

УДК 531.36:534.1

© 2000 г. А.А. Зевин

НЕЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЕМЕЙСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются однопараметрические семейства периодических решений, рождающиеся из положений равновесия автономной системы. Показано, что они могут быть разделены на семейства первого и второго рода; семейства одного рода не могут совпасть при продолжении их по параметру. В результате получена нижняя оценка числа семейств, продолжимых до сколь угодно больших значений нормы или периода, а также оценка числа периодических решений с заданным минимальным периодом. Для гамильтоновых систем, удовлетворяющих некоторым условиям симметрии, установлены дополнительные свойства рассматриваемых семейств. Результаты иллюстрируются на примере многозвенного маятника.

1. Введение. Рассматривается зависящая от параметра λ автономная система

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in R^n, \quad f(x, \lambda) \in C^3(R^n \times R, R^n) \quad (1.1)$$

а также система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(x) \in C^3(R^n, R^n) \quad (1.2)$$

допускающая однозначный интеграл

$$H(x(t)) \equiv \lambda = \text{const} \quad (1.3)$$

Система (1.2), (1.3) может быть сведена к виду (1.1) исключением одной из переменных с помощью интеграла (1.3). Обратно, введя в (1.1) дополнительную переменную $x_{n+1} = \lambda$ и уравнение $\dot{x}_{n+1} = 0$, приходим к системе (1.2), (1.3), где $H(x) = x_{n+1}$. Заметим, однако, что полученные ниже результаты применимы непосредственно к каждой из указанных систем.

К виду (1.2), (1.3) принадлежат, в частности, системы Ляпунова и гамильтоновы системы (для последних некоторые результаты, аналогичные полученным ниже, установлены ранее [1]).

Пусть $x(\lambda)$ – семейство положений равновесия системы (1.1) ($f(x(\lambda), \lambda) = 0$). Если при некотором $\lambda = \lambda_k$ матрица $f_x(x(\lambda_k), \lambda_k)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений $i\omega$, причем другие собственные значения не кратны $i\omega$ и $\alpha'(\lambda_k) \neq 0$ ($\alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$ – продолжение по параметру λ собственного значения $i\omega$), то в соответствии с теоремой Хопфа [2] при малых значениях параметра s существует единственное семейство периодических решений $x(t, \lambda(s)) = x(t + T(s), \lambda(s))$, такое, что

$$x(t, \lambda(s)) \rightarrow x_k = x(\lambda_k), \quad T(s) \rightarrow 2\pi/\omega, \quad \lambda(s) \rightarrow \lambda_k \quad \text{при } s \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

В системе (1.2), (1.3) положения равновесия x_k , как правило, изолированы. В соответствии с теоремой Ляпунова [3] существование семейств периодических решений вида (1.4) также гарантируется отсутствием собственных значений, кратных $i\omega$. Заметим, что это условие, как и условие $\alpha'(\lambda_k) \neq 0$ в теореме Хопфа, в случае общего положения (который и рассматривается в дальнейшем) выполняется.

Цель данной работы – нелокальный анализ семейств (1.4); при этом будут использованы следующие результаты [4, 5].

При возрастании параметра s возможно ветвление решений, так что продолжение по s при достаточно больших s , вообще говоря, неединственно. Однако из всего "дерева" таких решений можно выделить однопараметрическое семейство $x(t, \lambda(s))$, обладающее следующими свойствами.

При продолжении по s семейство $x(t, \lambda(s))$ может оканчиваться в некотором положении равновесия x_q (в этом случае можно считать, что $x(t, \lambda(s))$ совпадает с некоторым семейством, рождающимся из x_q ; при этом возможно $q = k$). В противном случае $x(t, \lambda(s))$ продолжимо до сколь угодно большого значения

$$M(s) = T(s) + \|x(s)\|, \quad \|x(s)\| = |\lambda(s)| + \max_t \|x(t, \lambda(s))\| \quad (1.5)$$

Непрерывная функция $T(s)$ равна минимальному периоду $T_{\min}(s)$ решения $x(t, \lambda(s))$ за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек s_r , в которых $T_{\min}(s_r) = T(s_r)/q_r$, где $q_r > 1$ – целое число (в таких точках семейства с минимальным периодом $T(s_r)/q_r$ могут ответвляться от $x(t, \lambda(s))$).

