

УДК 531.36:534.1:62–50

© 2000 г. Л.Д. Акуленко

УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

Исследуется задача управления и оптимизации вращательно-колебательных движений двухмассовой системы, обобщающей модель сферического маятника. Система содержит несущее твердое тело (основание), вращающееся вокруг вертикальной оси, и присоединенный к нему плоский маятник. Основное внимание уделяется решению задачи управления относительными движениями маятника посредством регулируемой скорости вращения основания. Определены и изучены относительные стационарные состояния маятника, построены в форме синтеза режимы управления, близкие к оптимальным по быстродействию, в окрестности устойчивых состояний. Предложены и исследованы квазиоптимальные управляемые движения как в режиме колебаний, так и вращений. Рассмотрена также задача перехода из одного режима в другой. Установлены и проанализированы качественные свойства управляемой системы.

Разработке аналитических и вычислительных методов решения классов задач оптимального и квазиоптимального управления движениями систем "типа маятника" посвящены многие исследования (см. монографии [1–3] и библиографию к ним). Вращательно-колебательные движения могут составлять основу некоторого процесса или(и) быть возмущающими факторами при управлении движениями сложных динамических объектов. К ним относятся манипуляционные работы, в том числе рекуперативного типа, летательные аппараты с упругими элементами значительной протяженности, крановые системы и вертолеты, перемещающие качающиеся грузы на гибких подвесах различных типов и др. Часто в качестве управляющего воздействия принимается инерционное возбуждение (силы и моменты сил реакции), обусловленные регулируемыми смещениями относительного положения равновесия вращательно-колебательной системы. Ниже исследуются задачи динамики и управления движениями плоского маятника, находящегося на вращающемся вокруг вертикальной оси основании.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движения двухмассовой системы, состоящей из твердого тела (основания) и прикрепленного к нему маятника (см. фиг. 1). Тело может свободно вращаться вокруг вертикальной оси Z некоторой инерциальной системы координат XYZ . Маятник (или ротатор) совершает относительные плоские колебания или вращения вокруг оси, проходящей через указанную вертикальную ось Z ортогонально ей.

Выражения для кинетической K и потенциальной Π энергии системы вычисляются стандартным образом, а с их помощью выписываются уравнения движения в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I(\theta) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l d \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta, \quad \Pi = m g l (1 - \cos \theta) \\ (d/dt)[I(\theta) \dot{\varphi} + m l d \dot{\theta} \cos \theta] &= M_{\varphi}, \quad I(\theta) = I_0 + m(d^2 + l^2 \sin^2 \theta) \\ m l^2 \ddot{\theta} + m l d \ddot{\varphi} \cos \theta - m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + m g l \sin \theta &= M_{\theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь φ – угол поворота твердого тела, момент инерции которого I_0 ; θ – угловая переменная маятника массы m и длины l ; d – расстояние от оси вращения основания до точки подвеса маятника ("плечо"). Функция $I(\theta)$ имеет смысл приведенного мгновенного момента инерции системы относительно оси Z ; она удовлетворяет условиям $I_0 + md^2 \leq I(\theta) \leq I_0 + m(d^2 + l^2)$. В частном случае $I_0 = 0, d = 0$ получается известная классическая модель сферического маятника. Согласно (1.1) система находится под действием моментов сил M_φ, M_θ из некоторого класса функций.

При $M_\varphi \equiv 0$ сохраняется момент импульса относительно вертикальной оси Z , т.е. система (1.1) имеет интеграл площадей

$$I(\theta)\dot{\varphi} + mld\dot{\theta}\cos\theta = c = \text{const} \quad (1.2)$$

при любом M_θ , который следует из первого уравнения. Выражение (1.2) может быть использовано при исследовании второго уравнения. В частности, при $M_\theta = A(\theta) + B(\theta)\dot{\theta}^2$ оно полностью интегрируется аналитически, так как сводится к уравнению типа Бернулли

$$\frac{d}{dt}(J(\theta)\dot{\theta}) + D(\theta)\dot{\theta}^2 + F(\theta) = 0 \quad (1.3)$$

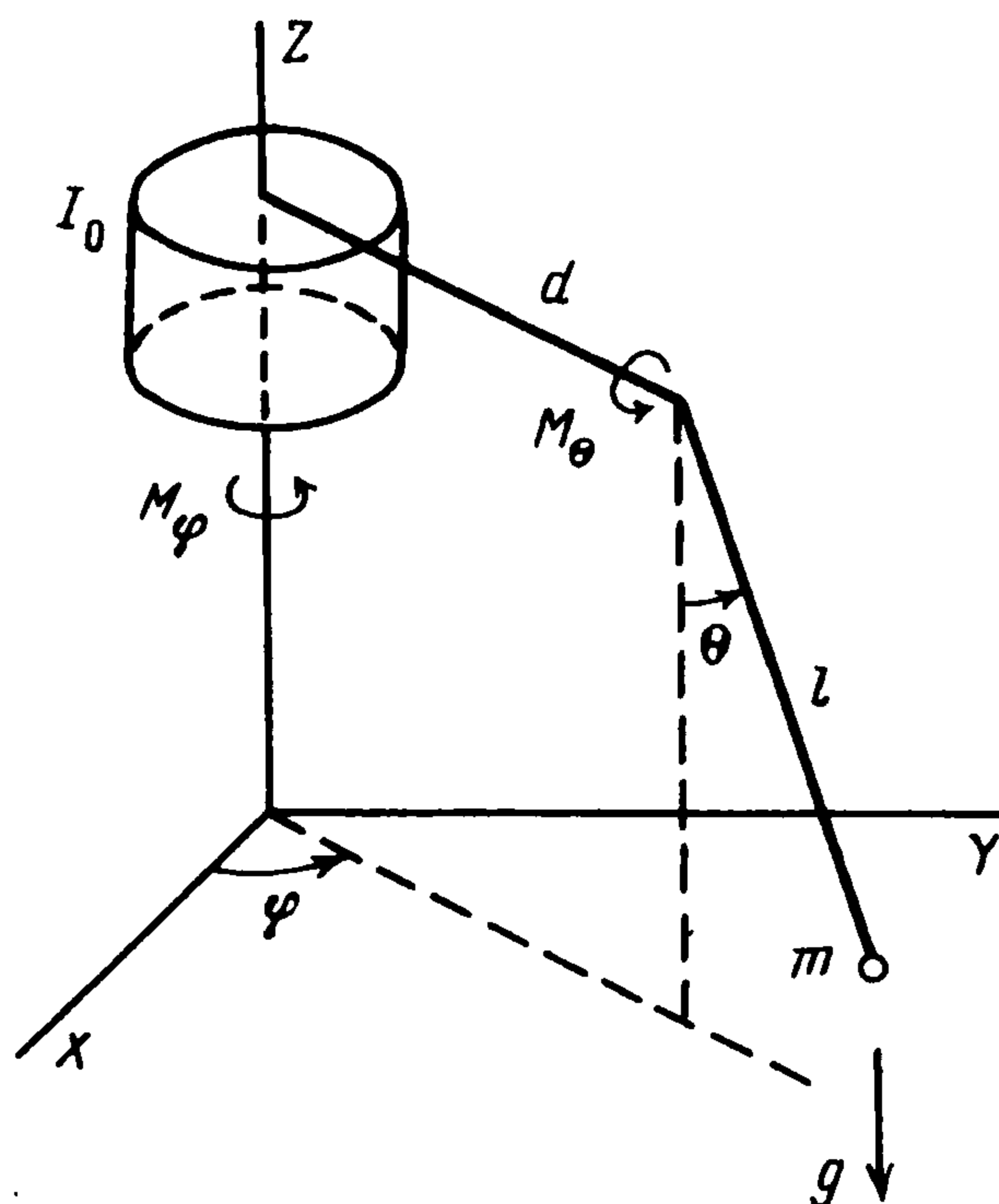
Если момент M_θ таков, что $D(\theta) = -\frac{1}{2}J'(\theta)$, $F(\theta) = W'(\theta)$, где J, W – 2π -периодические функции θ , то (1.3) есть уравнение обобщенного маятника [2, 3]. Оно допускает интеграл энергии $E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + W$, где J, W – известные с учетом (1.1), (1.2) функции θ , c (обобщенные момент инерции и потенциальная энергия соответственно).

