

УДК 531.36: 62–50

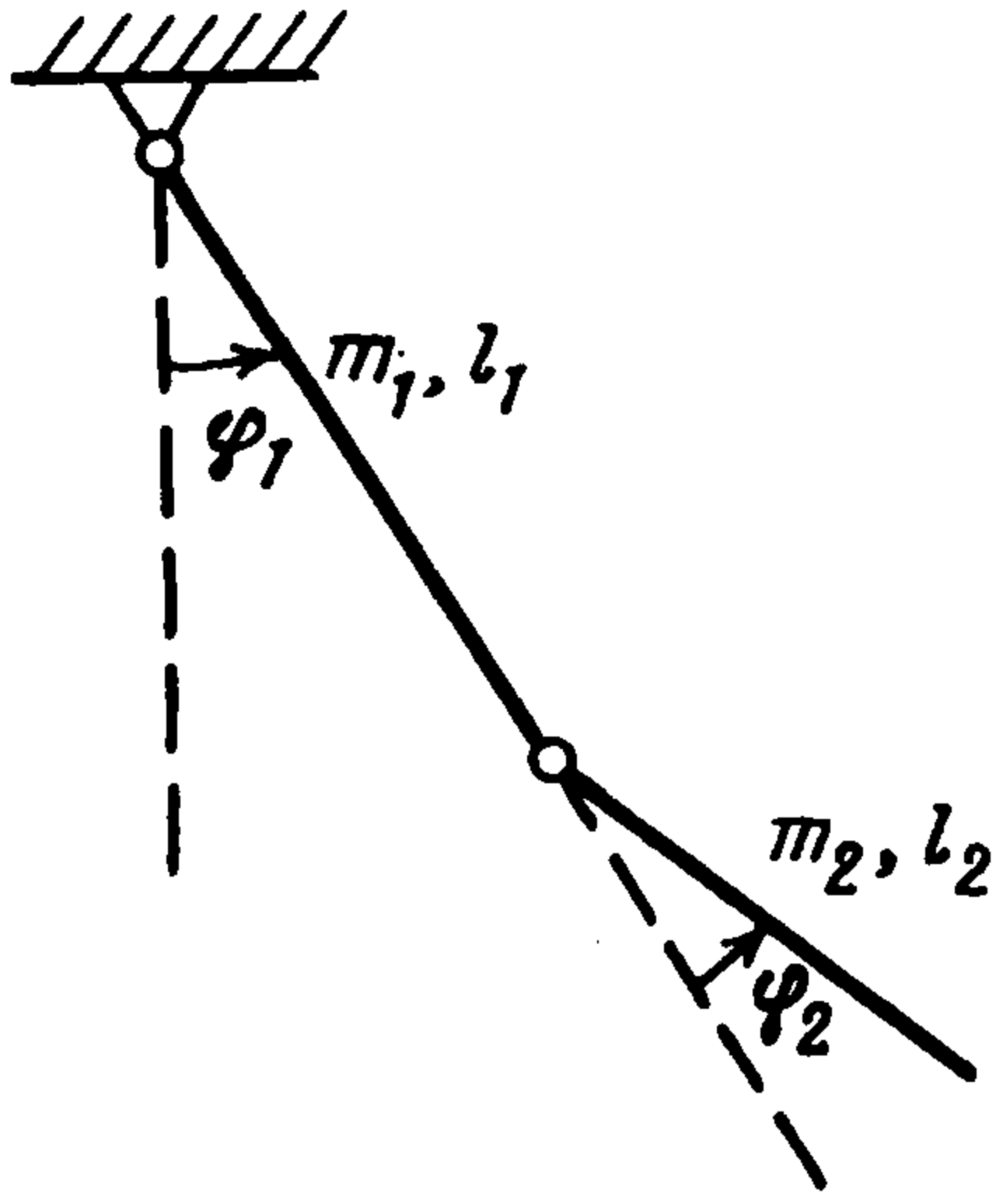
© 2000 г. Ю.Ф. Голубев, Р.З. Хайруллин

К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАСКАЧИВАНИЯ ДВУЗВЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Решаются задачи оптимального управления плоским двухзвенным маятником, звенья которого – однородные тонкие стержни (материальные отрезки). Управляющей переменной служит либо угловая скорость вращения второго звена относительно первого (задача 1), либо угол между звеньями маятника (задача 2). Предполагается, что в начальный момент времени заданы угол отклонения первого звена (он предполагается положительным), угол между звеньями, а также кинетический момент системы относительно точки подвеса (он полагается равным нулю). Требуется минимизировать (максимизировать по абсолютной величине) значение угла отклонения первого звена от вертикали в момент времени, когда кинетический момент обратится в нуль впервые после начала движения. В задаче 1 на абсолютную величину управляющей функции налагается ограничение. С использованием принципа максимума Понтрягина показано, что оптимальное управление состоит из чередующихся неособых и особых участков. Исследовано поведение оптимального управления в зависимости от максимально допустимого значения угловой скорости относительного вращения звеньев. Задача 2 решается в отсутствие ограничения при помощи методов вариационного исчисления. Здесь также возникает краевая задача, эквивалентная краевой задаче принципа максимума для случая, когда управление входит в правые части дифференциальных уравнений движения вместе со своей производной и на нее не налагаются ограничения. Предлагается численный алгоритм решения краевой задачи. Приводится пример построения оптимального управления для маятника с конкретными параметрами. Показано, что угол между звеньями при оптимальном движении изменяется непрерывно всюду, за исключением моментов начала и окончания процесса управления. В отмеченные моменты времени этот угол изменяется скачком.

Одной из причин, затрудняющих эффективное исследование колебательных механических систем, имеющих несколько степеней свободы, является высокая размерность соответствующей системы дифференциальных уравнений движения. Размерность системы уравнений может быть понижена, если в качестве управления выбрать одну из фазовых координат [1–3]. Однако при этом, как правило, происходит "расширение возможностей управления", и, как следствие, могут появиться качественно новые механические эффекты, новые виды оптимальных управлений, отсутствующие в исходной системе.

В настоящей работе на примере плоского двухзвенного физического маятника представлены результаты комплексного исследования исходной системы уравнений движения и соответствующей системы уравнений более низкого порядка. Первое звено маятника может совершать колебания вокруг неподвижной точки, а второе – относительно первого. Рассматриваются только колебательные режимы движения. Дается постановка и решение двух задач оптимального управления о максимальном отклонении первого звена от вертикали на одном полуцикле раскачивания маятника. В задаче 1 в качестве управляющей функции выбрана угловая скорость поворота второго звена относительно первого. Предполагается, что управление ограничено. Задача имеет единственное решение. Соответствующая оптимальная управляющая функция содержит чередующиеся участки неособого и особого управления.