Решению $x(t, \lambda(s))$ уравнения (1.1) или (1.2) отвечает уравнение в вариациях

$$\dot{y} = A(t, s)y, \quad A(t, s) = f_x(x(t, \lambda(s))) \quad (1.6)$$

Обозначим $\rho_k(s)$ ($k = 1, \dots, n$) мультипликаторы уравнения (1.6). Ввиду автономности рассматриваемых систем оно имеет периодическое решение $y_1 = \dot{x}(t, \lambda(s))$; ему отвечает мультипликатор $\rho_1(s) = 1$. При наличии интеграла (1.3) такому решению отвечает двукратный мультипликатор $\rho_1(s) = \rho_2(s) = 1$ [6].

Зафиксировав значение некоторой координаты x_k , рассмотрим соответствующее отображение Пуанкаре $G(v, \lambda)$. Пусть траектория $x(t, \lambda(s))$ пересекает плоскость $x_k = C$ в точке $v(s)$, тогда

$$v(s) = G(v(s), \lambda(s)) \quad (1.7)$$

Как известно, собственные значения якобиевой матрицы $B(s) = G_v(v(s), \lambda(s))$ равны $\rho_k(s), \dots, \rho_n(s)$ ($k = 2$ для системы (1.1) и $k = 3$ для системы (1.2), (1.3)).

Положим $\lambda_s(s) = d\lambda(s)/ds$ и $d(s) = \det[I - B(s)]$, где I – единичная матрица. Очевидно, что

$$d(s) = (1 - \rho_k(s))(1 - \rho_{k+1}(s)) \dots (1 - \rho_n(s)) \quad (1.8)$$

Если $d(s) \neq 0$, то в соответствии с теоремой о неявных функциях решение $v(s)$ уравнения (1.7) единственным образом продолжимо по параметру λ для достаточно малых $|\lambda - \lambda(s)|$, поэтому $\lambda_s(s) \neq 0$. Если $d(s_k) = 0$, то $\lambda_s(s_k) = 0$ [4], и наоборот. Таким образом, нули функций $\lambda_s(s)$ и $d(s)$ совпадают. В случае общего положения все нули простые.

2. Нелокальное продолжение решений. Пусть семейство $x(t, \lambda(s)) = x(t + T(s), \lambda(s))$ рождается из некоторого положения равновесия x_k . Обозначим a_k – число положительных собственных значений матрицы $f_x(x_k)$.

Определение. Будем называть $x(t, \lambda(s))$ семейством первого (второго) рода, если функция $(-1)^{a_k} \lambda(s)$ возрастает (убывает) при малых s .

Теорема 1. Семейства одного рода не могут совпасть при продолжении их по параметру.

Доказательство. Предположим, что семейства $x_1(t, \lambda_1(s))$ и $x_2(t, \lambda_2(s))$, рождающиеся из положений равновесия x_k и x_p (возможно $k = p$), совпадают. Тогда $x_1(t, \lambda_1(s)) = x_2(t, \lambda_2(s_* - s))$, $x_1(t, \lambda_1(s_*)) = x_p$ и $\lambda_1(s) = \lambda_2(s_* - s)$ при некотором s_* . Пусть одна из функций $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ возрастает, другая убывает при малых s , тогда $d\lambda_1(s)/ds$ и,

