие вязкоупругие свойства материала), причем

$$|L'_i(t)| \leq C_i \exp(-\alpha_i t), \quad \alpha_i, C_i = \text{const} > 0 \quad (1.4)$$

и нелинейные члены $L''_i(\beta_1, \beta_3, \gamma_1, t)$ – функционалы, включающие ряды Вольтерры – Фреше (без линейных членов) и содержащие кратные интегралы по предположению с экспоненциально убывающими ядрами. Линейные члены в (1.3) отвечают малым поворотам вокруг координатных осей и следуют из кинематических уравнений, связывающих малые повороты вокруг координатных осей Ox, Oy, Oz с углами ϑ, ψ, φ и, следовательно, по (1.1) с $\beta_3, \gamma_1, \beta_1$.

Можно также полагать, что формулы (1.3) описывают все релаксационные процессы в материале опоры крыла (пружин).

Моменты аэродинамических сил при учете нестационарности обтекания возьмем в форме [3–5]

$$M_i = m_{i0} + m_{i1}\alpha + m_{i2}\beta + \sum_{j=1,2,3} m_{ij+2}\omega_j + \sum_{j=1,2,3} \int_0^t I_{ij}(t-s)\dot{\omega}_j(s)ds +$$

$$+ \int_0^t J_{i1}(t-s)\dot{\alpha}(s)ds + \int_0^t J_{i2}(t-s)\dot{\beta}(s)ds + J_{i1}(t)\alpha(0) + J_{i2}(t)\beta(0) +$$

$$+ \sum_{j=1,2,3} I_{ij}(t)\omega_j(0) + m_i(t) + M''_i \quad (1.5)$$

$$m_{ik} = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2; \quad m_{30} = 0$$

где α – угол атаки, β – угол скольжения крыла, интегральные ядра $I_{ij}(t), J_{ik}(t)$ – непрерывно дифференцируемые, а моменты $m_i(t)$, вызванные малыми возмущениями скорости потока, – непрерывные ограниченные функции, удовлетворяющие

оценкам

$$\begin{aligned} |I_{ik}(t)|, |J_{ik}(t)|, |\dot{I}_{ik}(t)|, |\dot{J}_{ik}(t)|, |m_i(t)| &\leq C_2 \exp(-\alpha_2 t) \\ \alpha_2, C_2 &= \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Нелинейные интегральные члены, входящие в M_i'' , содержат лишь интегральные ядра, экспоненциально стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Примем, что

$$\alpha = \vartheta + \alpha_0, \quad \beta = \psi, \quad \alpha_0 = \text{const}$$

или что

$$\alpha = \beta_1 + \alpha_0, \quad \beta = -\gamma_1 \quad (1.7)$$

Можно считать, что постоянные и интегральные ядра в (1.5) первоначально рассчитаны для зависимостей вида (1.7), так что будем полагать в формулах (1.5) α и β выраженными через β_1, γ_1 согласно (1.7). При этом можно также считать, что нелинейные члены зависимостей α и β от $\beta_1^0, \beta_3^0, \gamma_1^0$ отнесены к членам M_i'' в (1.5).

Будем полагать, что постоянные $\beta_1^0, \beta_3^0, \gamma_1^0$ в (1.3) при заданных l_i выбраны так, что в отсутствие интегральных (вязкоупругих) и нелинейных членов в (1.3) и интегральных членов в аэродинамических моментах (1.5) упругие силы удерживают покоящуюся пластину в положении, при котором $\varphi = \psi = \vartheta = 0$.

Положим

$$\omega_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \beta_1 = x_4, \quad \gamma_1 = x_5, \quad \beta_3 = x_6$$

Запишем уравнения (1.2), преобразовав интегральные члены в формуле (1.5), в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + \phi(t) + X'(x) + Y'(x) \\ \dot{x}'' &= Jx' + X''(x) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$x = \text{col}(x_1, \dots, x_6), \quad x' = \text{col}(x_1, x_2, x_3), \quad x'' = \text{col}(x_4, x_5, x_6), \quad \phi(t) = \text{col}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

$$X' = \text{col}(X'_1, X'_2, X'_3), \quad X'' = \text{col}(X''_1, X''_2, X''_3), \quad Y' = \text{col}(Y'_1, Y'_2, Y'_3)$$