Фиг. 1

В задаче 2 в качестве управления выбран угол поворота второго звена относительно первого. Эта задача является предельной для задачи 1 в случае, если в первой задаче угловая скорость второго звена может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине значения. Показано, что задача является многоэкстремальной и имеет бесконечное множество решений. Выявлены новые эффекты, присущие только задаче 2. Дается описание процесса непрерывного перехода от решения первой задачи к одному из решений второй задачи.

Разработанные алгоритмы решения краевых задач являются развитием результатов, полученных ранее [4].

Задача раскачивания двухзвенного маятника связана с задачей оптимизации спортивных движений гимнаста на перекладине. Задача представляет также теоретико-механический интерес. Анализ полученных результатов позволяет

лучше осмыслить проблему исследования и построения оптимальных колебательных режимов движения механических систем.

1. Задача оптимального управления угловой скоростью второго звена маятника.

Математическая модель движения. Рассмотрим плоский двухзвенный маятник (фиг. 1). Звенья – однородные стержни, имеющие длины l_1, l_2 и массы m_1, m_2 . В неподвижной точке O подвеса первого звена, а также между звеньями – одностепенные шарниры. Угол отклонения первого звена от вертикали обозначим φ_1 , а угол отклонения второго звена от линии продолжения первого звена обозначим φ_2 . Углы отсчитываются против хода часовой стрелки.

Кинетический момент K двухзвенного маятника относительно точки O может быть представлен в виде

$$K = A(\varphi_2)\dot{\varphi}_1 + B(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \quad (1.1)$$

где

$$A(\varphi_2) = a_0 + a_1 \cos \varphi_2, \quad B(\varphi_2) = b_0 + b_1 \cos \varphi_2 \quad (1.2)$$

$$a_0 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2, \quad a_1 = m_2 l_1 l_2, \quad b_0 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2, \quad b_1 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2$$

В качестве управляющей функции выберем угловую скорость поворота второго звена маятника относительно первого: $u = \dot{\varphi}_2(t)$. Управление будем считать ограниченным

$$|u| < c \quad (1.3)$$

Уравнения движения на интервале времени $0 \leq t \leq T$ в переменных $(K, \varphi_1, \varphi_2)$ имеют вид

$$\dot{K} = L(\varphi_1, \varphi_2), \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{K}{A(\varphi_2)} - C(\varphi_2)u, \quad \dot{\varphi}_2 = u \quad (1.4)$$

где

$$k_1 = -\frac{1}{2} m_1 l_1 g - m_2 l_1 g, \quad k_2 = -\frac{1}{2} m_2 l_2 g$$

$$L(\varphi_1, \varphi_2) = k_1 \sin \varphi_1 + k_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \quad C(\varphi_2) = \frac{B(\varphi_2)}{A(\varphi_2)}$$

Начальные условия предполагаются заданными

$$K(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_{10} > 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_{20} \quad (1.5)$$

Постановка задачи 1. Для системы уравнений (1.4) с начальными условиями (1.5) требуется построить управление $u(t)$, удовлетворяющее условию (1.3) и доставляющее на момент времени $t = T$, когда кинетический момент впервые при $t > 0$ станет равным нулю

$$F_1 = K(T) = 0 \quad (1.6)$$

максимальное отклонение от вертикали первого звена

$$F_0 = -\varphi_1(T) \rightarrow \max \quad (1.7)$$

Предполагается, что движение маятника на первом полуцикле раскачивания будет колебательным, и в некоторый момент времени $t = T > 0$ кинетический момент маятника обратится в нуль при некотором значении $\varphi_1(T) \in (-\pi, 0)$.

Необходимые условия экстремума. Для задачи (1.1) – (1.7) необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина [5] имеют вид ($\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$ – вектор сопряженных переменных)

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\lambda_2}{A(\varphi_2)}, \quad \dot{\lambda}_2 = -L(\varphi_1, \varphi_2)\lambda_1 \quad (1.8)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -k_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda_1 - \frac{a_1 K \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} \lambda_2 + u \frac{k_{01} \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} \lambda_2 \quad (k_{01} = a_1 b_0 - a_0 b_1)$$

$$\lambda_2(T) = -1, \quad \lambda_3(T) = 0, \quad H = H_0 + H_1 u \rightarrow \max, \quad H(T) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь

$$H_0 = \lambda_1 L(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_2 \frac{K}{A(\varphi_2)}, \quad H_1 = \lambda_3 - \lambda_2 C(\varphi_2) \quad (1.10)$$

Метод исследования задачи и результаты расчетов. Решение задачи осуществлялось в два этапа. На первом этапе для выявления структуры оптимального закона управления использовались модифицированный метод последовательной линеаризации и методы качественного анализа уравнений движения и условий оптимальности [4]. Установлено, что оптимальная управляющая функция при ($c > 2\pi c^{-1}$) содержит три участка движения с граничным управлением $u(t) = -c$ и два участка движения с внутренним (особым) управлением (фиг. 2, а).

На втором этапе для построения численного решения соответствующей краевой задачи принципа максимума использовался следующий алгоритм.

1°. Зададим некоторое значение t_1 и на отрезке времени $0 \leq t \leq t_1$ проинтегрируем основную систему уравнений (1.4) с управлением $u(t) = -c$.

2°. При $t = t_1$ зададим $\lambda_2(t_1) = -1$. Из условий $H_1(t_1) = 0$ (см. (1.10)) и $\dot{H}_1(t_1) = 0$ найдем $\lambda_3(t_1)$ и $\lambda_1(t_1)$. Здесь

$$\dot{H}_1 = \lambda_1 C(\varphi_2) M(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1 k_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \lambda_2 \frac{a_1 K \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} \quad (1.11)$$

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = k_1 \cos \varphi_1 + k_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

3°. Варьируя t_1 и последовательно реализуя шаги 1°, 2°, будем добиваться выполнения условия $H_0(t_1) = 0$ (см. (1.10)).