следовательно, $d(s)$ имеет на $(0, s_*)$ четное число нулей; следовательно, знаки $d(0)$ и $d(s_*)$ совпадают. Как видно из равенства (1.8), последнее имеет место, если при $s = 0$ и $s = s_*$ число мультипликаторов $\rho_q \in (1, \infty)$ одновременно четно либо нечетно (комплексные мультипликаторы попарно сопряжены и не влияют на знак $d(s)$). Такие мультипликаторы отвечают положительным собственным значениям μ_q и ν_q матриц $f_x(x_k)$ и $f_x(x_p)$ ($\rho_q(0) = \exp(\mu_q T_1(0))$ и $\rho_q(s_*) = \exp(\nu_q T_1(s_*))$), поэтому величины a_k и a_p одновременно четны либо нечетны. Так как, по предположению, одна из функций $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ возрастает, другая убывает при малых s , то семейства $x_1(t, \lambda_1(s))$ и $x_2(t, \lambda_2(s))$ имеют разный род.

Если же функции $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ изменяются в одном направлении, то $d(s)$ имеет на $(0, s_*)$ нечетное число нулей и, следовательно, одна из величин a_k , a_p четна, другая нечетна, так что рассматриваемые семейства разного рода.

Таким образом, во всех случаях семейства, совпадающие при продолжении их по s , имеют разный род. Теорема доказана.

Предположим, что система имеет конечное число положений равновесия x_k , λ_k ($k = 1, \dots, p$) и, следовательно, конечное число соответствующих семейств периодических решений. Обозначим N_1 и N_2 общее число семейств первого и второго рода соответственно. Как следует из теоремы 1, при продолжении их по параметру могут совпадать только семейства разного рода. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. По меньшей мере $|N_1 - N_2|$ семейств периодических решений продолжимо по параметру s до сколь угодно больших значений M .

Очевидно, что семейства $x_1(t, \lambda_1(s))$ и $x_2(t, \lambda_2(s))$, рождающиеся из одного положения равновесия, имеют одинаковый род, если $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ изменяются в одном направлении при малых s , т.е., если соответствующие бифуркации одного типа (суперкритические или субкритические). Поэтому в системе с одним положением равновесия число семейств, продолжимых по s до сколь угодно больших значений M , не меньше $|n_1 - n_2|$, где n_1 и n_2 — число суперкритических и субкритических бифуркаций.

Замечание. Было показано [4], что положению равновесия x_k , λ_k системы (1.1), которому отвечает одно семейство периодических решений, можно приписать индекс +1 ("источник") или -1 ("сток") в зависимости от знака $\alpha'(\lambda_k)$ ($\alpha(\lambda_k) = 0$) и числа a_k положительных собственных значений матрицы $f_x(x_k)$. При этом установлено, что семейства, отвечающие положениям равновесия с различными индексами, не могут совпасть при продолжении по параметру. Такая классификация неприменима к системе (1.2), (1.3), так как здесь положения равновесия обычно изолированы (в то время как в системе (1.1) функция $\alpha(\lambda)$ отвечает континууму положений равновесия $x(\lambda)$); кроме того, ему могут отвечать несколько семейств периодических решений. Поэтому предлагаемая в данной работе классификация, применяемая равным образом к системам (1.1) и (1.2), (1.3), является в указанном смысле более общей.

3. Существование решений с заданным периодом. Рассмотрим задачу о существовании в системах (1.1) и (1.2), (1.3) периодических решений с заданным минимальным периодом T . Заметим, что известные результаты такого рода относятся, в основном, к гамильтоновым системам (см., например, обзор [7]).

Без ограничения общности полагаем, что в системе (1.1) $x_k = 0$, $\lambda_k = 0$ для некоторого k , тогда $f(0, 0) = 0$. Предположим, что для некоторых постоянных L , C и r

$$\|f(x, \lambda)\| < L\|x\| + C \quad \text{при} \quad \|x\| + |\lambda| > r \quad (3.1)$$

В уравнении (1.2) можно считать $f(0) = 0$, поэтому аналогично полагаем

$$\|f(x)\| < L\|x\| \quad \text{при} \quad \|x\| > r \quad (3.2)$$

Обозначим $N_1(T)$ и $N_2(T)$ – число семейств $x_k(t, \lambda(s))$ первого и второго рода, удовлетворяющих дополнительному условию $T_k(0) = 2\pi/\omega_k < T$.