где $A = \|a_{ij}\|$ и $J = \|J_{ik}\|$ – постоянные матрицы размера 3×6 и 3×3 соответственно, причем отличные от нуля элементы матрицы J составляют диагональ $J_{13} = 1, J_{22} = -1, J_{31} = -1$; $K(t) = \|K_{ij}(t)\|$ – непрерывная матрица, элементы которой ввиду (1.4), (1.6) экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, функции X', X'' содержат нелинейные члены соответствующих уравнений (1.2), функционал Y' содержит нелинейные члены интегральных представлений (1.3), (1.5), $\phi(t)$ – непрерывная экспоненциально стремящаяся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция. Элементы матриц $A, K(t)$, например для первого уравнения (1.8), а также функция $\phi_1(t)$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{m_{ij+2} + I_{ij}(0)}{A_1} \\ a_{14} &= \frac{m_{11} + J_{11}(0)}{A_1}, \quad a_{15} = -\frac{m_{12} + J_{12}(0)}{A_1}, \quad a_{16} = \frac{l_{13} - mgy_0}{A_1} \\ K_{ij}(t) &= \frac{\dot{I}_{ij}(t)}{A_1}, \quad K_{14}(t) = \frac{\dot{J}_{11}(t)}{A_1}, \quad K_{15}(t) = -\frac{\dot{J}_{12}(t)}{A_1}, \quad K_{16}(t) = \frac{\dot{L}_{13}(t)}{A_1} \\ \phi_1(t) &= \frac{1}{A_1} \left(m_1(t) + \beta_3^0 \int_{+\infty}^t L_{13}(s)ds + \alpha_0 J_{11}(t) \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выражения для a_{ps} , $K_{ps}(t)$, $\phi_p(t)$ ($p = 2, 3$) подобны (1.9) и легко следуют из (1.2). Функции $X'_i(x)$, $X''_i(x)$ в уравнениях (1.8) определяются формулами

$$X'_1 = ((A_2 - A_3)x_2x_3 + mgz_0B_2(x''))/A_1, \quad X''_1 = -x_2x_3 + x_3B_2(x'') \quad (1.10)$$

и аналогичными выражениями при $i = 2, 3$.

Уравнениям (1.8), (1.9) отвечает характеристическое уравнение

$$\det(A'_2 + K_2^*(\lambda) - \lambda^2 J^T + \lambda(A'_1 + K_1^*(\lambda))J^T) = 0 \quad (1.11)$$

в котором

$$A'_1 = \|a_{ik}\|, \quad A'_2 = \|a_{ik+3}\|, \quad K_1^*(\lambda) = \|K_{ik}^*(\lambda)\|, \quad K_2^*(\lambda) = \|K_{ik+3}^*(\lambda)\|$$

$$K_{ij}^*(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) K_{ij}(s) ds, \quad i, k = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 6$$

Будем полагать возмущения, связанные с вязкоупругими свойствами материала и нестационарностью обтекания (в частности, порывами ветра), малыми, т.е. в уравнениях (1.8)–(1.10) будем полагать

$$L'_i(t) = \mu \tilde{L}_i(t), \quad I_{ij}(t) = \mu \tilde{I}_{ij}(t), \quad J_{ij}(t) = \mu \tilde{J}_{ij}(t), \quad m_i(t) = \mu \tilde{m}_i(t)$$

$$|\tilde{L}_{ij}(t)|, |\tilde{J}'_{ij}(t)|, |\tilde{m}_i(t)| < \text{const} \quad \text{при } t \geq 0$$

где μ ($0 < \mu \ll 1$) – малый параметр. Тогда в уравнениях (1.8) функция $\phi(t)$ будет содержать множителем параметр μ .