4°. Зададим некоторое значение t_2 и на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ проинтегрируем основную систему (1.4) совместно с сопряженной системой (1.8) с особым управлением [6], вычисленным из условия

$$\ddot{H}_1 = D_2 u + D_1 = 0 \quad (1.12)$$

где

$$D_1 = -k_1 C(\varphi_2) \left(\frac{\lambda_2 \cos \varphi_1}{A(\varphi_2)} + \frac{K\lambda_1 \sin \varphi_1}{A(\varphi_2)} \right) - \frac{a_1 \lambda_2 \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} (k_1 \sin \varphi_1 + k_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) +$$

$$+ \frac{a_1 K \lambda_1 \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} M(\varphi_1, \varphi_2) - k_2 \left(\frac{\lambda_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{A(\varphi_2)} + \frac{K\lambda_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{A(\varphi_2)} \right) (C(\varphi_2) - 1)$$

$$D_2 = \frac{\lambda_1 \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} k_{01} M(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_1 k_1 [C(\varphi_2)]^2 \sin \varphi_1 +$$

$$+ \lambda_1 k_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) C(\varphi_2) (C(\varphi_2) - 1)^2 - \frac{a_1 K \lambda_2}{[A(\varphi_2)]^3} (a_1 + a_1 \sin^2 \varphi_2 + a_0 \cos \varphi_2)$$

5°. Зададим некоторое значение t_3 и проинтегрируем на отрезке $t_2 \leq t \leq t_3$ основную и сопряженную систему с управлением $u(t) = -c$.

6°. Варьируя моменты времени t_2, t_3 и последовательно реализуя шаги 4°, 5°, будем добиваться выполнения условий $H_1(t_3) = 0, \dot{H}_1(t_3) = 0$.

7°. Зададим некоторое значение t_4 и на отрезке $t_3 \leq t \leq t_4$ проинтегрируем совместно основную и сопряженную систему с особым управлением, вычисленным из условия (1.12).

8°. Зададим некоторое значение T и проинтегрируем на отрезке $t_4 \leq t \leq T$ основную и сопряженную систему с управлением $u(t) = -c$.

9°. Варьируя моменты времени t_4, T и последовательно реализуя шаги 7°, 8°, будем добиваться выполнения условия (1.6) и второго условия (1.9).

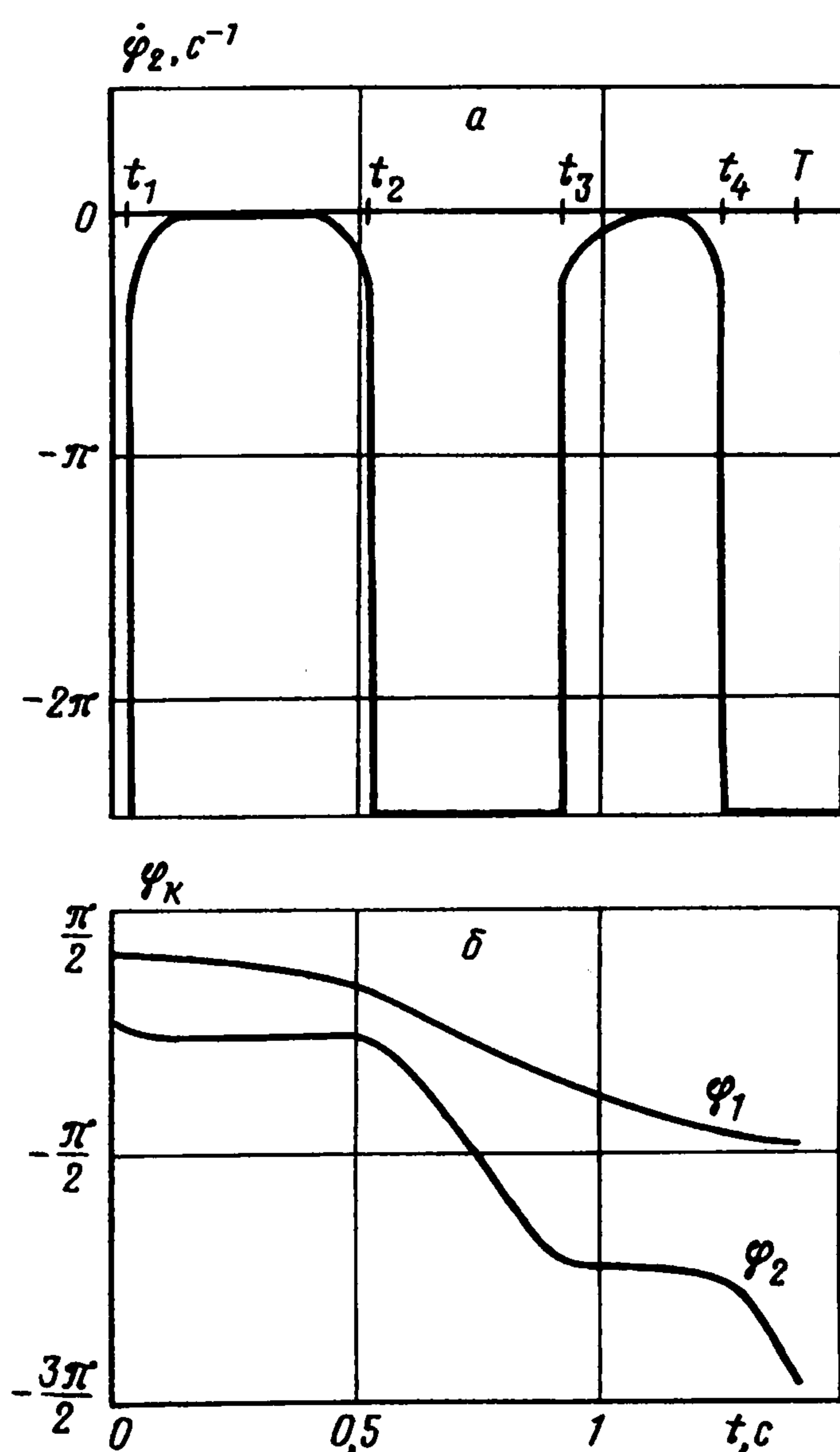
10°. На отрезке времени $0 \leq t \leq t_1$ в обратном времени проинтегрируем сопряженную систему с граничными условиями, вычисленными на шаге 2°, и управлением $u(t) = -c$. Построим вектор-функцию сопряженных переменных $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$ на всем участке движения $0 \leq t \leq T$.

11°. При $0 \leq t \leq T$ проверим выполнение последних двух условий (1.9) и условия Келли $D_2 > 0$ для особых управлений.