Моменты сил M_φ, M_θ могут рассматриваться как управляющие воздействия, выбором которых требуется привести систему (1.1) в фиксированное фазовое состояние с условием минимизации некоторого критерия качества при учете различного рода ограничений. Для такой общей постановки задачи оптимального управления не удастся получить сколько-нибудь содержательные результаты. Сузим постановку предположением, что одна из фазовых переменных φ или θ изменяется требуемым образом, а их производные рассматриваются как управляющие функции и предположим, что внешние воздействия соответственно M_θ или M_φ отсутствуют. Тогда получаются ограниченные постановки задач управления по переменным θ или φ посредством кинематического (инерционного) воздействия. Так, если переменная $\dot{\theta}$ принимается за управление v , то при $M_\varphi \equiv 0$ имеем семейство управляемых систем вида (c – параметр семейства)

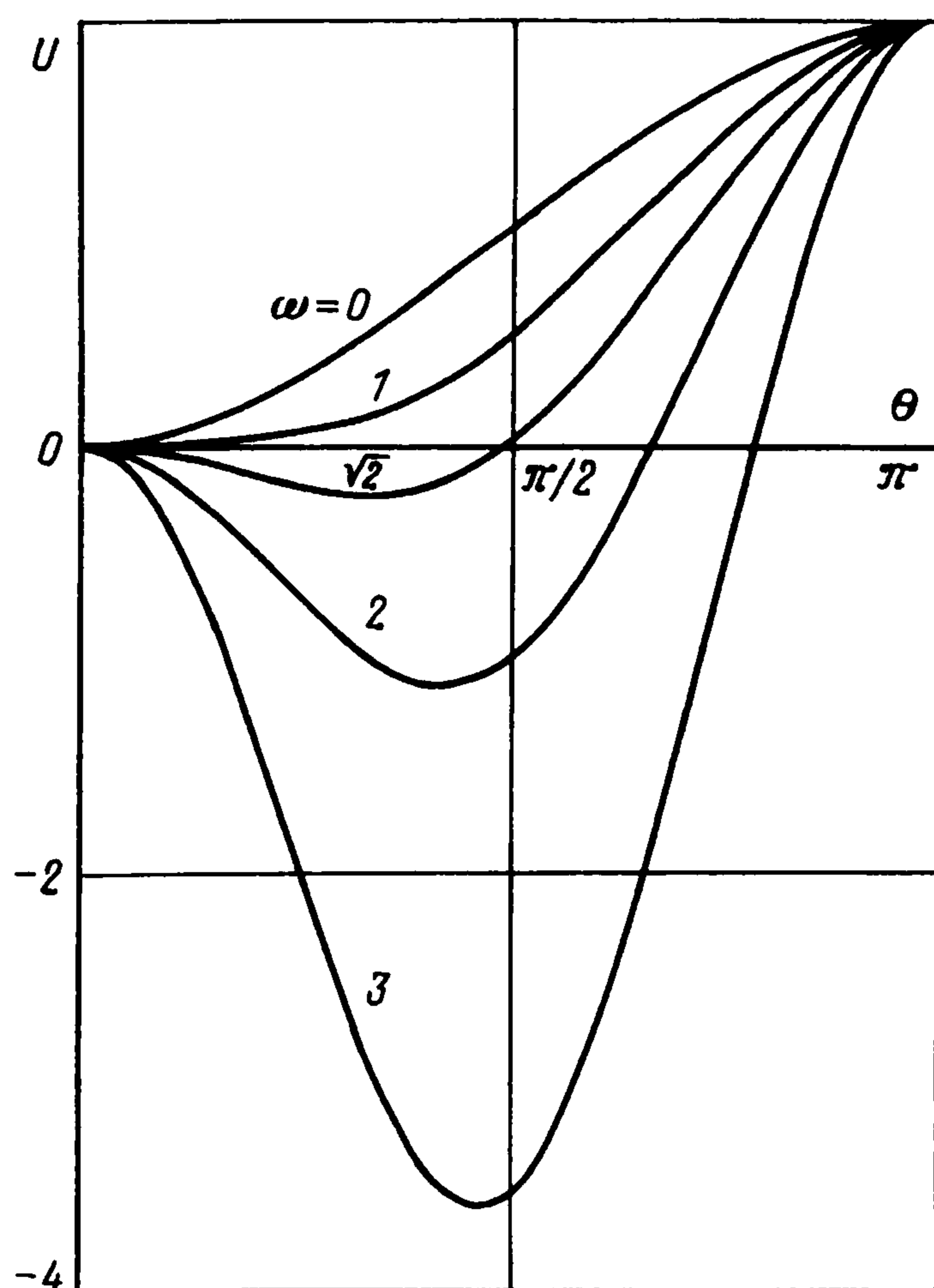
$$\dot{\varphi} = I^{-1}(\theta)(c - mldv \cos\theta), \quad \dot{\theta} = v, \quad v \in V \quad (1.4)$$

Особый интерес представляет случай $c = 0$. Для системы (1.4) могут быть поставлены задачи изменения переменных φ, θ в некоторых пределах. Управляющее воздействие v можно реализовать посредством электропривода с большим передаточным числом редуктора, помещенного в шарнире для маятника [2, 3].

Рассмотрим основную, существенно более содержательную постановку задачи, когда переменная φ регулируется кинематически, а θ изменяется согласно (1.1) при



Фиг. 1



Фиг. 2

$M_\theta \equiv 0$. Тогда имеем управляемую систему вида

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + v^2 \sin \theta = -\kappa u \cos \theta \quad (1.5)$$

$$\dot{\omega} = u, \quad \dot{\phi} = \omega \quad (v^2 = g/l, \quad \kappa = d/l)$$

Согласно системе (1.5) в качестве управления принимается угловое ускорение $\ddot{\phi} = u$ вращения основания; его эффективность для θ сильно зависит от κ — нормированной величины плеча d . Следует отметить, что переменная ϕ отсутствует в уравнениях (1.5). Это позволяет ставить ряд задач управления относительно состоянием маятника без учета угловой ориентации тела. Представляется весьма интересным для приложений исследование положений относительного равновесия θ_e маятника при $u \equiv 0$ ($\omega = \text{const}$), а также постановка и решение задач оптимального управления движениями маятника в окрестности указанных стационарных точек системы $\theta = \theta_e(\omega^2)$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \omega$, отвечающих устойчивым состояниям, см. ниже.

2. Определение и исследование относительных положений равновесия маятника.

С целью уменьшения числа параметров в системе (1.5) введем безразмерное время $t' = vt$ и совершим замены: $\omega' = \omega/v$, $u' = u/v^2$. Отбрасывая штрих ради краткости, получим уравнения, в которых $v = 1$. Рассмотрим ситуацию, когда угловая скорость поддерживается постоянной $\dot{\phi} = \omega$ ($u \equiv 0$). Тогда первое уравнение для θ (1.5) допускает интеграл энергии E :

$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta, \omega^2), \quad -\pi < \theta \leq \pi \pmod{2\pi}, \quad 0 \leq \dot{\theta}^2, \quad \omega^2 < \infty \quad (2.1)$$

$$U(\theta, \omega^2) = 1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \theta, \quad -\infty < U \leq 2, \quad \min_\theta U \leq E < \infty$$

Здесь U — потенциальная энергия колебаний или вращений маятника относительно равномерно вращающегося основания. Поскольку функция U — 2π -периодична по θ и симметрична относительно $\theta = 0$, то достаточно представить ее на промежутке $0 \leq \theta \leq \pi$. На фиг. 2 приведена зависимость $U(\theta)$ при разных значениях ω . Из выражения U (2.1) следует, что при $0 \leq \omega^2 \leq 1$ функция имеет единственный минимум и максимум

$$\min_\theta U(\theta, \omega^2) = U(0, \omega^2) \equiv 0, \quad \max_\theta U(\theta, \omega^2) = U(\pi, \omega^2) \equiv 2$$

$$U'(0, \omega^2) = 0, \quad U''(0, \omega^2) = 1 - \omega^2, \quad U'''(0, 1) = 0 \quad (2.2)$$

$$U^{IV}(0, 1) = 3; \quad U'(\pi, \omega^2) = 0, \quad U''(\pi, \omega^2) = -1 - \omega^2, \quad 0 \leq \omega^2 \leq 1$$