Рассмотрим уравнения (1.8)–(1.10), в которых функции $\phi_i(t)$ будем считать постоянно действующими возмущениями. Пусть все корни λ'_s уравнения (1.11) в области его определения, задаваемой ввиду (1.4), (1.6) неравенством $\text{Re } \lambda \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2)$, таковы, что $\text{Re } \lambda'_s \leq l < 0$ для некоторого l . Тогда резольвента линеаризованного уравнения (1.8) стремится к нулю и допускает экспоненциальную оценку. Следовательно, применима теорема [6] об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, согласно которой общее решение уравнений (1.8) в некоторой окрестности точки $x_i = 0$, ($i = 1, \dots, 6$) представляется абсолютно сходящимися степенными рядами по начальным значениям $x_{0i} = x_i(0)$ переменных x_i и параметра μ с экспоненциально стремящимися к нулю при $t \rightarrow +\infty$ коэффициентами. Точка $x_i = 0$ устойчива при постоянно действующих возмущениях. Всякое решение уравнений (1.8), для которого $|x_{0i}| < \delta$ ($i = 1, \dots, 6$), $\mu < \delta$ при некотором $\delta > 0$, асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

2. Определение постоянной Ляпунова g_2 в критическом случае. Остановимся на анализе устойчивости в критическом случае одного нулевого корня и рассмотрим вращательные движения крыла, что позволяет получить явную формулу для постоянной Ляпунова. Будем следовать схеме вычисления этих постоянных, указанной ранее [7, 8].

Пусть вращение крыла происходит вокруг продольной оси его эллипсоида инерции для точки O . Тогда при условиях, что $\alpha_0 = 0$, в опорах действуют только упругие силы, а момент аэродинамических сил не содержит членов, связанных с возмущениями набегающего потока, уравнения (1.8) приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \sum_{j=3,4} \left(a_{3j}x_j + \int_0^t K_{3j}(t-s)x_j(s)ds \right) + F_3 \\ \dot{x}_4 &= x_3 + F_4 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$a_{33} = \frac{1}{A_3}(m_{35} + I_{33}), \quad a_{34} = \frac{1}{A_3}(mgy_0 + l_3 + m_{31} + J_{31}(0)) \quad (2.2)$$

$$K_{33}(t) = \frac{\dot{I}_{33}(t)}{A_3}, \quad K_{34}(t) = \frac{\dot{J}_{31}(t)}{A_3}$$

$$F_3 = \frac{mgx_0}{2A_3}x_4^2 + F' + F'' + \dots, \quad F_4 = -\frac{1}{2}x_3x_4^2 + \dots$$

Функции $K_{3j}(s)$ обладают свойством $K_{3j}(t) \in e_1(-\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$, т.е. удовлетворяют неравенству

$$|K_{3j}(t)| < C \exp(-\gamma t), \quad C = \text{const} > 0$$

В уравнениях (2.1), (2.2) выделены квадратичные интегральные члены F' и члены третьей степени F'' , которые будут детализированы в разд. 3 при определении постоянной g_3 . Предполагается, что выражения для моментов аэродинамических сил содержат соответствующие члены. После преобразования интегральных членов функционал F' , от которого зависит постоянная Ляпунова g_2 , представляется в виде

$$F' = F'_{33} + F'_{34} + F'_{44} \quad (2.3)$$

$$F'_{sp} = \int_0^t \int_0^t K'_{sp}(t-s_1, t-s_2)x_s(s_1)x_p(s_2)ds_1ds_2, \quad s, p = 3, 4$$

где интегральные ядра $K'_{sp}(s_1, s_2)$ считаются непрерывными при $0 \leq s_i \leq t < +\infty$ ($i = 1, 2$) и обладающими свойством

$$|K'_{sp}(s_1, s_2)| \leq C \exp(-\alpha'_1 s_1 - \alpha'_2 s_2), \quad C, \alpha'_1, \alpha'_2 = \text{const} > 0$$

Будем считать выполненными условия теоремы 1.1, сформулированной в [9]. Она сохраняет справедливость и при наличии в правых частях уравнений интегральных членов вида (2.3) с ядрами рассматриваемого ниже типа, как это отмечено в [8].