Теорема 2. Для почти всех $T < 2\pi/L$ существует не менее $|N_1(T) - N_2(T)|$ периодических решений с минимальным периодом T .

Доказательство. Как видно из доказательства предыдущей теоремы, по меньшей мере $|N_1(T) - N_2(T)|$ семейств периодических решений $x_k(t, \lambda(s))$ с начальными периодами $T_k(0) < T$ не могут совпасть друг с другом при продолжении по s . Следовательно, такое семейство либо совпадает с семейством другого рода $x_p(t, \lambda(s))$, начальный период которого $T_p(0) > T$, либо продолжимо по s до произвольно больших значений $T_k(s)$ или $\|x_k(s)\|$. Ясно, что в первых двух случаях $T_k(s) = T$ при некотором s ; покажем, что тот же вывод справедлив и в последнем случае.

В силу (3.1) найдутся постоянные L' и C' , такие, что для всех $\lambda \in R$ и $x \in R^n$

$$\|f(x, \lambda)\| < L'\|x\| + C' \quad (3.3)$$

Следовательно,

$$d\|x\|/dt = (x, \dot{x})/\|x\| \leq \|\dot{x}\| = \|f(x, \lambda)\| \leq L'\|x\| + C' \quad (3.4)$$

Поэтому для любого решения $x(t)$ уравнения (1.1) справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq (\|x(t_0)\| + C'/L') \exp[L'(t - t_0)] - C'/L' \quad (3.5)$$

Предположим, что

$$\max_t \|x_k(t, \lambda(s))\| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty$$

а $T_k(s)$ и $\lambda(s)$ остаются ограниченными. Так как минимальное расстояние между экстремальными значениями $\|x_k(t, \lambda(s))\|$ меньше $T_k(s)$, то в силу неравенства (3.5) $\|x_k(t, \lambda(s))\| \rightarrow \infty$ для всех t , поэтому $\|x_k(t, \lambda(s))\| > r$ при больших s . Но тогда в соответствии с теоремой Йорка [8] при условии (3.1) соответствующий период $T_k(s) > 2\pi/L > T$; следовательно, $T_k(s) = T$ при некотором s . Ясно, что тот же вывод справедлив, если $\lambda(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

В системе (1.2), (1.3) величина $\lambda(s) = H(x(s))$ остается ограниченной при конечных $\|x(s)\|$, поэтому $\|x(s)\| \rightarrow \infty$ при $M(s) \rightarrow \infty$, так что приведенные выше рассуждения сохраняются.

Как отмечалось во введении, величина $T_k(s)$ для почти всех s равна минимальному периоду решения $x_k(t, s)$. Теорема доказана.

Если

$$\lim(\|f(x, \lambda)\| / \|x\|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| + |\lambda| \rightarrow \infty$$

то постоянная L в неравенстве (3.1) может быть принята сколь угодно малой, поэтому доказанная теорема справедлива при любых T . В частности, в случае единственного положения равновесия число T -периодических решений не меньше $|n_1(T) - n_2(T)|$, где $n_1(T)$ и $n_2(T)$ – число суперкритических и субкритических бифуркаций с начальными периодами, меньшими T .

4. Гамильтоновы системы. Рассмотрим более детально гамильтоновы системы

$$\dot{x} = JH_x(x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in R^{2n} \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) допускает интеграл (1.3), поэтому полученные выше результаты сохраняются. Очевидно, что для семейства $x(t, \lambda(s))$, отвечающего положению равновесия x_k , энергия системы $\lambda(s)$ изменяется в том же направлении, что и для соот-

ветствующего семейства $\mathbf{x}^0(t, s)$ линеаризованной системы ($H^0(\mathbf{x}) = (H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}, \mathbf{x})$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ означает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Полагая без ограничения общности $\mathbf{x}_k = 0$, примем $\mathbf{x}^0(t, s) = s\mathbf{x}(t)$, тогда

$$\lambda_s(0) = 2s(H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t))$$

Как известно, в гамильтоновых системах со знакоопределенным гессианом $H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0)$ все собственные значения матрицы $JH_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0)$ чисто мнимые, поэтому $a_k = 0$. В результате при $H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0) > 0$ все семейства имеют первый род ($\lambda_s(0) > 0$), при $H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0) < 0$ – второй ($\lambda_s(0) < 0$). Если гессиан $H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0)$ не знакоопределенный, то в системе могут существовать семейства разного рода.