Дифференцированием устанавливается, что $U > 0$ в малой окрестности особой точки типа центр $\theta_e = 0$ ($\theta \neq 0$) при $\omega^2 < 1$; $U < 2$ при $\theta \neq \pi$ в малой окрестности особой точки типа седло $\theta_e = \pi$ для всех $0 \leq \omega^2 \leq 1$, т.е. минимум и максимум (2.2) оказываются строгими. Таким образом, если привести твердое тело во вращение со

скоростью $\dot{\phi} = \omega$, $\omega^2 \leq 1$ (т.е. $\omega^2 \leq v^2$) при условии, что $\theta = \dot{\theta} = 0$, то система будет совершать устойчивое вращение как целое по отношению к переменным $\dot{\phi}$, θ , $\dot{\theta}$; относительное положение равновесия $\theta_e = \pi$, $\dot{\theta} = 0$ будет экспоненциально неустойчивым: вариация

$$\delta\theta \sim \delta\theta^0 \exp(\sqrt{1 + \omega^2} t)$$

Рассмотрим относительные положения равновесия при $\omega^2 > 1$, т.е. $\omega^2 > v^2$ в размерных переменных. Тогда из анализа функции $U(\theta, \omega^2)$ (2.1) следует, что устойчивое (нижнее) положение равновесия $\theta_e = 0$ расщепляется на два: $\theta_e = 0$ и $\theta_e = \theta_* = \arccos \omega^{-2}$; равновесие $\theta_e = \pi$ сохраняется (см. фиг. 2). Элементарный анализ свидетельствует, что значения $\theta_e = 0, \pi$ (точки типа седло) отвечают строгим максимумам, а значение $\theta_e = \theta_*$ (точка типа центр) – строгому минимуму, причем

$$U_*(\omega^2) = U(\theta_*, \omega^2) = -\frac{1}{2}(\omega^2 + \omega^{-2}) + 1 < 0, \quad U''(\theta_*, \omega^2) = \omega^2 - \omega^{-2} > 0 \quad (2.3)$$

Справедливы аналогичные утверждения о равномерном вращении как целого системы в состоянии $\dot{\phi} = \omega$, $\dot{\theta} = 0$, $\theta_e = \theta_*(\omega^2)$, $0, \pi$. Отметим, что функция минимума $U_*(\omega^2) \approx -\frac{1}{2}\omega^2$ при $\omega^2 \gg 1$, т.е. довольно быстро убывает с ростом $|\omega|$, причем $\theta_*(\omega^2) < \pi/2$, $\theta_* \rightarrow \pi/2$, если $\omega^2 \rightarrow \infty$, но $U'(\pi/2, \omega^2) = 1$ независимо от ω .

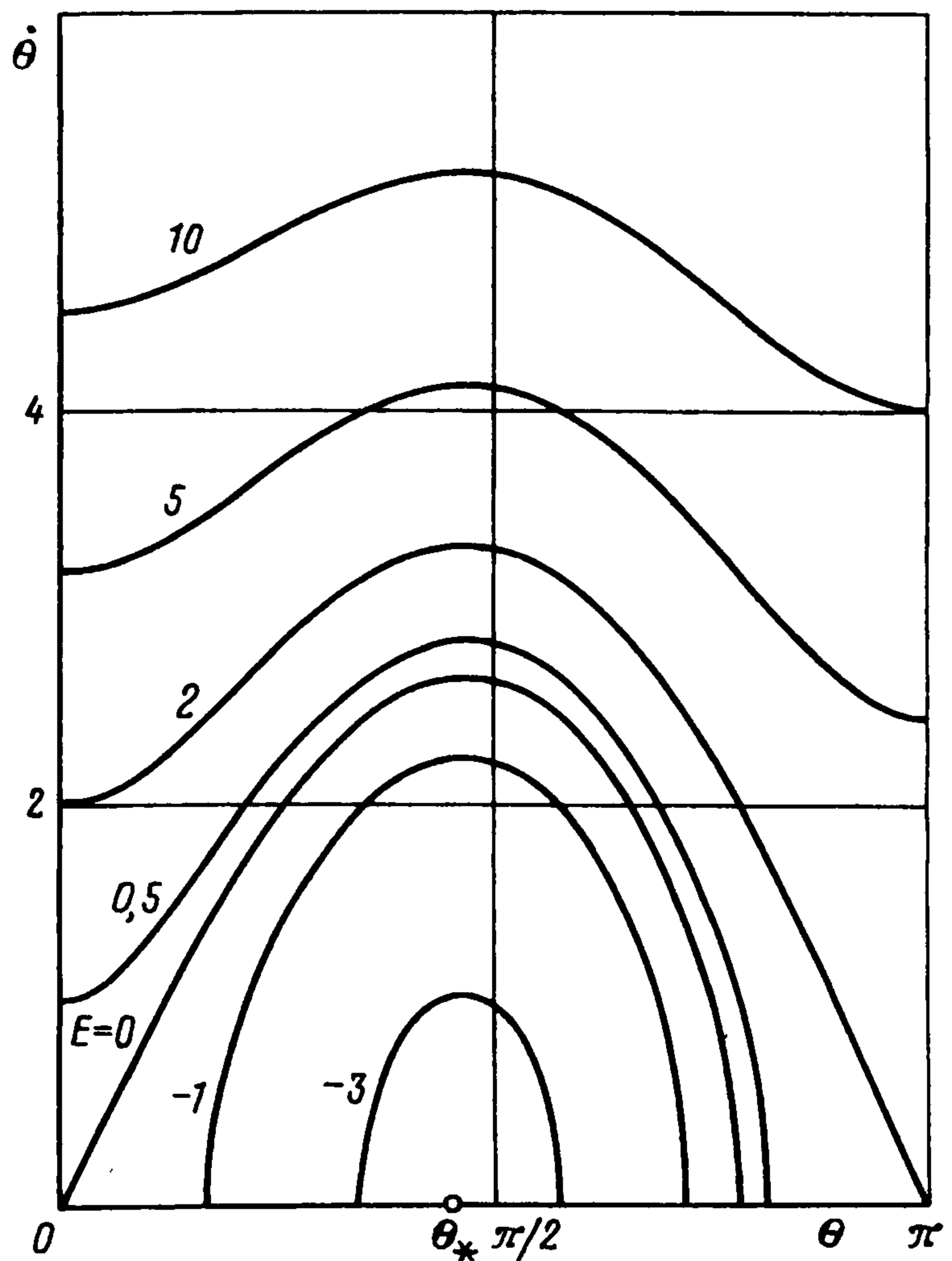
Перейдем к исследованию траекторий на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ для различных значений ω^2, E , определяемых согласно соотношениям (2.1). На фиг. 3 приведены фрагменты фазовых траекторий для $\omega = 3$ при разных значениях E . Вследствие симметрии можно ограничиться первым квадрантом. Рассмотрим сперва простую ситуацию $E > 2$, отвечающую режиму относительных вращений; имеем

$$\dot{\theta} = \pm \eta(\theta, \omega^2, E), \quad \eta(\theta, \omega^2, E) = \sqrt{2[E - U(\theta, \omega^2)]}^{1/2}, \quad E > 2$$

$$\min_{\theta} \eta = \sqrt{2(E - 2)}^{1/2}, \quad \max_{\theta} \eta = \sqrt{2E}, \quad 0 \leq \omega^2 \leq 1 \quad (2.4)$$

$$\min_{\theta} \eta = \sqrt{2(E - 2)}^{1/2}, \quad \text{extr}_{\theta} \eta = \sqrt{2E}, \quad \max_{\theta} \eta = \sqrt{2[E - 1 + \frac{1}{2}(\omega^2 + \omega^{-2})]}^{1/2}, \quad \omega^2 > 1$$

При $E > 2$ маятник совершает относительные монотонные вращения с положительной $\dot{\theta} = \eta$ или отрицательной $\dot{\theta} = -\eta$ скоростью, величина которой колеблется в некоторых пределах, определяемых выражениями (2.4) (см. фиг. 3). В пределе при $E \downarrow 2$ получим сепаратрису; для значений $0 \leq \omega^2 \leq 1$ она качественно отвечает классическому случаю $\omega^2 = 0$ – маятнику с неподвижной осью [1–3]. Существенные различия наблюдаются при $\omega^2 > 1$: появляются локальный минимум при $\theta = 0$ и максимум для $\theta = \theta_*(\omega^2)$ ($\theta_* \approx \pi/2$, $\omega^2 \gg 1$). Их значения можно вычислить



Фиг. 3

по формулам (2.4); при $E = 2$ для $\omega^2 \gg 1$ имеем асимптотику $\max \eta \sim |\omega|$ (см. фиг. 3).