Пусть характеристическое уравнение для системы (2.1)

$$\Phi(\lambda) \equiv \lambda^2 - \lambda(a_{33} + K_{33}^*(\lambda)) - a_{34} - K_{34}^*(\lambda) = 0 \quad (2.4)$$

имеет в области его определения конечное число корней λ'_i ($i = 1, \dots, L$), причем $\lambda'_L = 0$ и $\lambda'_{L-1} < 0$, а остальные корни λ'_s , занумерованные в порядке возрастания вещественных частей, таковы, что $\text{Re} \lambda'_s > -\gamma$ ($s = 1, \dots, L-2$, $0 < \gamma < \alpha_2$). Тогда для уравнения (2.1) должно выполняться условие

$$a_{34} = -K_{34}^*(0)$$

Указанное равенство, которое согласно соотношениям (2.2) можно переписать в виде

$$mgy_0 - l + m_{31} = 0, \quad l = -l_3 > 0 \quad (2.5)$$

накладывает условие на расположение центра давления крыла. Пусть s – расстояние от оси Oz_1 до центра давления C (при $\alpha = 0$), R – величина нормальной составляющей главного вектора аэродинамических сил, приложенная в этом центре (фигура). Тогда, ограничиваясь линейной стационарной частью силы R , можно записать ее момент в виде

$$M = m_{31}\alpha \equiv c\kappa(\rho V^2/2)\alpha, \quad \kappa = \text{const}$$

где $\rho V^2/2$ – скоростной напор. Следовательно, соотношение (2.5) будет удовлетворено, если

$$c = (l - mgy_0)(\kappa \rho V^2/2)^{-1}$$

Запишем общее решение линеаризованного уравнения (2.1) в виде [10]

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{col}(x_3(t), x_4(t)) = \\ &= X(t)x(0) \equiv \left(\frac{\Phi_1(0)}{\Phi'(0)} + \frac{\Phi_1(\lambda_1)}{\Phi'(\lambda_1)} \exp(\lambda_1 t) + \hat{X}(t) \right) x(0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\lambda_1 = \lambda'_{L-1}, \quad X(t) = \|x_{ij}(t)\|, \quad X(0) = E_2, \quad \hat{X}(t) \in e_1(-\lambda_0)(\lambda_0 > -\lambda_1)$$

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -K_{34}^*(0) + K_{34}^*(\lambda) \\ 1 & \lambda - a_{33} - K_{33}^*(\lambda) \end{vmatrix}, \quad \Phi'(\lambda) = \frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda}$$

Пусть $X'(t) = (x'_{ij}(t))$ ($i, j = 1, 2$) – нормальная по Ляпунову фундаментальная матрица линеаризованной системы (2.1).

Введем матрицу $Y'(t) = \|y'_{ij}(t)\|$ ($i, j = 1, 2$), такую, что $Y'(t)X'(t) = E_2$, и, следуя схеме вычисления постоянной Ляпунова g_2 [7, 8], произведем замену переменной x_3 , полагая

$$y = y'_{11}(t)x_3 + y'_{12}(t)x_4 \quad (2.7)$$

при условии, что $y'_{11}(t) \neq 0$ при $t \geq 0$. В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y'_{11}(t)F_3(x_3, x_4) + y'_{12}(t)F_4(x_3, x_4) + \\ &+ \int_0^t [\varphi_1(t, s)F_3(x_3(s), x_4(s)) + \varphi_2(t, s)F_4(x_3(s), x_4(s))] ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(t, s) &= \frac{\partial}{\partial t} (y'_{11}(t)x_{1j}(t-s) + y'_{12}(t)x_{2j}(t-s)) \\ \dot{x}_4 &= (y - y'_{12}(t)x_4) / y'_{11}(t) + F_4(x_3, x_4) \end{aligned} \quad (2.9)$$

в которых величина x_3 выражена через y , x_4 согласно соотношению (2.7).