Предположим, что линеаризованная система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = J S \mathbf{x}, \quad S = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

где C и L – симметрические матрицы порядка n , причем матрица L положительно определенная. В частности, система

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z} \in R^n, \quad M > 0 \quad (4.3)$$

приводится к виду (4.2), если положить $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1$, $M\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $L = M^{-1}$.

Для колебательного решения уравнения (4.2) $\mathbf{x} = \mathbf{c} \exp(i\omega t)$ ($\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$) имеем $i\omega \mathbf{c}_1 = L\mathbf{c}_2$, $-i\omega \mathbf{c}_2 = C\mathbf{c}_1$, поэтому

$$(S\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (C\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1) + (L\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = 2(L\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) > 0 \quad (L > 0)$$

Таким образом, в рассматриваемой системе для любого семейства $\lambda_s(0) > 0$.

В приложениях часто встречаются гамильтонианы, удовлетворяющие некоторым условиям симметрии; покажем, что рассматриваемые семейства решений обладают при этом некоторыми дополнительными свойствами.

Предположим сначала, что

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, -\mathbf{p}) \quad (4.4)$$

где $\mathbf{q} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{p} = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ – обобщенные координаты и импульсы. Такое соотношение, в частности, выполняется, когда гамильтониан представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий механической системы; при этом

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{p,k=1}^n a_{pk}(\mathbf{q}) p_p p_k + V(\mathbf{q}) \quad (4.5)$$

Утверждение 1. В системе (4.1), (4.4) семейство $\mathbf{x}(t, s) = (\mathbf{q}(t, s), \mathbf{p}(t, s))$ при соответствующем выборе начала отсчета t удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{q}(t, s) = \mathbf{q}(-t, s), \quad \mathbf{p}(t, s) = -\mathbf{p}(-t, s) \quad (4.6)$$

Доказательство. В силу соотношения (4.4)

$$H_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, -\mathbf{p}), \quad H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, -\mathbf{p}) \quad (4.7)$$

Поэтому, наряду с $\mathbf{x}(t, s)$, функция $\mathbf{x}_*(t, s) = (\mathbf{q}(-t, s), -\mathbf{p}(-t, s))$ также служит решением системы (4.1). Так как решение $\mathbf{x}(t, s)$ при малых s единственно с точностью до сдвига по t , то $\mathbf{x}_*(t, s) = \mathbf{x}(t + l, s)$ при некотором l . Сделав преобразование $t \rightarrow t + l/2$, найдем, что соответствующее решение $\mathbf{x}(t, s)$ удовлетворяет соотношениям (4.6). Если при некотором s_* это соотношение нарушается, то при $s > s_*$ существует также семейство $\mathbf{x}_*(t, s)$ с тем же минимальным периодом $T(s)$, совпадающее с $\mathbf{x}(t, s)$ при $s = s_*$. Последнее, однако, невозможно, так как в случае общего положения минимальный

период семейств, ответвляющихся от $x(t, s)$, в окрестности точки ветвления близок к $T(s)/q$, где $q > 1$ [4].

Предположим теперь, что

$$H(x) = H(-x) \quad (4.8)$$

В частности, для гамильтониана (4.5) это условие выполняется, если $a_{pk}(q) = a_{pk}(-q)$ ($p, k = 1, \dots, n$) и $V(q) = V(-q)$.