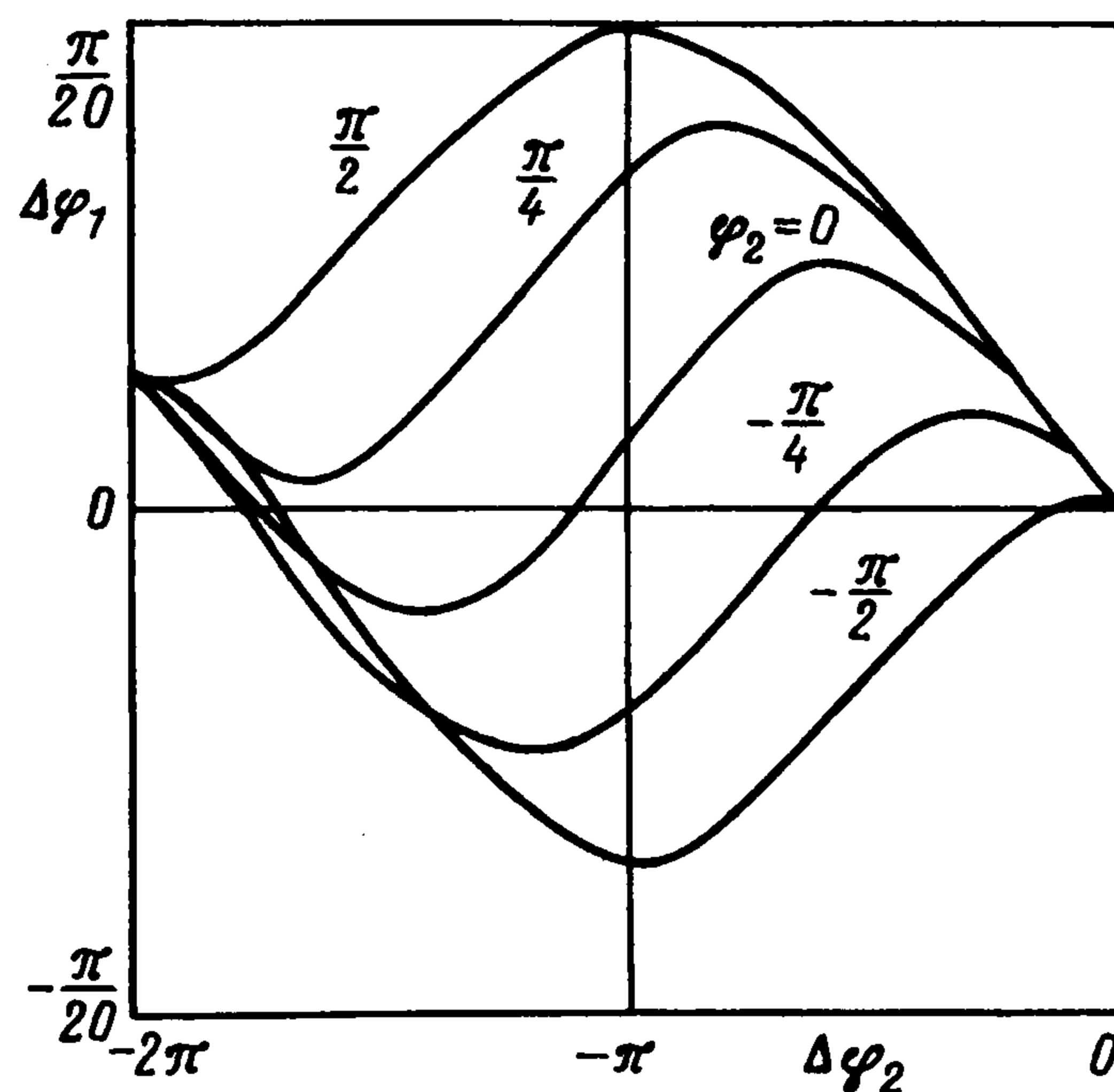
Отметим, что последнее условие (1.9) будет выполнено в силу шага 2°, а условие Келли и предпоследнее условие (1.9) будет выполнено лишь в том случае, если на первом этапе исследования задачи прямым методом [4] правильно установлена структура оптимального закона управления. Первое условие (1.9) можно обеспечить соответствующей нормировкой вектора $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$.

Результаты расчетов проиллюстрируем для модели со следующими параметрами: $l_1 = 2\text{ м}, l_2 = 0.4\text{ м}, m_1 = 10\text{ кг}, m_2 = 4\text{ кг}, \varphi_{10} = \pi/3, \varphi_{20} = 0$. Величина c варьировалась. Отметим, что для этих параметров функция $A(\varphi_2)$ (1.2) не обращается в нуль ни при каких значениях угла φ_2 . Вследствие этого, правая часть второго уравнения (1.4) – непрерывно дифференцируемая функция угла φ_2 .

Для $c = 2,5\pi\text{ с}^{-1}$ максимальное отклонение первого звена составляет $\varphi_1(T) = -1,318$. Оптимальное управление $u(t) = \varphi_2(t)$ изображено на фиг. 2, а, а соответствующие оптимальные зависимости $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – на фиг. 2, б. С ростом параметра c продолжительности каждого из участков с управлением $u(t) = -c$ уменьшаются, а продолжительности двух участков особого управления увеличиваются. При неограниченном увеличении параметра c оптимальная управляющая функция $u(t)$ стремится принять бесконечно большие по абсолютной величине значения в точках $t = 0$ и $t = T$ и достаточно большое, но конечное значение, приблизительно при $t \approx T/2$. На остальных участках движения управление изменяется плавно и близко к нулю.



Фиг. 2



Фиг. 3

Отметим, что если полностью снять ограничение (1.3) на угловую скорость поворота второго звена, то задача (1.1)–(1.7) станет эквивалентной рассмотренной ниже задаче оптимального управления углом поворота второго звена.