Далее преобразуем уравнение (2.9) с помощью замены

$$z = \exp(\lambda_1 t)x_4 / x'_{22}(t) \quad (2.10)$$

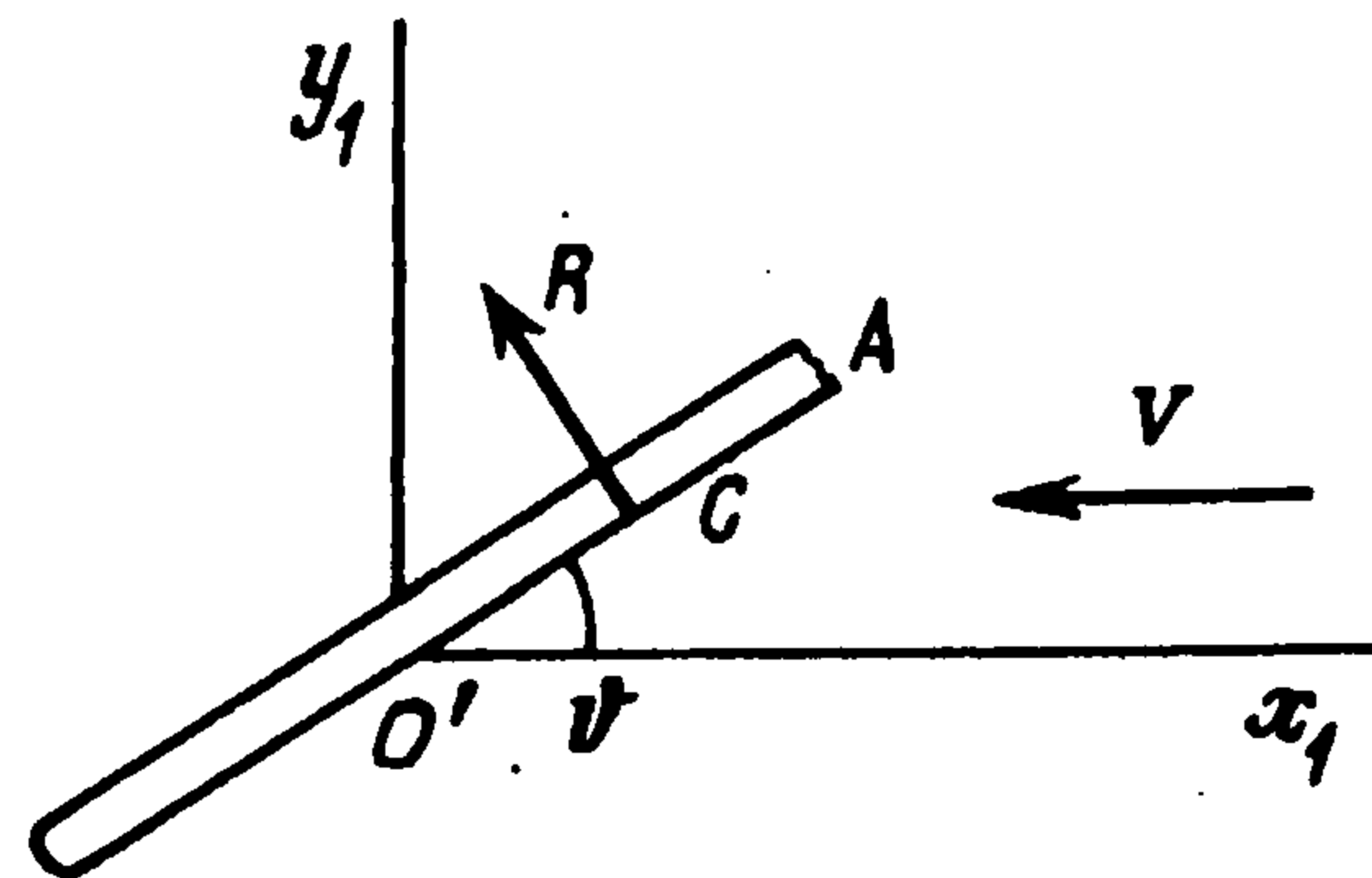
В результате уравнение (2.9) для некритической переменной перейдет в уравнение

$$\dot{z} = \lambda_1 z + \frac{\exp(\lambda_1 t)}{x'_{22}(t)} \left(\frac{y}{y'_{11}(t)} + F'_4(y, z, t) \right) \quad (2.11)$$

с ограниченными при $t \geq 0$ коэффициентами. В уравнении (2.11) $F'_4(y, z, t)$ – преобразованные к переменным y, z нелинейные члены $F_4(x_3, x_4)$.