В силу (4.8) $H_x(0) = 0$, т.е. $x = 0$ – положение равновесия системы; пусть $x(t, s)$ – соответствующее семейство периодических решений.

Утверждение 2. При условии (4.8) семейство $x(t, s)$ удовлетворяет соотношению

$$x(t, s) = -x(t + T/2, s) \quad (4.9)$$

Доказательство. В силу условия (4.8) функция $-x(t, s)$ также удовлетворяет уравнению (4.1). При малых s ввиду единственности решения $-x(t, s) = x(t + l, s)$ при некотором $l < T$. Следовательно, $x(t + 2l, s) = x(t, s)$, т.е. $l = T/2$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Следствие 2. При условии (4.8) семейство $x(t, s)$ не может оканчиваться в положении равновесия $x_k \neq 0$.

Действительно, в силу соотношения (4.9) среднее значение $x(t, s)$ на $(0, T(s))$ равно нулю, что, очевидно, не выполняется для решений, близких к $x_k \neq 0$.

Заметим, что из приведенных выше утверждений не следует, что в рассматриваемых системах отсутствуют решения, не удовлетворяющие соотношению (4.6) или (4.9); просто такие решения нельзя получить продолжением ляпуновских семейств по параметру.

5. Пример. Проиллюстрируем полученные результаты на примере свободных колебаний n -звенного маятника (фигура). Кинетическая и потенциальная энергия системы такова:

$$K = \frac{1}{2} M_1 \left\{ \left[\sum_{k=1}^s l_k \dot{x}_k \sin x_k \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^s l_k \dot{x}_k \cos x_k \right]^2 \right\} \quad (5.1)$$

$$V = g \sum_{j=1}^n [l_j (1 - \cos x_j) M_s]; \quad M_s = m_s + m_{s+1} + \dots + m_n$$

где x_s, m_s и l_s – угловые координаты, массы и длины звеньев, g – ускорение силы тяжести.

Рассматриваемая система допускает интеграл

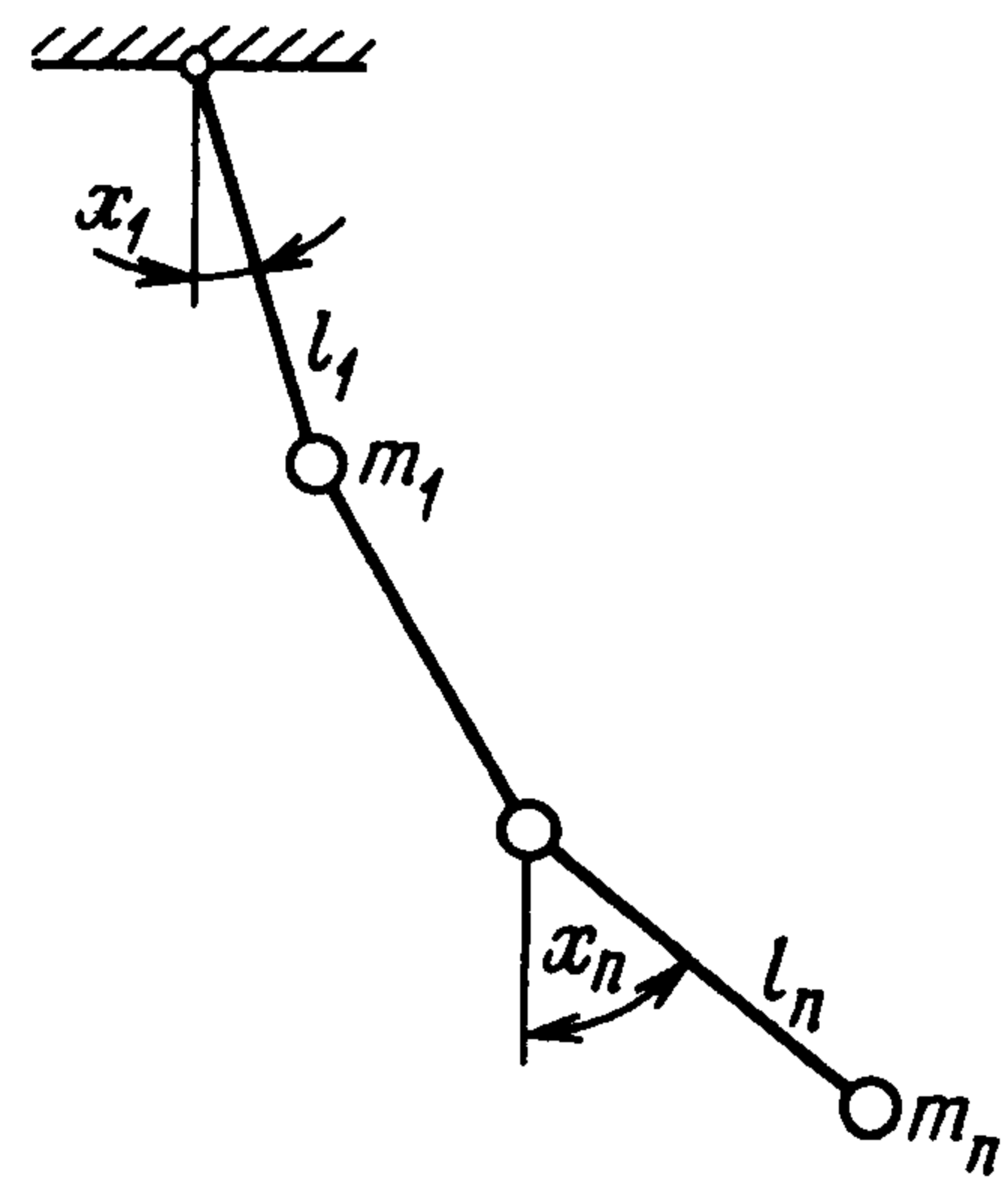
$$K(x(t), \dot{x}(t)) + V(x(t)) \equiv \lambda \quad (5.2)$$