2. Задача оптимального управления углом поворота второго звена маятника. Математическая модель движения маятника при мгновенном изменении угла поворота второго звена. Примем, что движение маятника при мгновенном изменении положения второго звена происходит в соответствии с законом сохранения кинетического момента. Умножим левую и правую части выражения для кинетического момента (1.1) на dt и представим в виде $Kdt = A(\varphi_2)d\varphi_1 + B(\varphi_2)d\varphi_2$. Выразив отсюда $d\varphi_1$, и проинтегрировав на интервале времени от t до $t + \Delta t$, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$\Delta\varphi_1 = -k_3\Delta\varphi_2 - k_4 \left[\arctg\left(\frac{1}{k_5} \tg \frac{\varphi_2 + \Delta\varphi_2}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{k_5} \tg \frac{\varphi_2}{2}\right) \right] \quad (2.1)$$

$$k_3 = \frac{b_1}{a_1}, \quad k_4 = \frac{2k_{01}}{a_1\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}, \quad k_5 = \sqrt{\frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1}}$$

На интервале $-2\pi \leq \Delta\varphi_2 \leq 0$ зависимости $\Delta\varphi_1$ от $\Delta\varphi_2$ при разных значениях φ_2 приведены на фиг. 3. Функция $\Delta\varphi_1(\Delta\varphi_2)$ (2.1) достигает своих экстремальных значений в тех точках, для которых $B(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) = 0$. Отметим, что для рассматриваемой модели $B(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) = 0$ при $\varphi_2 + \Delta\varphi_2 = \pm 1,738 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Например, в начальный момент времени при $\varphi_2 = 0$ локальный максимум функции (2.1) $\Delta\varphi_1 = 0,078$ достигается при мгновенном повороте второго звена на угол $\Delta\varphi_2 = -1,738$. Следующий локальный

максимум функции $\Delta\varphi_1 = 0,121$ достигается при $\Delta\varphi_2 = -8,021$. Отметим, что при мгновенном повороте второго звена на угол $\Delta\varphi_2 = -2\pi$ скачок по углу φ_1 составляет $\Delta\varphi_1 = 0,043$. Аналогично рассчитываются локальные максимумы функции $\Delta\varphi_1(\Delta\varphi_2)$ в момент времени $t = T$.

Таким образом, путем "быстрого вращения второго звена" отклонение первого звена в любой момент времени $t \in [0, T]$ (в частности в начальный и конечный моменты времени) можно мгновенно сделать сколь угодно большим по абсолютной величине. Вследствие этого задача глобальной максимизации отклонения первого звена при управлении углом поворота второго звена на одном полуцикле раскачивания является вырожденной (многоэкстремальной). Однако для практического построения управлений, близких к оптимальным, интерес представляют такие движения маятника на отрезке времени $0 \leq t \leq T$, для которых при $t = T$ достигаются локально максимальные отклонения первого звена. В дальнейшем эти движения будем называть локальными экстремальными, или просто экстремальными. Естественно, что они должны удовлетворять соответствующим необходимым условиям оптимальности.

Отметим, что входящие в состав экстремалей скачки при $t = 0$, которые обеспечивают локально максимальные отклонения первого звена при управлении на всем участке движения $0 \leq t \leq T$, не совпадают с описанными выше локальными максимумами функции $\Delta\varphi_1(\Delta\varphi_2)$ (2.1) при $t = 0$.

Постановка задачи 2. Для системы дифференциальных уравнений (см. первые два уравнения (1.4)) с начальными условиями (1.5) требуется построить управляющую функцию $\varphi_2(t)$, доставляющую на момент времени $t = T$, когда кинетический момент K впервые при $t > 0$ станет равным нулю (1.6) максимальное отклонение первого звена маятника от вертикали (1.7).

Предполагается, что, как и в задаче (1.1) – (1.7), такой момент времени $t = T$ существует.

Отметим, что в задаче 2 в правые части дифференциальных уравнений движения входит как сама управляющая функция $\varphi_2(t)$, так и ее производная $\dot{\varphi}_2(t)$ [7].

Необходимые условия экстремума. Запишем функционал задачи

$$J = \int_0^T \lambda_1 (\dot{K} - k_1 \sin \varphi_1 - k_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) dt + \int_0^T \lambda_2 \left(\dot{\varphi}_1 - \frac{K}{A(\varphi_2)} + C(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 \right) dt - g_0 \varphi_1(T) + g_1 K(T) \quad (2.2)$$

где g_0, g_1 – постоянные, подлежащие определению.

Вариация функционала может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \delta J = & \lambda_1(T) \delta K(T) - \lambda_1(0) \delta k(0) - \int_0^T \dot{\lambda}_1 \delta K dt + \lambda_2(T) \delta \varphi_1(T) - \lambda_2(0) \delta \varphi_1(0) - \int_0^T \dot{\lambda}_2 \delta \varphi_1 dt + \\ & + \int_0^T \lambda_1 (-M(\varphi_1, \varphi_2) \delta \varphi_1 - k_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \delta \varphi_2) dt + \int_0^T \lambda_2 \left(-\frac{\delta K}{A(\varphi_2)} - \frac{K a_1 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} \right) dt + \\ & + \lambda_2(T) C(\varphi_2(T)) \delta \varphi_2(T) - \lambda_2(0) C(\varphi_2(0)) \delta \varphi_2(0) - \int_0^T \dot{\lambda}_2 C(\varphi_2) \delta \varphi_2 dt - g_0 \delta \varphi_1(T) + g_1 \delta K(T) + \\ & + \lambda_1(T) (\dot{K}(T) - k_1 \sin \varphi_1(T) - k_2 \sin(\varphi_1(T) + \varphi_2(T))) \delta T + \\ & + \lambda_2(T) \left(\dot{\varphi}_1(T) - \frac{K(T)}{A(\varphi_2(T))} + C(\varphi_2(T)) \dot{\varphi}_2(T) \right) \delta T - g_0 \dot{\varphi}_1(T) \delta T + g_1 \dot{K}(T) \delta T \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из условия $\delta J = 0$ получим необходимые условия экстремума. В процессе получения будем их сравнивать с соответствующими необходимыми условиями экстремума для задачи (1.1) – (1.7).

Приравнявая нулю коэффициенты при δK и $\delta \varphi_1$ в интегральных членах (2.3), найдем сопряженную систему уравнений. Она совпадает с первыми двумя уравнениями сопряженной системы (1.8).