Исследуем теперь фазовые траектории в режиме колебаний; используем формулы (2.4) для $\dot{\theta}$, η при $E < 2$. Характер колебаний существенно зависит от значений параметров ω^2 , E . Рассмотрим сначала случай системы, качественно близкой классическому маятнику (см. выше). Фазовые траектории и точки возврата определяются аналитически в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \pm \eta(\theta, \omega^2, E), \quad \theta^- \leq \theta \leq \theta^+, \quad \theta^- = -\theta^+, \quad 0 \leq E < 2, \quad 0 \leq \omega^2 \leq 1 \\ \theta^\pm &= \theta^\pm(\omega^2, E) = \arccos z(\omega^2, E), \quad 0 \leq \theta^+ < \pi, \quad -\pi < \theta^- \leq 0 \\ z &= \omega^{-2}(1 - [(1 - \omega^2)^2 + 2\omega^2 E]^{1/2}), \quad -1 < z \leq 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно (2.5) относительные колебания маятника происходят в симметричных пределах $\theta^\pm$. Единственная точка покоя типа центр $\theta_c = 0$ имеет место при $E = 0$. Траектории выпуклы либо вверх ($\dot{\theta} = \eta$), либо вниз ($\dot{\theta} = -\eta$) (см. фиг. 3).

Несколько более сложная картина поведения фазовых траекторий наблюдается при $\omega^2 > 1$. Если $0 \leq E < 2$, то остаются справедливыми выражения (2.5), однако происходит качественное изменение поведения траекторий: функция η выпукла вверх по краям интервала (θ^-, θ^+) и выпукла вниз (вогнута) в средней части этого интервала. В пределе при $E \downarrow 0$ система имеет особую точку $(0, 0)$ типа седло, а фазовая траектория подобна символу ∞ . Колебания маятника, естественно, при $0 < E < 2$ происходят в симметричных пределах $\theta^\pm$ согласно соотношениям (2.5) (см. фиг. 3).

Если $E < 0$, то область колебаний симметричным образом расщепляется на две (см. фиг. 2, 3). Колебания маятника могут происходить в пределах $\theta \in [\theta^-, \theta^+] \subset (0, \pi)$ либо $\theta \in [\theta^-, \theta^+] \subset (-\pi, 0)$. Рассмотрим для определенности случай положительных пределов. Соотношения типа (2.5) для определения фазовой траектории и точек остановки принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \pm \eta(\theta, \omega^2, E), \quad \theta^- \leq \theta \leq \theta^+, \quad 0 > E \geq U_*(\omega^2) = 1 - \frac{1}{2}(\omega^2 + \omega^{-2}) \leq 0 \\ \theta^\pm &= \theta^\pm(\omega^2, E) = \arccos z^\mp(\omega^2, E), \quad 0 < \theta^- < \pi/2, \quad \theta^- < \theta^+ < \pi \\ z^\pm &= \omega^{-2}(1 \pm [(1 - \omega^2)^2 + 2\omega^2 E]^{1/2}), \quad -1 < z < 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Точка покоя θ_* для фиксированного значения ω , $|\omega| > 1$ определяется согласно (2.3), (2.6): $\theta_*(\omega^2) = \arccos \omega^{-2}$, причем $\theta_* \uparrow \pi/2$ при $\omega^2 \rightarrow \infty$, что отвечает механическим представлениям. Колебания происходят в несимметричных относительно $\theta_c = \theta_*$ пределах $\theta^- \leq \theta \leq \theta^+$; это следует из выражений (2.6) для θ_* , $\theta^\pm$. Интересно отметить, что $0 < \theta^- < \pi/2$, $0 < \theta^+ < \pi$, но $\theta^+ \gtrless \pi/2$. Таким образом, фазовая картина относительных колебаний маятника при условии равномерного вращения основания, необходимая для дальнейших построений, исследована.

Из проведенного анализа следует одна из естественных и содержательных постановок задачи оптимального управления движениями системы (1.5): привести маятник в состояние относительного устойчивого равновесия θ_c , отвечающего фиксированной скорости ω вращения основания. Начальное состояние системы θ^0 , $\dot{\theta}^0$, ω^0 может быть произвольным; управление – угловое ускорение основания – выбирается из заданного класса функций $\dot{\omega} = u \in \{u\}$, например кусочно-непрерывных и ограниченных $|u| \leq u_0$, а функционалом качества – время быстрогодействия [1–4]. Определенный интерес может представить приведение маятника в состояние вращения $E > 2$ либо состояние колебаний с фиксированным значением полной энергии E : $U_*(\omega^2) < E < 2$. Построение точных решений таких задач оптимального управления движениями нелинейных колебательных систем вида (1.4), (1.5) представляет существенные трудности. Поэтому

предполагается применение приближенных аналитических подходов метода возмущений, связанных с введением малого параметра [1–3].

3. Приближенное исследование задач "инерционного управления". Рассмотрим отмеченные в разд. 1, 2 ограниченные постановки задач управления посредством кинематического изменения одной из угловых переменных θ или φ .

Поворот основания. Исследуем возможности управления вращениями твердого тела (основания) изменением угловой скорости маятника, описываемых уравнениями (1.4). Предположим, что управление v выбирается из класса кусочно-непрерывных функций, ограниченных по модулю. Ставится задача оптимальной по быстродействию переориентации основания, а угловое положение маятника может быть произвольным. Задача оптимального быстродействия для системы (1.4) имеет вид

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \varphi(t_f) = \varphi^f \pmod{2\pi}, \quad t_f \rightarrow \min_v, \quad |v| \leq v_0 \quad (3.1)$$

Система управляема в смысле (3.1) при $c \neq 0$, а в предельном случае $c = 0$ не всегда, так как между φ и θ согласно (1.4) при любых $v \neq 0$ выполняется соотношение

$$\varphi - \varphi^0 = -\kappa a^{-1} (\operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg} s^0), \quad a = (I_0 / (ml^2) + \kappa^2)^{1/2}, \quad s = a^{-1} \sin \theta \quad (3.2)$$

в котором без ограничения общности можно положить $\varphi^0 = 0$. Поскольку ориентация φ^f определяется в (3.1) с точностью до 2π , то условие управляемости согласно (3.2) принимает вид

$$|\varphi^f| \leq 2\kappa a^{-1} \operatorname{arctg} a^{-1} \quad (|\varphi^f| < \pi) \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) имеет ясный механический смысл. Отметим лишь, что правая часть неравенства (3.3) ограничена величиной π для всех значений I_0, ml^2, md^2 , так как $\kappa a^{-1} \leq 1$, а величина $a^{-1} < \infty$; предельное значение достигается, если $I_0, d \rightarrow 0$, т.е. имеет место сферический маятник. Кроме того, при достижении требуемой ориентации φ^f тело будет оставаться в этом угловом положении, если для $t > t_f$ взять $v \equiv 0$. Интересно также отметить, что условие (3.3) не зависит от v_0 . Оптимальное по быстродействию управление v^* в форме программы и синтеза строится в результате выполнения элементарных операций

$$\int_0^{t_f} v^*(t) dt = \pm v_0 t_f^\pm = \arcsin a \frac{s^0 - \operatorname{tg} \psi^f}{1 + s^0 \operatorname{tg} \psi^f} - \theta^0 \quad (3.4)$$

$$0 < t_f^* = \min(t_f^+, t_f^-), \quad s^0 = a^{-1} \sin \theta^0, \quad \psi^f = \varphi^f a / \kappa$$

Если выполнено условие управляемости (3.3), то задача (3.4) имеет решение.