В положении равновесия $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ координаты $x_q^k = 0$ или π , поэтому общее число положений равновесия равно 2^n . Линеаризованная в окрестности x_k система имеет вид (4.3), где

$$C = \text{diag}(c_1^k, \dots, c_n^k), \quad c_s^k = gl_s \cos x_s^k M_s \quad (5.3)$$

$$M = [m_{pq}]^n, \quad m_{pq} = l_p l_q \cos x_p^k \cos x_q^k M_q \quad (q \geq p), \quad m_{qp} = m_{pq}$$

Так как $M > 0$, то количество положительных собственных значений m матрицы $M^{-1}C$ равно числу положительных c_s^k , т.е. числу координат $x_s^k = 0$. В случае общего положения



каждому такому значению $(\omega_q^k)^2$ отвечает семейство периодических решений исходной системы $\mathbf{x}_q^k(t, s)(\mathbf{x}_q^k(t, s) \rightarrow \mathbf{x}_k, T_q^k(s) \rightarrow 2\pi/\omega_q^k$ при $s \rightarrow 0$).

Число положений равновесия с заданным m равно числу сочетаний C_n^m ; следовательно, общее число рассматриваемых семейств равно $N = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

Очевидно, что в координатах $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$ кинетическая и потенциальная энергия системы удовлетворяют соотношениям

$$K(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = K(\mathbf{z}, -\dot{\mathbf{z}}), \quad K(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = K(-\mathbf{z}, -\dot{\mathbf{z}}), \quad V(\mathbf{z}) = V(-\mathbf{z})$$

Поэтому для соответствующего гамильтониана $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ выполняются условия (4.4) и (4.8). В результате ляпуновские семейства удовлетворяют соотношениям (4.6) и (4.9). Возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\mathbf{x}_q^k(t, s) = \mathbf{x}_q^k(-t, s), \quad \dot{\mathbf{x}}_q^k(t, s) = -\dot{\mathbf{x}}_q^k(-t, s) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{x}_q^k(t, s) - \mathbf{x}_k = -\mathbf{x}_q^k(t + T/2, s) + \mathbf{x}_k$$