Приравнявая нулю коэффициент при δT в терминальных членах (2.3), будем иметь

$$\dot{\varphi}_1(T)(\lambda_2(T) - g_0) + \dot{K}(T)(\lambda_1(T) + g_1) = 0$$

Поскольку в общем случае $\dot{\varphi}_1(T) \neq 0$ и $\dot{K}(T) \neq 0$, то отсюда следуют граничные условия для сопряженных переменных

$$\lambda_1(T) = -g_1, \quad \lambda_2(T) = g_0 \quad (2.4)$$

Приравнявая нулю коэффициент при $\delta \varphi_2$ в интегральных членах (2.3), получим

$$-\dot{\lambda}_2 C(\varphi_2) - k_2 \lambda_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{a_1 K \sin \varphi_2}{[A(\varphi_2)]^2} \lambda_2 = 0$$

После подстановки вместо $\dot{\lambda}_2$ правой части второго уравнения (1.8) получим уравнение для вычисления управления $\varphi_2(t)$, совпадающее с условием $\dot{H}_1 = 0$ (1.11). Таким образом, в случае оптимального управления углом φ_2 , функция переключения H_1 должна быть равной нулю на всем интервале движения $0 < t < T$, т.е. оптимальная управляющая функция должна быть особой [6] для задачи (1.1) – (1.7).

Условия трансверсальности при $t = 0$ имеют вид

$$\lambda_1(0)\delta K(0) = 0, \quad \lambda_2(0)\delta \varphi_1(0) = 0$$

Эти условия будут выполнены в силу первых двух условий (1.5).

Условия трансверсальности при $t = T$ имеют вид

$$(\lambda_1(T) + g_1)\delta K(T) = 0 \quad (\lambda_2(T) - g_0)\delta \varphi_1(T) = 0$$

Они будут выполнены в силу (2.4).

Рассмотрим теперь слагаемые

$$\lambda_2(T)C(\varphi_2(T))\delta \varphi_2(T) - \lambda_2(0)C(\varphi_2(0))\delta \varphi_2(0)$$

Из третьего условия (1.5) следует $\delta \varphi_2(0) = 0$. Следовательно, в общем случае, $C(\varphi_2(0))$ не должно быть равным нулю.

Значение $\varphi_2(T)$ не фиксировано, поэтому $\delta \varphi_2(T) \neq 0$. В силу (2.4) $\lambda_2(T) \neq 0$. Следовательно, в конечной точке должно выполняться условие $C(\varphi_2(T)) = 0$ или

$$B(\varphi_2(T)) = 0 \quad (2.5)$$

Отметим, что это условие вместе с (1.1) и (1.6) обеспечивают равенство $\dot{\varphi}_1(T) = 0$.

Поскольку время движения T не фиксировано, и вследствие этого $\delta T \neq 0$, то, приравнявая нулю коэффициент при δT в интегральных членах (2.3), получим условие трансверсальности по времени, которое с учетом (2.5) совпадает с четвертым условием (1.9).

Таким образом, необходимые условия оптимальности (2.4), (2.5) вместе с отмеченными выше необходимыми условиями экстремума задачи 1 определяют краевую задачу принципа максимума для задачи 2.

Алгоритмы построения экстремалей задачи. Результаты расчетов. На основе анализа результатов решения задачи (1.1) – (1.7) делается предположение, что оптимальные движения системы состоят из скачков в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ (рас-

считываемых неоднозначно) и участка непрерывного управления на интервале $0 + 0 < t < T - 0$ (рассчитываемого однозначно). Особый интерес для практики представляют экстремали с ограниченными по величине скачками при $t = 0$ и $t = T$.

Построение экстремалей, являющихся решением краевой задачи, осуществлялось в два этапа. На первом этапе проводилась приближенная оценка параметров $\lambda_2(0)$ и T . На втором этапе решалась двухпараметрическая краевая задача с параметрами $\lambda_2(0)$, T и строилась экстремаль, удовлетворяющая необходимым условиям экстремума.

Опишем алгоритм, используемый на первом этапе решения краевой задачи.

1.1°. В момент времени $t = 0$ скачком изменим угол φ_2 на такую величину, чтобы с учетом (2.1) выполнилось условие $\dot{H}_1 = 0$ (1.11). (Наименьшее по абсолютной величине значение $\Delta\varphi_2 = -0,191$. При этом угол φ_1 мгновенно увеличится на величину $\Delta\varphi_1 = 0,013$).

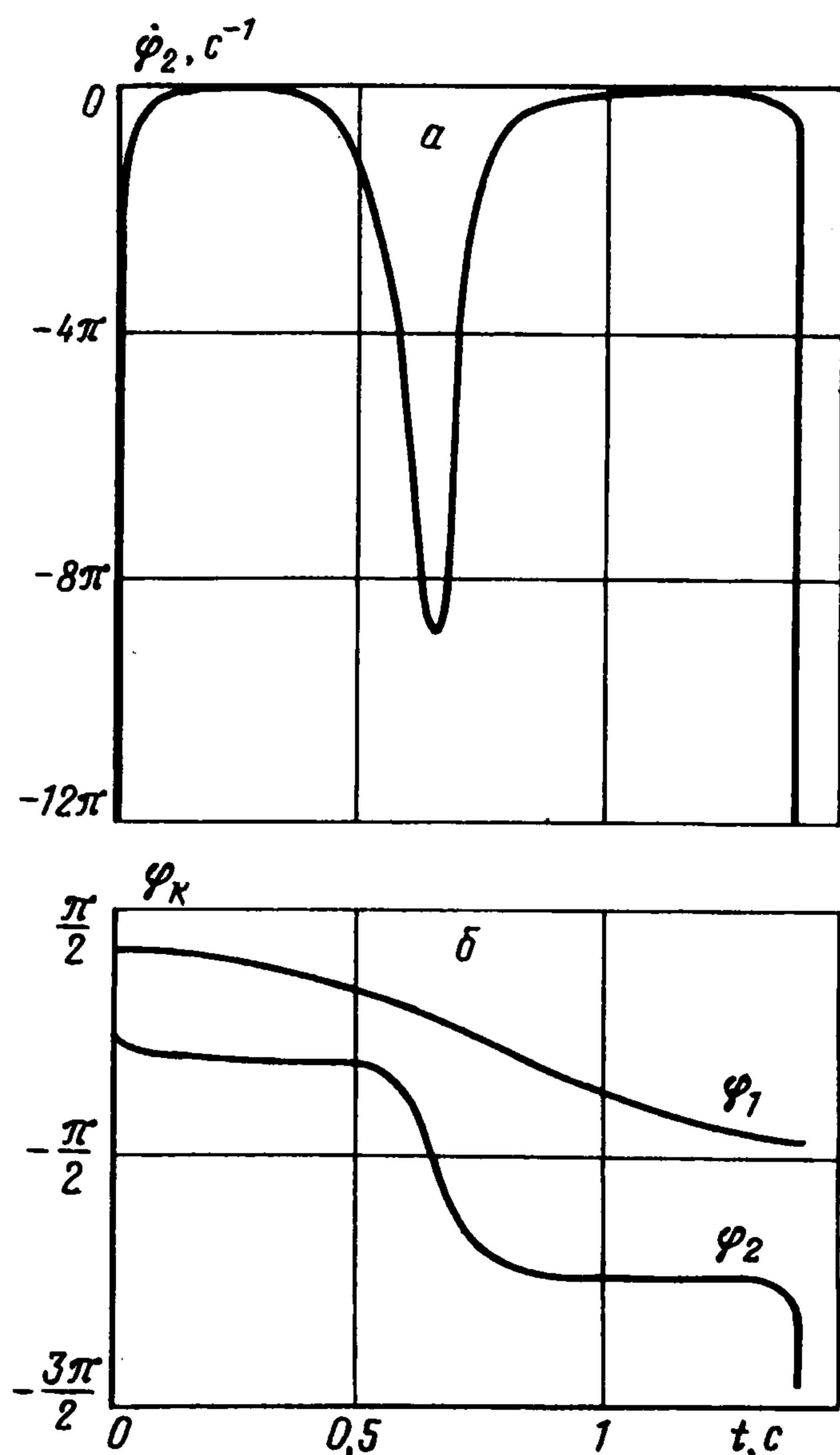
1.2°. Зададим $\lambda_1(0) = 1$ и некоторое значение параметра $\lambda_2(0)$.