При $c \neq 0$ система (1.4), как отмечалось, управляема в смысле (3.1). Если $\varepsilon = |c|(mldv_0)^{-1} \ll 1$, то решение задачи в ситуации общего положения (когда условие (3.3) выполнено "с запасом") близко к вышеизложенному. Оно может быть построено приближенно методами возмущений [1–3] с малым параметром ε .

Если управляющее воздействие на тело мало, т.е. $\varepsilon^{-1} = mldv_0|c|^{-1} \ll 1$, но $\mu = v_0(I_0 + md^2)|c|^{-1} \sim 1$, то также применимы приближенные методы оптимального управления, разработанные для регулярно возмущенных систем [1–3]. В первом приближении оптимальное управление v^* должно приводить к уменьшению $I(\theta)$, т.е. к минимизации $\sin^2 \theta$; в результате имеем выражение $v^* \approx -v_0 \sin 2\theta$.

Если же управление v также мало: $\mu \sim \varepsilon \ll 1$, то естественно применить локально оптимальные законы управления [1], например вида

$$v^* = -v_0 \operatorname{sign}[(\varphi^f - \varphi) \cos \theta + k^2 \theta] \quad (\varphi^f - \varphi, \theta; \operatorname{mod} 2\pi) \quad (3.5)$$

При $k^2 = 0$ выражение v^* (3.5) соответствует локально оптимальному режиму

минимизации функционала $J_\varphi = (\varphi^f - \varphi(t_f))^2$, а при $k^2 > 0$ – минимизации $J_\varphi + k^2\theta^2(t_f)$. Параметр k^2 в (3.5) есть весовой множитель, выбираемый посредством численных экспериментов.

Ситуация, когда $\varepsilon \sim 1$, но $\mu \gg 1$, соответствует асимптотически большому интервалу времени $t_f \sim \varepsilon^{-1}\nu_0^{-1}$. В медленном времени τ происходит практически релейное изменение угловой переменной θ , поскольку $d\theta/d\tau = \nu|c|^{-1}(I_0 + md^2) \gg 1$. Приближенное управление сводится к приведению маятника в угловое положение $\theta = 0, \pi$ за относительно короткое время $\Delta\tau \leq (\pi/2)|c|[\nu_0(I_0 + md^2)]^{-1} \ll 1$; затем полагается $\nu \equiv 0$. Тело с маятником вращается с максимальной скоростью $\dot{\varphi} \approx c(I_0 + md^2)^{-1}$, а по достижении требуемого углового положения $\varphi^f \pmod{2\pi}$ величина скорости вращения может быть уменьшена на величину $mld\nu_0$ или сделана нулевой, если $|c| \leq mld\nu_0$.

Общая ситуация, когда $|c|(I_0\nu_0)^{-1} \sim mldI_0^{-1} \sim 1$, затруднительна для полного исследования. Для нее удовлетворительные результаты могут быть получены методом "штрафов" аналогично (3.5) или численными расчетами.

Управление колебаниями маятника. На основе проведенного в разд. 2 анализа фазовой картины колебаний маятника ($E < 2$) исследуем некоторые задачи управления движениями в окрестности устойчивых относительных положений равновесия. Согласно (2.5) при $0 \leq \omega^2 \leq 1$ устойчивым положением будет $\theta = \dot{\theta} = 0$. Для конструктивного исследования процесса управления в обезразмеренных уравнениях (1.5) введем малый параметр ε , характеризующий рассматриваемую окрестность стационарной точки и малость управляющего воздействия, следующим образом позволяющим учесть нелинейные члены уравнения [2, 3]:

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{\varepsilon}\alpha, \quad \alpha \sim 1, \quad \omega = \omega^* + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \quad \gamma \sim 1, \quad \dot{\omega} = \varepsilon^{3/2}u, \quad 0 \leq \omega^* < 1 \\ \ddot{\alpha} + \Omega^2\alpha &= -\varepsilon f\alpha^3 - \varepsilon\kappa u + O(\varepsilon^2), \quad f \equiv \frac{1}{6}(-1 + 4\omega^{*2} + 8\sqrt{\varepsilon}\omega^*\gamma) \\ \dot{\gamma} &= \varepsilon u, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad u_{1,2} \sim 1, \quad \Omega^2 = 1 - \omega^{*2} - 2\sqrt{\varepsilon}\omega^*\gamma - \varepsilon\gamma^2 > 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

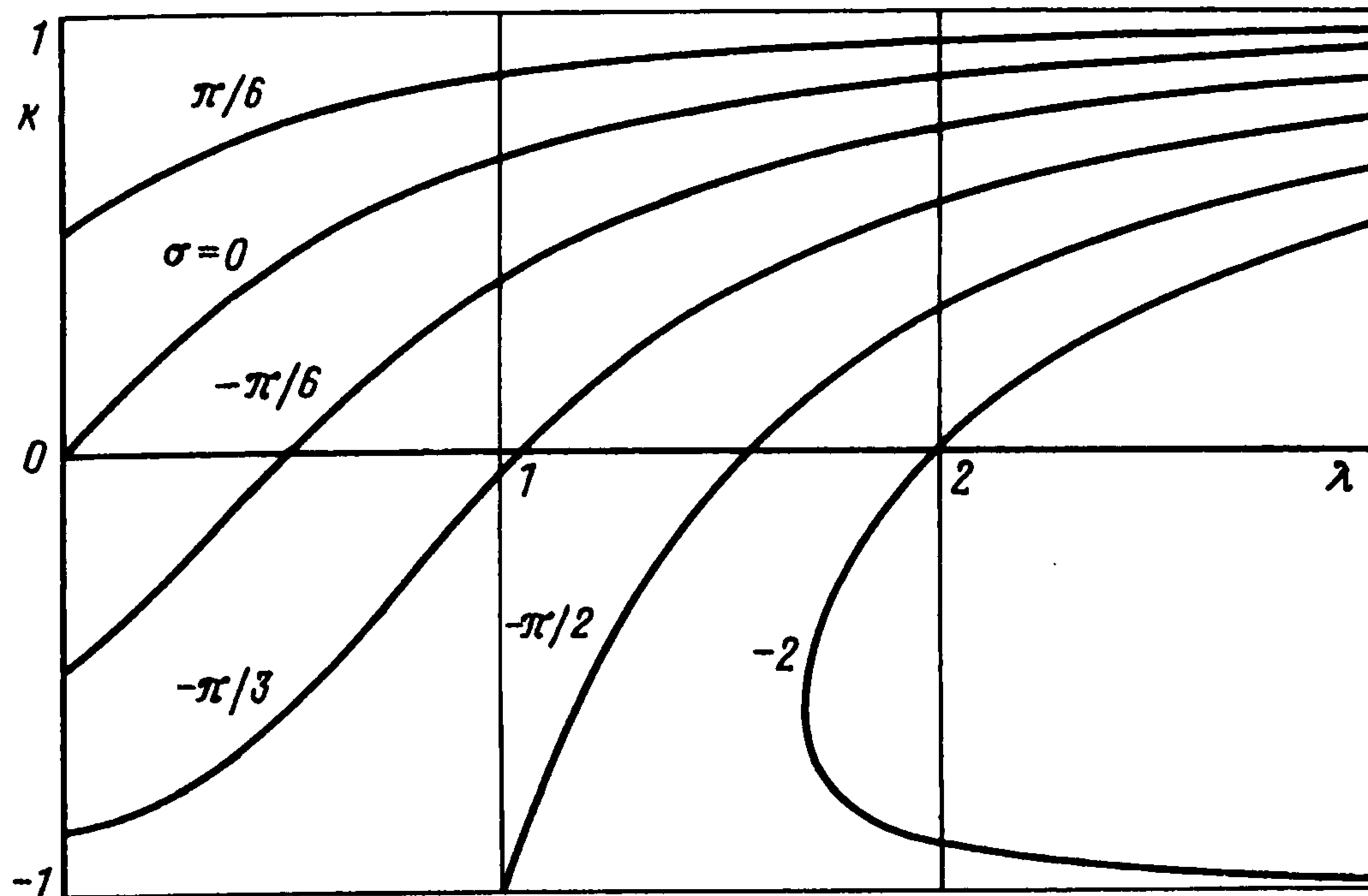
Далее предполагается, что $\kappa, \Omega^2 \sim 1$. Ставится задача оптимального по быстродействию изменения амплитуды малых относительных колебаний маятника и величины угловой скорости вращений основания. Для приведения уравнений (3.6) к стандартному виду управляемой системы с вращающейся фазой применим замену $(\alpha, \dot{\alpha}) \rightarrow (a, \psi)$ [1–3]; получим

$$\begin{aligned}\alpha &= a \sin \psi, \quad \dot{\alpha} = a\Omega \cos \psi, \quad \gamma \equiv \gamma(a, \Omega, \gamma \sim 1) \\ \dot{a} &= -(\varepsilon/\Omega)(\kappa u + f(\gamma, \omega^*, \varepsilon)a^3 \sin^3 \psi) \cos \psi - a(\dot{\Omega}/\Omega) \cos^2 \psi \\ \dot{\gamma} &= \varepsilon u, \quad \dot{\psi} = \Omega + O(\varepsilon), \quad \dot{\Omega} = O(\varepsilon^{3/2})\end{aligned}\tag{3.7}$$