Исключим из уравнения (2.11) линейный по y член, для чего сделаем преобразование переменной z

$$v = z + u_1(t)y, \quad u_1(t) = -\exp(\lambda_1 t) \int_0^t \frac{ds}{x'_{22}(s)y'_{11}(s)} \quad (2.12)$$



в котором непрерывная ограниченная функция $u_1(t)$ может быть представлена как

$$u_1(t) = u_0 + \tilde{u}_1(t), \quad u_0 = -\frac{\lambda_1 \Phi'(\lambda_1)}{l_1^2 \Phi'(0)}, \quad l_1 = \lambda_1 - K_{33}^*(\lambda_1) + K_{33}^*(0) \quad (2.13)$$

где функция $\tilde{u}_1(t) \in e_1(-\alpha_0)$ для некоторого $\alpha_0 > 0$.

Принимая во внимание соотношения (2.10), (2.12), определим (с точностью до аддитивной функции, стремящейся к нулю при $t \rightarrow +\infty$) в уравнении (2.8) коэффициент при u^2 , который обозначим через $g_2'(t)$. Имеем

$$g_2'(t) = \left(y_{11}'(t) + \int_0^t \varphi_1(t, s) ds \right) \left(\frac{mgx_0}{2A_3} (x_{22}'(t) \exp(-\lambda_1 t))^2 u_1^2(t) + \tilde{F}(t) \right) \quad (2.14)$$

где $\tilde{F}(t)$ – функция, порожденная интегральными членами F' (2.3), которая будет уточнена ниже.

Исходя из соотношения (2.14), получим постоянную Ляпунова $g_2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} g_2'(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Вычислим постоянные φ_1^0, y_{11}^0 , входящие в представление функций

$$\int_0^t \varphi_j(t, s) ds = \varphi_j^0 + \tilde{\varphi}_j(t), \quad y_{1j}'(t) = y_{1j}^0 + \tilde{y}_{1j}(t) \quad (2.15)$$

$$\tilde{\varphi}_j(t), \tilde{y}_{1j}(t) \in e_1(-\alpha_0), \quad j = 1, 2$$

На основании формул (2.8), (2.6), учитывая, что $x_{11}(0) = 1, x_{21}(0) = 0$, получаем

$$\varphi_1^0 = \frac{\Phi'(0)}{\lambda_1^2} \left(l_1 + \frac{\lambda_1^2}{\Phi'(0)} \right), \quad y_{11}^0 = -\frac{l_1}{\lambda_1^2} \Phi'(0) \quad (2.16)$$

Примем в дальнейшем следующее предположение о структуре интегральных ядер в формулах (2.3):

$$K'_{sp}(t-s_1, t-s_2) = K_{sp}^{(1)}(t-s_1) K_{sp}^{(2)}(t-s_2)$$

Пусть в (2.3) $F_{sp}^0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} F'_{sp}$ при $t \rightarrow +\infty$. Проведя соответствующие вычисления, получим

$$F_{sp}^0 = \frac{k_{sp}^{(1)} k_{sp}^{(2)}}{(\Phi'(0))^2} (l_1 - \lambda_1)^{8-s-p} \left(-\frac{\lambda_1}{l_1} \right)^{10-s-p} \quad (2.17)$$

$$k_{sp}^{(i)} = \int_0^\infty K_{sp}^{(i)}(s) ds, \quad i = 1, 2; \quad s, p = 3, 4$$

Окончательно для постоянной Ляпунова согласно соотношениям (2.14) – (2.17) имеем выражение

$$g_2 = \frac{mgx_0}{2A_3 l_1^2} \frac{\lambda_1^2}{(\Phi'(0))^2} + F_{33}^0 + F_{34}^0 + F_{44}^0 \quad (2.18)$$

Таким образом, на основании теоремы о неустойчивости [8,9], если $g_2 \neq 0$, то рассматриваемое положение равновесия неустойчиво.

В частном случае, когда отсутствуют интегральные квадратичные члены (2.3) в аэродинамических моментах, формула (2.18) приводит к условию неустойчивости

$x_0 \neq 0$. Представляет интерес исследовать случай $g_2 = 0$. Тогда устойчивость положения равновесия зависит от знака постоянной g_3 , определяемой членами правых частей уравнений до третьего порядка включительно.