1.3°. Проинтегрируем первые два уравнения (1.4) и первые два уравнения (1.8), с управлением $u(t)$, вычисленным из (1.12). Условие (1.6) будем использовать для приближенного определения момента окончания движения $t = T$.

1.4°. В результате последовательного выполнения шагов 1.2°, 1.3° построим функциональную зависимость $\varphi_1(T)$ от одного параметра $\lambda_2(0)$.

1.5°. Варьируя $\lambda_2(0)$ и последовательно выполняя шаги 1.2°, 1.4°, ищем $\max \varphi_1(T)$.

В результате применения алгоритма получаем оценки для параметров $\lambda_2(0)$, T , используемые на втором этапе решения краевой задачи в качестве первого приближения.



Фиг. 4

Опишем теперь алгоритм, используемый на втором этапе решения краевой задачи.

2.1°. Выполним шаг 1.1° описанного выше алгоритма.

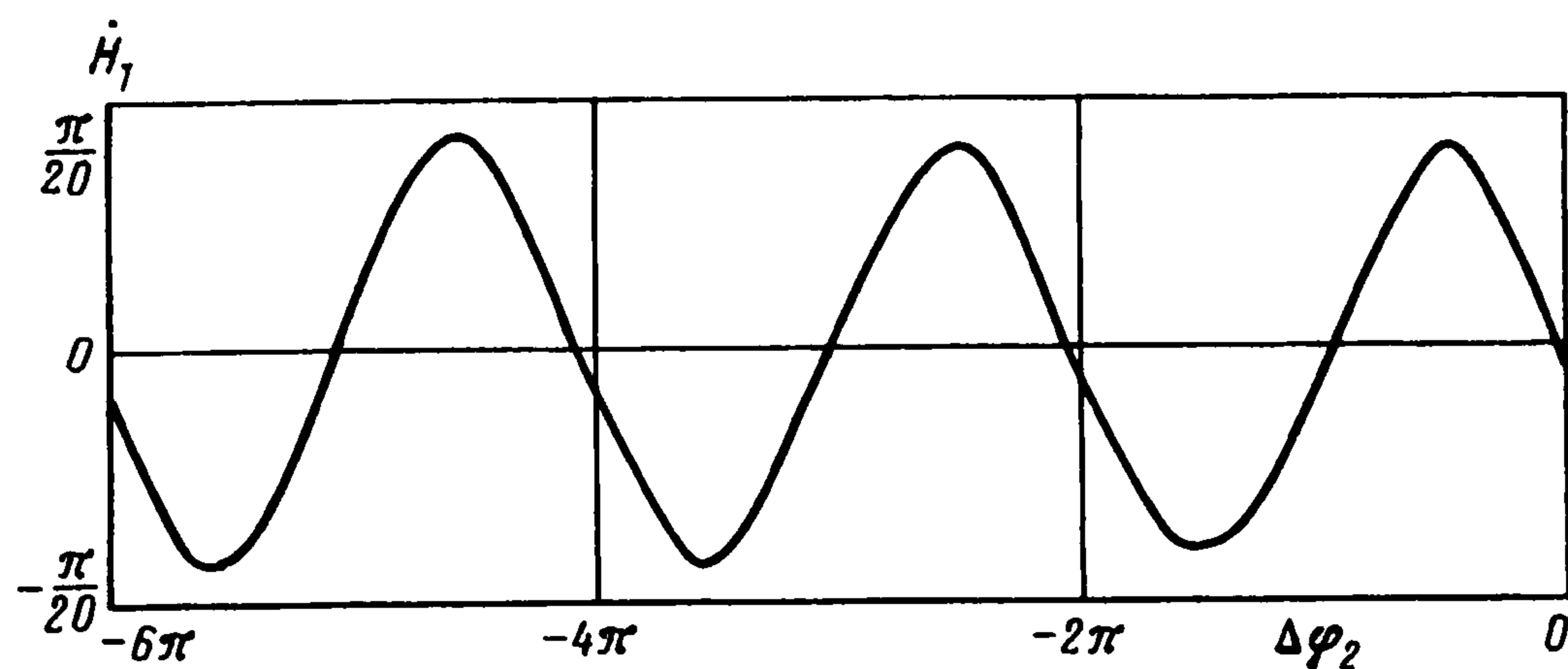
2.2°. Зададим $\lambda_1(0) = 1$ и первое приближение параметров $\lambda_2(0)$ и T .

2.3°. Проинтегрируем первые два уравнения (1.4) и первые два уравнения (1.8) с управлением $u(t)$, вычисленным из (1.12).

2.4°. Варьируя значения параметров $\lambda_2(0)$, T и последовательно выполняя шаги 2.1°–2.3°, будем добиваться выполнения условия (1.6) и третьего условия (1.9).