Функционал качества управления, характеризующий время оптимального быстродействия, а также начальные и конечные условия принимаются в виде

$$t_f \rightarrow \min_u, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad a(0) = a^0, \quad \gamma(0) = \gamma^0, \quad a(t_f) = a^f, \quad \gamma(t_f) = \gamma^f\tag{3.8}$$

В частности, при $a^f = 0$ маятник приводится в состояние относительного равновесия θ^f , отвечающее скорости вращения основания $\omega^f = \omega^* + \sqrt{\varepsilon}\gamma^f$; при $\gamma^f = 0$ финальная скорость $\omega^f = \omega^*$; без ограничений общности можно положить $a^f = \gamma^f = 0$. Приближенное решение задачи (3.7), (3.8) строится с помощью принципа максимума [4] и метода усреднения [5, 6]. На основе асимптотических методов оптимального управления [1–3] получим с относительной погрешностью по функционалу и траектории



Фиг. 4

$O(\sqrt{\varepsilon})$ выражения (без учета $O(\varepsilon^{3/2})$)

$$u^* = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \begin{cases} \text{sign}[\Delta a(k - \cos \psi)], & \Delta a \neq 0, |k| < 1 \\ \text{sign} \Delta \gamma, & \Delta a = 0, |k| \geq 1 \end{cases}$$

$$k = \arg_k \left[\frac{\arcsin k - \sigma}{(1 - k^2)^{1/2}} - \lambda \right], \quad \lambda = \frac{\kappa \Delta \gamma}{\Omega_0 \Delta a}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} \frac{u_1 + u_2}{u_2 - u_1}, \quad \Omega_0 = (1 - \omega^{*2})^{1/2} \quad (3.9)$$

$$t_f = \frac{\pi}{\varepsilon} \frac{\kappa^{-1} \Omega_0 |\Delta a| + \Delta \gamma}{(\pi/2)(u_1 + u_2) + (u_2 - u_1)((1 - k^2)^{1/2} - \arcsin k)},$$

$$a(t) = a^\circ + \Delta a \frac{t}{t_f}, \quad \gamma(t) = \gamma^\circ + \Delta \gamma \frac{t}{t_f}$$

$$\lambda \geq \arg_\lambda (\sigma + \arcsin \lambda^{-1} + (\lambda^2 - 1)^{1/2}), \quad \sigma \leq \mp \pi/2, \quad k(-\lambda, -\sigma) = -k(\lambda, \sigma)$$

Для построения оптимального по быстродействию управления в форме программы и синтеза, согласно (3.9), требуется численно или приближенно аналитически решить трансцендентное уравнение относительно $k = k(\lambda, \sigma)$. Графическое решение представлено на фиг. 4. Отметим, что параметр λ определяется начальными (текущими) значениями фазовых переменных a, γ . Указанное уравнение разрешимо и притом единственным образом для всех λ , если $|\sigma| < \pi/2$, т.е. $u_1 < 0, u_2 > 0$, что обычно выполняется для реальных систем управления; обычно $\sigma = 0$ ($u_1 = -u_2$). При $|\sigma| > \pi/2$, т.е. $u_{1,2} > 0, u_{1,2} < 0$, решение неоднозначно (если оно существует) и требуется выбрать один из корней $k_{1,2}$, минимизирующий t_f (см. (3.9) и кривую $\sigma = -2$ на фиг. 4).

Таким образом, слабое управление εu согласно алгоритму (3.9) приводит систему (3.6) из произвольной точки a°, γ° в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестность точки a^f, γ^f за асимптотически большое оптимальное время $t_f \sim \varepsilon^{-1}$. Фазовая точка исходной системы (1.5) посредством управления $\dot{\omega} = \varepsilon^{3/2} u$ перейдет из $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности требуемого значения

$$\theta^f = \theta_e + \sqrt{\varepsilon} \alpha^f, \quad \dot{\theta}^f = \sqrt{\varepsilon} \dot{\alpha}^f, \quad \omega^f = \omega^* + \sqrt{\varepsilon} \gamma^f$$

в ε -окрестность. К аналогичному (3.9) решению приводит постановка задачи управ-

ления при следующем введении масштабов:

$$\theta = \varepsilon \alpha, \quad \omega = \omega^* + \varepsilon \gamma, \quad \dot{\omega} = \varepsilon$$

Она эквивалентна предположениям (3.6) и представлению $\dot{\omega} = \varepsilon u$ с заменой $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon$; однако при этой нормировке нелинейные слагаемые $O(\alpha^3)$ не будут учтены [2, 3].

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления при $\omega^2 > 1$ в предположениях, аналогичных (3.6), но $\dot{\omega} = \varepsilon^2 u$, $u \sim 1$. Для удобства совершим замену $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon$ (см. выше). Получим квазилинейную управляемую систему вида (3.7)

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = \varepsilon f(\alpha, \gamma) - \varepsilon \kappa u / \omega^{*2}, \quad \dot{\gamma} = \varepsilon u, \quad \Omega^2 = \omega^{*2} - 1 / \omega^{*2} \quad (3.10)$$

$$f = (\frac{1}{2} \sin \theta_* - \omega^{*2} \sin 2\theta_*) \alpha^2 + 2\omega^* \gamma \cos 2\theta_*, \quad \cos \theta_* = 1 / \omega^{*2}$$

Приближенное с относительной погрешностью $O(\varepsilon)$ решение задачи оптимального быстрогодействия (3.8) для системы (3.10) определяется соотношениями (3.9), в которых следует совершить замены

$$\Omega_0 \rightarrow \Omega = (\omega^{*2} - 1 / \omega^{*2})^{1/2}, \quad \kappa \rightarrow \kappa / \omega^{*2}$$

(см. выражения для λ и t_f). Отметим, что наличие нелинейных членов εf в (3.6), (3.7), (3.10) не влияет на решение первого приближения, поскольку они исчезают при усреднении.