Так как линеаризованная система имеет вид (4.3), то, как показано выше, для всех семейств $\lambda_s(0) > 0$, поэтому семейства, рождающиеся из одного и того же положения равновесия, имеют одинаковый род (первый либо второй, если число значений $a_k = n - m_k$ четно либо нечетно, соответственно). Следовательно, такие семейства не могут совпасть при продолжении их по параметру. С другой стороны, в силу первого и третьего соотношений (5.4) $\mathbf{x}_q^k(T/4, s) = \mathbf{x}_k$, поэтому семейства, выходящие из различных положений равновесия $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}_l$, также не совпадают. Таким образом, каждое семейство продолжимо до сколь угодно большого значения нормы или периода.

Покажем, что в любом случае $T_q^k(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Действительно, как видно из соотношения (5.1),

$$K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \geq 0, \quad 0 \leq V(\mathbf{x}) \leq V_* = 2g \sum_{s=1}^n l_s M_s$$

В силу первого соотношения (5.4)

$$\dot{\mathbf{x}}_q^k(0, s) = \mathbf{0}, \quad K(\mathbf{x}_q^k(0, s), \dot{\mathbf{x}}_q^k(0, s)) = 0$$

Учитывая равенство (5.2), найдем $\lambda \leq V_*$, и следовательно

$$K(\mathbf{x}_q^k(t, s), \dot{\mathbf{x}}_q^k(t, s)) \leq V_*$$

при всех t . Так как $K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ — положительно определенная квадратичная форма относительно $\dot{\mathbf{x}}$ с периодическим по $\mathbf{x}$ коэффициентами, то из последнего неравенства следует, что

$$\|\dot{\mathbf{x}}_q^k(t, s)\| \leq c$$

для некоторой постоянной c и любых t и s . Поэтому для любой координаты имеем

$$|x_{qp}^k(t, s) - x_{qp}^k(T/4)| \leq c|t - T/4|$$

Следовательно, период $T_q^k(s)$ стремится к бесконечности одновременно с $\|\mathbf{x}_q^k(s)\|$.

Пусть ω_* — наименьшая частота свободных колебаний линеаризованных при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ ($k = 1, \dots, 2^n$) систем. Из полученного выше результата следует, что для любого $T > 2\pi/\omega_*$ существует не менее N периодических решений вида (5.4) с наименьшим периодом T .

Например, при $n = 2$ общее число ляпуновских семейств $N = C_2^1 + 2C_2^2 = 4$ (по одному семейству рождается из положений равновесия $\mathbf{x}^1 = (0, \pi)$ и $\mathbf{x}^2 = (0, \pi)$ и два семейства

рождаются из $x^3 = (0, 0)$). Все семейства $x_q^k(t, s)$ продолжимы по s до сколь угодно больших значений M , причем периоды $T_q^k(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zevin A.A. On the prescribed period problem for autonomous Hamiltonian system // Electr. J. Different. Equat. 1998. N 5. 9 p.
2. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. N.Y.: Springer, 1976. = Марсден Дж., Мак-Кракен К. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
3. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
4. Mallet-Paret J., Yorke J.A. Snakes: oriented families of periodic orbits, their sources, sinks and continuation // J. Different. Equat. 1982. V. 43. N 3. P. 419–450.
5. Alligood K.T., Yorke J.A. Families of periodic orbits: virtual periods and global continuability // J. Different. Equat. 1984. V. 55. N 1. P. 59–71.
6. Poincare H. Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892. = Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
7. Rabinowitz P.H. Critical point theory and applications to differential equations: a survey // Topological Nonlinear Analysis. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Boston: MA : Birkhauser. 1995. V. 15. P. 463–513.
8. Yorke J.A. Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. N 2. P. 509–512.

Днепропетровск
e-mail: zevin@transmag.vidrua.dp.ua

Поступила в редакцию
16.IV.1999