2.5°. В момент времени $t = T$ скачком изменим угол φ_2 на такую величину, чтобы выполнилось необходимое условие (2.5). (Наименьшее по абсолютной величине значение скачка равно $\Delta\varphi_2 = -1,404$. При этом угол φ_1 мгновенно увеличится по абсолютной величине на $|\Delta\varphi_1| = 0,055$.)

Описанный итерационный процесс построения экстремалей сходится за 5–10 итераций. Отметим, что краевая задача может быть решена и без привлечения алгоритма первого этапа, однако при этом увели-



Фиг. 5

чивается суммарное время счета. Если, например, в качестве начального приближения для $\lambda_2(0)$ и T взять соответствующие значения из решения задачи (1.1) – (1.7) при $c = 2,5\pi \text{ с}^{-1}$, то на втором этапе соответствующая система нелинейных уравнений может быть решена методом Ньютона с достаточно малым корректирующим шагом за 30–35 итераций.

Расчеты показали, что локально максимальное отклонение первого звена на одном полуцикле раскачивания при минимально возможных скачках в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ составляет $\varphi_1(T) = -1,375$. Таким образом, если в задаче (1.1) – (1.7) отказаться от условия (1.3), то максимальное отклонение первого звена на одном полуцикле раскачивания можно увеличить на $\Delta\varphi_1 = 0,057$ (при использовании "минимально возможных" скачков при $t = 0$ и $t = T$). Производная от оптимальной управляющей функции $\varphi_2(t)$, а также оптимальная управляющая функция $\varphi_2(t)$ и соответствующая ей оптимальная зависимость $\varphi_1(t)$ изображены на фиг. 4.

Опишем особенности структуры экстремалей задачи. Каждая экстремаль состоит из трех характерных участков: $0 \leq t \leq 0 + 0$, $0 + 0 \leq t \leq T - 0$, $T - 0 \leq t \leq T$. На первом и третьем участках углы φ_2 и φ_1 изменяются скачком, а на втором – непрерывно. При $t = 0$ происходит такой скачок по углу φ_2 , чтобы при учете соотношения (2.1) при $t = 0 + 0$ выполнилось условие $\dot{H}_1 = 0$ (1.11). Зависимость $\dot{H}_1 = \dot{H}_1(\Delta\varphi_2)$ (1.11) при $t = 0 + 0$ приведена на фиг. 5. Видно, что величина скачка вычисляется неоднозначно. Локально оптимальные скачки при $t = 0$ и соответствующие локальным экстремалам отклонения $\varphi_1(T - 0)$ при разных начальных скачках приведены ниже (оптимальное управление на интервале $0 + 0 \leq t \leq T - 0$ строится однозначно с использованием (1.4), (1.8), (1.12))

$\Delta\varphi_2$	-0,191	-6,456	-12,721
$\Delta\varphi_1$	0,013	0,054	0,095
$\varphi_1(T - 0)$	-1,319	-1,364	-1,474

Видно, что точки локальных максимумов по $\Delta\varphi_2$ отстоят друг от друга приблизительно на угол 2π . Небольшое нарушение периодичности связано с тем, что при $t = 0$ угол φ_1 изменяется скачком в соответствии с соотношением (2.1).

Отметим, что не все нули изображенной на фиг. 5 функции соответствуют экстремалам исследуемой задачи. Локально оптимальными являются лишь те скачки, для которых момент инерции двухзвенного маятника мгновенно становится достаточно близким к максимально возможному, т.е. $\Delta\varphi_2 \approx -2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, отметим, что эти локально оптимальные скачки не совпадают с локальными максимумами функции $\Delta\varphi_1(\Delta\varphi_2)$ (2.1), изображенной на фиг. 3.

Если при $t = 0$ мгновенно изменить угол φ_2 на достаточно большую величину, то может оказаться, что угол φ_1 скачком примет значение порядка π . В этом случае рассматриваемая задача оптимального управления движением двухзвенного маятника

на одном полуцикле раскачивания теряет смысл. Маятник начнет совершать вращательные движения, которые здесь не рассматриваются.

При $t = T - 0$ угол φ_2 скачком изменяется на такую величину, чтобы при $t = T$ выполнялось необходимое условие экстремума (2.5). Величина локально оптимального скачка по углу φ_2 вычисляется неоднозначно. Локально оптимальные скачки при $t = T - 0$ и соответствующие локально оптимальные отклонения первого звена на всем полуцикле раскачивания приведены ниже

$\Delta\varphi_2$	-1,404	-7,687	-13,970
$\Delta\varphi_1$	-0,055	-0,099	-0,140
$\varphi_1(T)$	-1,375	-1,419	-1,459

Эти результаты соответствуют скачку $\Delta\varphi_2 = -0,191$ в момент времени $t = 0$. Отметим, что точки локально максимальных скачков $\Delta\varphi_2$ при $t = T - 0$ равноотстоят друг от друга на угол 2π .

Отметим также, что не все корни $\Delta\varphi_2$ уравнения $B(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) = 0$ в момент времени $t = T$ обеспечивают максимальное отклонение первого звена. Локально оптимальными являются лишь те корни, при которых достигается локальный минимум функции (2.1). При $t = T$ локальные минимумы функции (2.1) (фиг. 3) и локально оптимальные скачки по углу φ_2 совпадают.

Таким образом, если не накладывать ограничений на величину скачка по углу φ_2 в момент времени $t = T - 0$, то отклонение первого звена при $t = T$ можно сделать сколь угодно большим, не нарушая необходимых условий экстремума.

Основной качественный результат состоит в том, что если не накладывать ограничений на мгновенные скачки при $t = 0$ и $t = T$, то можно построить бесконечное множество локальных экстремалей, являющихся решением задачи и удовлетворяющих необходимым условиям экстремума. При введении ограничения на величину скачка остается конечное число экстремалей. Если достаточно сильно ограничить по величине мгновенные скачки (например $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$ при $t = 0$ и $t = T$), то исследуемая задача оптимального управления будет иметь единственное решение, которое является предельным для задачи (1.1) – (1.7) при $c = \infty$ (см. (1.3)). Если же полностью запретить скачки по углу φ_2 (это равносильно введению ограничения (1.3) на угловую скорость поворота второго звена), то исследуемая задача становится эквивалентной задаче (1.1) – (1.7).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00065).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // ПММ. 1993. Вып. 2. Т. 57. С. 92–101.
4. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К исследованию маневренных возможностей КЛА при спуске в атмосфере // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 146–151.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
7. Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. М.: Наука, 1988. 188 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1999