Управление колебаниями маятника при быстрых вращениях основания. Исследуем аналогичную задачу в случае асимптотически большой угловой скорости вращения твердого тела: $\omega^2 \gg 1$, т.е. $\omega^2 \gg v^2 = g/l$ в размерных переменных. Как установлено в разд. 2, устойчивые стационарные точки $\theta_* \approx \pi/2$, поскольку $\cos \theta_* = 1/\omega^{*2}$ согласно (2.3). Будем исследовать колебания маятника в малой окрестности положения равновесия $\theta_e = \theta_*(\omega^{*2})$; с погрешностью $O(1/\omega^{*4})$ имеем

$$\theta = \theta_* + \alpha / \omega^{*2}, \quad \omega = \xi \omega^*, \quad \xi \sim 1, \quad \omega^{*2} \gg 1, \quad \kappa \sim 1 \quad (3.11)$$

$$\ddot{\alpha} + \xi^2 \alpha = -(\kappa / \omega^{*2})(1 - \alpha)u, \quad \dot{\xi} = u / \omega^{*2}, \quad u \sim 1$$

(точкой обозначена производная по быстрой фазе τ вращений основания: $\tau = \omega^* t$). Для слабо управляемой ($\varepsilon = 1/\omega^{*2} \ll 1$) нелинейной системы применимы асимптотические методы [1–3] построения приближенного решения после приведения ее к стандартной форме с вращающейся фазой аналогично (3.7). Сильная нелинейность системы (3.11) обусловлена существенной зависимостью частоты колебаний $\Omega = \xi$ от управляемой медленной переменной ξ [2, 3]. Вводя для удобства малый параметр $\varepsilon = 1/\omega^{*2}$ и переходя от переменных (α, α^*) к (a, ψ) , получим соотношения для управляемой системы в стандартной форме и соответствующие начальные и конечные условия

$$\alpha = a \sin \psi, \quad \alpha^* = a \xi \cos \psi, \quad \psi^* = \xi + O(\varepsilon)$$

$$a^* = -\varepsilon \xi^{-1} h(a, \psi)u, \quad h \equiv \kappa(1 - a \sin \psi) \cos \psi + a \cos^2 \psi, \quad a(0) = a^0 > 0 \quad (3.12)$$

$$\xi^* = \varepsilon u, \quad \xi(0) = \xi^0 = \omega^0 / \omega^*, \quad u = \frac{1}{2} u^+ + \frac{1}{2} u^- w, \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

$$a(\tau_f) = a^f \geq 0, \quad \xi(\tau_f) = \xi^f; \quad \tau_f = \min_w, \quad |w| \leq 1$$

При $a^f = 0$, $\xi^f = 1$ маятник приводится в состояние $\theta_e = \theta_*(\omega^*)$. Применение асимптотических подходов [1–3] к задаче (3.12) связано со значительными трудностями, в том числе при проведении операции усреднения. Ее решение требует привлечения численных методов для конкретных значений ε , κ , a^{0f} , ξ^{0f} , $u_{1,2}$. Могут

быть также предложены приближенные квазиоптимальные способы управления, отвечающие различным соотношениям между указанными параметрами.

Например, если выполняется сильное неравенство

$$|\Delta a| \ll |\Delta \xi| \quad (\Delta a = a^f - a^0, \Delta \xi = \xi^f - \xi^0)$$

то естественно на первом этапе управления $0 \leq \tau \leq \tau_*$ положить $u_* = \frac{1}{2}u^+ + \frac{1}{2}u^- \operatorname{sign} \Delta \xi$ и за время $\tau_* = |\Delta \xi| \varepsilon u_*|^{-1}$ привести систему (3.12) в состояние $\xi = \xi^f$; величина a при этом изменится от значения a^0 до $a_* = a^0 (\xi^0 / \xi^f)^{1/2}$, т.е. в $(\xi^0 / \xi^f)^{1/2}$ раз. На заключительном этапе $\tau_* < \tau \leq \tau_f$ осуществляется релейное периодическое управление с нулевым средним, например вида

$$\begin{aligned} u_f &= u_0 (\operatorname{sign} h - \langle \operatorname{sign} h \rangle) \operatorname{sign}(|h| - \langle h \rangle \langle \operatorname{sign} h \rangle) \operatorname{sign}(a - a^f) \\ \langle \operatorname{sign} h \rangle &= (2/\pi)(\pi - \arccos z^*), \quad z^* = -2\kappa a(a^2 + \kappa^2)^{-1} \\ \pi/2 &\leq \arccos z^* \leq \pi, \quad \langle h \rangle = a/2, \quad u_0 = \min(|u_1|, |u_2|) \end{aligned} \quad (3.13)$$

В результате применения управления u_f (3.13) на интервале $\tau_* < \tau \leq \tau_f$ значение a изменится от a^* до требуемого a^f согласно уравнению

$$a^* = -\varepsilon(u_0 / \xi^f) (|h| - \langle \operatorname{sign} h \rangle \langle h \rangle) \operatorname{sign}(a - a^f) \quad (3.14)$$

Поскольку функция u_f имеет нулевое среднее по ψ , то при этом $\xi(\tau) = \xi^f + O(\varepsilon)$. Коэффициент перед $\operatorname{sign}(a - a^f)$ в (3.14) строго отрицателен и при $\kappa > 0$ ограничен сверху. Поэтому за конечное время

$$\tau_f - \tau_* \sim |a_* - a^f| \xi^f (\varepsilon u_0 h_f)^{-1}$$

амплитуда a примет заданное значение a^f . Коэффициент h_f положителен при $\kappa > 0$ и в случае малых a справедлива оценка $h_f = 2\kappa/\pi + O(a)$. Выражение $\langle |h| \rangle$ посредством квадратур может быть получено в аналитической форме явно на основе известных корней ψ_i функции h , однако оно не приводится вследствие громоздкости. Кроме того, правая часть уравнения (3.14) зависит только от a , т.е. оно интегрируется в квадратурах.

Отметим, что режим управления (3.13), (3.14) для системы (3.12) применим также при общих предположениях относительно величин Δa , $\Delta \xi$. Однако при больших $|\Delta a|$ он может приводить к значительному ухудшению показателя качества τ_f , поскольку более эффективным может оказаться наличие начального участка, при котором происходит существенное уменьшение величины ξ совместно с требуемым изменением величины a . Цель этого изменения ξ заключается в увеличении коэффициента при управлении u для a . Режим может также содержать три участка: 1) уменьшение ξ , 2) требуемое изменение переменной a и 3) приведение переменной ξ к значению ξ^f . Эти участки реализуются отдельно посредством аналогичной процедуры (3.13), (3.14). Отметим, что уменьшение параметра ξ приведет к росту амплитуды a , $a \sim \xi^{-1/2}$, однако эффективность изменения переменной a возрастает как ξ^{-1} (см. (3.12)), что приведет к существенному выигрышу во времени при $|\Delta a| \gg |\Delta \xi|$.

Анализ уравнений (3.12) свидетельствует, что

$$a^* = -\varepsilon \kappa \xi^{-1} u \cos \psi + O(\varepsilon a), \quad a \ll 1, \quad \kappa \sim 1, \quad \xi^* = \varepsilon u \quad (3.15)$$

$$a^* = -\varepsilon \xi^{-1} u a (\cos \psi - \kappa \sin \psi) \cos \psi + O(\varepsilon \kappa), \quad \kappa \sim 1 \ll a$$

К управляемым системам (3.15) применимы указанные ранее [1–3] асимптотические

методы построения приближенного оптимального управления. Таким образом, согласно вышеизложенному построены прецизионные управления, позволяющие привести маятник в требуемое состояние. Наряду с функционалом быстрогодействия могут быть рассмотрены также другие критерии качества, типы ограничений и финальных условий [1–3].

Приведение маятника в окрестность требуемого состояния. Изложенные выше режимы высокоточного управления в малой окрестности требуемого состояния предполагают предварительное приведение фазовой точки системы в рассматриваемую область значений (см. (3.6), (3.11)). Этот управляемый процесс удобно реализовать переходом к переменным "энергия–фаза" (E, ψ) . Дифференцируя выражение для E (2.1) в силу уравнений (1.5), получим

$$\dot{E} = H(\theta, \dot{\theta}, \omega)u, \quad H \equiv \kappa \dot{\theta} \cos \theta + \omega \sin^2 \theta, \quad \dot{\omega} = u \quad (3.16)$$

Уравнение для фазы Ψ определяется квадратурами с помощью стандартной методики [2, 3]; для дальнейшего его явный вид несуществен. В режиме колебаний $U_*(\omega^2) \leq E \leq 2$ (см. (2.3)) стационарной точке $\dot{\theta} = 0$, $\theta_e = 0$ или $\theta_e = \theta_*(\omega^2)$ отвечает значение $E_* = 0$ или $E_* = U_*(\omega^2)$ (при $\omega^2 \leq 1$ или $\omega^2 > 1$). Приведение системы (3.16) (и (1.5)) в окрестность стационарной точки можно осуществить посредством локально оптимального управления [1] на основе метода "штрафов"

$$J[u] = (E_* - E(T))^2 + k^2(\omega_* - \omega(T))^2 \rightarrow \min_u, \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad (3.17)$$

$$u^* = \frac{1}{2}u^+ + \frac{1}{2}u^- \operatorname{sign}[(E_* - E)H(\theta, \dot{\theta}, \omega) + k^2(\omega_* - \omega)]$$

Здесь k^2 – весовой множитель, T – заданный явно или косвенно достаточно большой по величине момент времени приведения системы в окрестность требуемого значения E_* , ω_* . Предполагается, что величина E вычисляется согласно (2.1) на основе измерений величин $\theta, \dot{\theta}, \omega$. Выбор коэффициента $k^2 \sim 1$ проводится с помощью математического моделирования управляемого процесса после подстановки функции u^* (3.17) в систему (1.5). Можно использовать управление u^* без учета дополнительной связи между E_* и ω_* , например, привести маятник в состояние относительного вращения: $E_* > 2$. И наоборот, из режима вращений согласно (3.17) маятник приводится в некоторую окрестность требуемого состояния колебаний. Управляемые колебания и вращения при $u \sim \varepsilon$ могут быть исследованы на основе метода усреднения уравнения (3.16).