3. Определение постоянной Ляпунова g_3 . Пусть $g_2 = 0$. Остановимся на стационарной части момента аэродинамических сил. Будем считать крыло прямоугольным и обозначим через S расстояние от передней кромки крыла A до центра давления C и через d – хорду крыла. Сечение крыла плоскостью, ортогональной оси Oz_1 и проходящей через C , схематически изображено на фигуре, где O' – точка пересечения Oz_1 с этой плоскостью. На основании результатов проведенных ранее исследований [11] в области малых изменений угла атаки α можно принять приближенно для S и величины силы нормального давления R зависимости

$$S = d(s_0 + s_2\alpha^2), \quad R = r_1\alpha - r_3\alpha^3$$

$$(s_0, s_2r_1, r_3 = \text{const} > 0)$$

что дает для стационарной части M' момента аэродинамических сил, зависящей от α , с точностью до членов третьего порядка малости выражение

$$M' = m'_{31}\alpha + m'\alpha^3 \quad (3.1)$$

$$m'_{31} = ds_0r_1 > 0, \quad m' = -(cr_3 + ds_2r_1), \quad c = O'A - ds_0$$

Принимая во внимание представление (3.1), будем рассматривать следующую модель момента аэродинамических сил, действующих на крыло, считая, ради простоты изложения, что нестационарность обтекания учитывается только членами первого порядка. Будем полагать, что момент M_3 аэродинамических сил задается по аналогии с формулой (1.2), полученной после преобразования, следующим соотношением

$$M_3 / A_3 = m'_{31}\alpha + m'_{35}\omega_3 + m'\alpha^3 + m''\omega_3^3 +$$

$$+ \int_0^t K'_{33}(t-s)\omega_3(s)ds + \int_0^t K'_{31}(t-s)\alpha^{(1)}(s)ds \quad (3.2)$$

в котором добавлен диссипативный член $m'_{35}\omega_3$, а также член, содержащий ω_3^3 . Угол атаки α , рассчитываемый для передней кромки крыла как угол между вектором относительной скорости набегающего потока и плоскостью крыла, определяется формулой (V – модуль абсолютной скорости потока)

$$\text{tg } \alpha = (\beta_1 - (a/V)\omega_3) / \sqrt{1 - \beta_1^2}$$

что дает разложение

$$\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(3)} + \dots \quad (3.3)$$

$$\alpha^{(1)}(\omega_3, \beta_1) = \beta_1 - \frac{a}{V}\omega_3, \quad \alpha^{(3)}(\omega_3, \beta_3) = \frac{1}{2}\beta_1^2\alpha^{(1)} - \frac{1}{3}(\alpha^{(1)})^3$$

В результате в рассматриваемом случае будем иметь уравнения (2.1), в которых согласно (3.2)

$$a_{33} = m'_{35} - (a/V)m'_{31}, \quad a_{34} = m'_{31} + (mgz_0 - l)/A_3$$

$$K_{33}(t) = K'_{33}(t) - (a/V)K'_{31}(t), \quad K_{34}(t) = K'_{31}(t) \quad (3.4)$$

$$F''(x_3, s_4) = m'_{31}\alpha^{(3)}(x_3, x_4) + m'(\alpha^{(1)}(x_3, x_4))^3 + m''x_3^3$$

С точностью до аддитивной функции класса $e_1(-\alpha_0)$ ($\alpha_0 > 0$) коэффициент при

члене, содержащем y^3 , в уравнении для критической переменной можно записать с учетом условия $g_2 = 0$ таким образом:

$$g'_3(t) = \left(y'_{11}(t) + \int_0^t \varphi_1(t, s) ds \right) F''(\hat{x}_3(t), \hat{x}_4(t)) - \\ - \frac{1}{2} \left(y'_{12}(t) + \int_0^t \varphi_2(t, s) ds \right) \hat{x}_3(t) \hat{x}_4^2(t) \quad (3.5)$$

где

$$\hat{x}_3(t) = (1 + u_1(t) y'_{12}(t) x'_{22}(t) \exp(\lambda_1 t)) (y'_{11}(t))^{-1} \\ \hat{x}_4(t) = -u_1(t) x'_{22}(t) \exp(\lambda_1 t) \quad (3.6)$$

Представим функции (3.6) в виде

$$\hat{x}_i(t) = x_i^0 + \tilde{x}_i(t), \quad \tilde{x}_i(t) \in e_1(-\alpha_0), \quad \alpha_0 > 0$$