Управление вращениями маятника. С помощью асимптотического подхода относительные управляемые вращения маятника сравнительно просто исследуются в случае быстрых вращений

$$|\dot{\theta}| \gg |\omega| \sim 1$$

Изложим кратко соответствующую процедуру введения малого параметра и построения управляемой системы стандартного вида. Пусть $\dot{\theta} = \Lambda \sigma$, где $\Lambda \gg 1$ – постоянная, характеризующая скорость вращений в безразмерном времени $t' = \nu t$, например $\Lambda = \dot{\theta}^\circ$, а $\sigma \sim 1$ – неизвестная переменная. Тогда введением нового аргумента $\tau = \Lambda t'$ – быстрой фазы – уравнения (1.5) (при $\varepsilon = 1$) приводятся к искомой форме [2, 3]

$$\sigma^* = -\mu \kappa u \cos \theta - \mu \sin \theta + \mu \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.18)$$

$$\theta^* = \sigma, \quad \omega^* = \mu u, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad \mu = \Lambda^{-1} \ll 1$$

Здесь μ имеет смысл малого параметра, θ – фаза, управление $u \sim 1$; точка означает производную по τ .

Для управляемой системы (3.18) может быть поставлена и приближенно решена задача оптимального быстрогодействия типа (3.7) с переобозначениями

$$t \rightarrow \tau, \quad t_f \rightarrow \tau_f, \quad \varepsilon \rightarrow \mu, \quad a \rightarrow \sigma, \quad \gamma \rightarrow \omega, \quad \Omega \rightarrow 1$$

Решение с относительной погрешностью $O(\mu)$ дается формулами (3.9) и графиками фиг. 4. Посредством оптимального управления $u^*(\theta, \sigma, \omega)$ фазовая точка системы (3.18) приводится в μ -окрестность требуемого значения (σ^f, ω^f) на интервале $0 \leq \tau \leq \tau_f \sim \mu^{-1}$. Соответствующее решение по медленным переменным и времени на малую величину $O(\mu)$ отличается от точного.

Управление относительными колебаниями и вращениями маятника в случае нулевого "плеча". В исследованных задачах управления существенное значение имела величина κ ($\kappa \sim 1$). При $\kappa \ll 1$, в пределе при $\kappa = 0$ постановки задач должны быть изменены. С этой целью обезразмеренные уравнения движения (1.5) представим в виде

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = \varepsilon u \sin \theta \cos \theta, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad \varepsilon = \omega_0^2 \ll 1 \quad (3.19)$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\varepsilon} v, \quad -1 \leq v \leq 1, \quad u = v^2, \quad \phi \pmod{2\pi}$$

Согласно уравнениям (3.19) предполагается, что скорость вращения основания изменяется практически мгновенно и может принимать значения в пределах

$$-\omega_0 \leq \dot{\phi} = \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\varepsilon}$$

Для системы (3.19) могут быть поставлены и решены задачи оптимального изменения энергии относительных колебаний или (и) вращений маятника и ориентации основания на асимптотически большом интервале времени. Отметим, что релейное изменение скорости вращения основания можно реализовать посредством электропривода.

Приведем уравнение для θ (3.19) к стандартной форме [1-3]

$$\dot{E} = \varepsilon u \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \dot{\Psi} = \frac{2\pi}{T(E)} + \varepsilon u F(E, \theta) \quad (3.20)$$

$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \cos \theta \geq -1, \quad T(E) = \oint \frac{d\theta}{\dot{\theta}(\theta, E)}, \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{2(E + \cos \theta)}^{1/2}$$

Явный вид функции F несуществен. Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия по переменной энергии E без учета изменения фазы Ψ согласно (3.20) и угла ϕ (3.19). Затем после изменения E до требуемого значения E^f с погрешностью $O(\varepsilon)$ за время $t_f \sim \varepsilon^{-1}$ посредством постоянного управления $v = \pm 1$, $u = 1$ угловую переменную ϕ также приведем к требуемому значению $\phi^f \pmod{2\pi}$ за относительно малое время $\Delta t_f \sim \varepsilon^{-1/2}$, причем

$$E = E^f + O(\varepsilon), \quad t_f < t \leq t_f + \Delta t_f$$

Синтез оптимального управления u^* , оптимальное изменение E и другие характеристики имеют вид

$$u^* = 1/2 + 1/2 \operatorname{sign}(\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \operatorname{sign}(E^f - E)$$

$$dE/d\tau = H(E) \operatorname{sign}(E^f - E), \quad \tau = \varepsilon t$$

$$H(E) = \frac{1}{2T} \int_0^T |\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta| dt = \frac{1}{2T} \oint |\sin \theta \cos \theta| \operatorname{sign} \dot{\theta} d\theta \quad (3.21)$$

$$\tau = \operatorname{sign}(E^f - E^0) \int_{E^0}^E \frac{d\xi}{H(\xi)}, \quad \tau_f = \left| \int_{E^0}^{E^f} \frac{dE}{H(E)} \right|$$

Аналитические выражения для функций $H(E)$, $T(E)$ зависят от режима движения маятника. В режиме колебаний или вращений для $H_{v,r}$, $T_{v,r}$ имеем соответствующие явные представления [1–3]

$$H_v(E) = (1 \pm E^2) / T_v(E), \quad 0 \leq E, \quad T_v = 4K(k_v), \quad k_v^2 = 1/2(E+1), \quad |E| < 1 \quad (3.22)$$

$$H_r(E) = 1 / T_r(E), \quad T_r(E) = 2k_r K(k_r), \quad k_r^2 = 2/(E+1), \quad E > 1$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода по модулю k , $k^2 < 1$.

Из соотношений (3.22) следует, что эффективность управления u^* в режиме вращений возрастает при росте E , поскольку

$$T_r(E) \approx 2\pi / \sqrt{2E}, \quad E \rightarrow \infty$$

В режиме колебаний ($-1 < E < 1$) эффективность управления убывает при $E \downarrow -1$, а именно, $E^* \approx (1+E)/\pi$, что приводит к неограниченному росту времени "входа" в положение или "выхода" из положения покоя маятника ($E^{f,0} = -1$) согласно оценке $\tau \sim |\ln(E+1)|$. Эффективность также убывает при $E \uparrow 1$, поскольку $T_v \rightarrow \infty$ согласно оценке

$$T_v \approx 4 \ln(2\sqrt{2} / \sqrt{1-E}) \sim |\ln(1-E)|$$

Однако данная логарифмическая особенность интегрируема, что приводит к конечному времени "перехода" через сепаратису ($E = 1$). Аналогично при уменьшении E в режиме вращений ($E > 1$) переход через значение $E = 1$ также требует конечного времени, так как выражение для $T_r(E)$ имеет аналогичную логарифмическую асимптотику.

Хотя вблизи сепаратисы движения теряют периодический характер и это затрудняет применение метода усреднения, вносимая при этом погрешность, вследствие "рассеивающего свойства" сепаратисы, повлечет асимптотически малую погрешность $O(\epsilon |\ln \epsilon|)$ [7], удовлетворительную в смысле требуемой точности при $\epsilon > 0$ достаточно малом.

Автор благодарит Г.В. Костина за помощь в построении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. Akulenko L.D. Problems and Methods of Optimal Control. Dordrecht: Kluwer, 1994. 357 p.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621–632.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1999