и вычислим постоянные x_i^0 , а также постоянные y_{12}^0, φ_2^0 , введенные в (2.15). Имеем

$$x_3^0 = -\frac{\lambda_1^2}{l_1 \Phi'(0)} \left(1 - \frac{\lambda_1}{l_1} \right), \quad x_4^0 = \frac{\lambda_1}{l_1 \Phi'(0)} \\ y_{12}^0 = \Phi'(0), \quad \varphi_2^0 = -\Phi'(0) \quad (3.7)$$

Выделив из $g'_3(t)$ постоянный член, найдем $g_3 = F''(x_3^0, x_4^0)$ и на основании (3.4) – (3.7), (2.16) получим выражение

$$g_3 = \left(\frac{\lambda_1}{l_1 \Phi'(0)} \right)^3 \left\{ m'_{31} \left(1 + \frac{a}{V} L \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{V} L \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + m' \left(1 + \frac{a}{V} L \right)^3 - m'' L^3 \right\} \quad (3.8)$$

в котором согласно (3.4), (2.4)

$$\Phi'(0) = -m'_{35} + \frac{a}{V} m'_{31} + \int_0^\infty (-K_{33}(s) ds + s K_{34}(s)) ds$$

$$L = \lambda_1 [1 - \lambda_1 (\lambda_1 - K_{33}^*(\lambda_1) + K_{33}^*(0))^{-1}]$$

Если $g_3 > 0$, то равновесие неустойчиво. Если $g_3 < 0$ и интегральные ядра в уравнении (2.1) имеют экспоненциально-полиномиальную структуру, то равновесие асимптотически устойчиво [9].

При отсутствии интегральных членов, учитывающих нестационарность обтекания, имеем $l_1 = \lambda_1, L = 0$, и формула (3.8) принимает вид

$$g_3 = \frac{1}{(\Phi'(0))^3} \left(\frac{1}{6} m'_{31} + m' \right) \quad (3.9)$$

Постоянная g_3 (3.9) совпадает с аналогичной постоянной, определенной на основании теории критических случаев Ляпунова для дифференциальных уравнений.

Учитывая диссипативный характер члена $m'_{35} \omega_3$ в формуле (3.2) и интерпретацию коэффициента m'_{31} , данную в (3.1), можно заключить, что в (3.9) величина $\Phi'(0) > 0$.

Тогда из (3.9) следует, что асимптотическая устойчивость будет иметь место при $m' < -m'_{31} / 6$.

Влияние нестационарности обтекания на устойчивость окажется существенным, если постоянная g_3 (3.9) близка к нулю.

Отметим, что постоянная g_3 изменится, если изменятся приложенные силы и, в частности, если в качестве момента упругих сил взять, например, величину, линейную по ϑ , в отличие от принятого в разд. 2 и 3 момента этих сил, линейного по $\beta_1 = \sin \vartheta$.

Автор благодарит В.А. Самсонова за рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785, 00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover, 1959. = *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Fréchet M.* Sur les fonctionelles continues // Ann. l'Ecole Normale Sup. 1910. Sér. 3. T. 27. P. 193–216.
3. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
4. *Астапов И.С., Белоцерковский А.С., Морозов В.И.* Нелинейные интегродифференциальные уравнения аэроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. N 6. С. 61–70.
5. *Морозов В.И.* Математические модели динамики аэроупругого летательного аппарата // Исследования авиационной техники с использованием ЭВМ: Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1981. Вып. 1310. С. 39–51.
6. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в некоторых случаях // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 98–105.
7. *Сергеев В.С.* О неустойчивости нулевого решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. N 8. С. 1443–1454.
8. *Сергеев В.С.* О неустойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в одном случае // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1988. С. 67–81.
9. *Сергеев В.С.* Об устойчивости в некоторых критических случаях для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра // Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф, 1998. С. 128–137.
10. *Jordan G.S., Wheeler R.L.* Structure of resolvents of Volterra integral and integrodifferential systems // SIAM Journal Math. Anal. 1980. V. 11. N 1. P. 119–132.
11. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.

Москва

Поступила в редакцию
15.X.1999