

УДК 531.36; 62–50

© 2000 г. К.П. Андрейченко, Д.К. Андрейченко, А.Б. Смарунь

ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Исследуются вопросы построения и анализа динамических моделей линейных дискретно-континуальных систем, которые представляются в форме матриц квазирациональных дробей, являющихся отношениями квазимногочленов. Формулируются теоремы о корнях характеристического квазимногочлена и об устойчивости динамических моделей. Рассматривается пример динамического моделирования упругого звена манипулятора.

1. Уравнения движения. При управлении движением и анализе устойчивости систем с деформируемыми объектами управления [1–4] их механические модели представляются совокупностью абсолютно жестких и упругих тел, динамически связанных через границы раздела. Уравнения движения таких систем (дискретно-континуальных систем (ДКС) по терминологии [1]) записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения абсолютно жестких тел, уравнений с частными производными движения упругих тел с граничными условиями, условиями связи в виде сосредоточенных на абсолютно жестких телах граничных сил и моментов, а также начальных условий.

Рассмотрим уравнения движения ДКС общего вида, приведенные к безразмерной форме

$$F[x(t), y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), n(t); \varepsilon] = 0, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.1)$$

$$Gw(z, t) = V(z, x, y, \dot{y}, \ddot{y}; \varepsilon) \quad (1.2)$$

$$z = 0: w(0, t) = P_1, \quad w'(0, t)E = P_2; \quad z = 1: w(1, t) = P_3, \quad w'(1, t)E = P_4 \quad (1.3)$$

$$E = [1, \dots, 1]^T, \quad ()' = \partial / \partial z, \quad P_j = P_j(y; \varepsilon), \quad j = 1, \dots, 4$$

$$n(t) = gf(w(z, t)) \quad (1.4)$$

$$t = 0: y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad w(z, 0) = w_0(z), \quad \partial w(z, 0) / \partial t = \dot{w}_0(z) \quad (1.5)$$

Здесь (1.1) – обыкновенные дифференциальные уравнения движения абсолютно жестких тел, (1.2) – уравнения с частными производными движения упругих тел, (1.3) – граничные условия, (1.4) – условия связи, (1.5) – начальные условия; $x(t)$ – k_x -мерный вектор входных функций – сосредоточенных возмущений, $y(t)$ – k_y -мерный вектор выходных функций (параметров движения абсолютно жестких тел) – реакций системы, $w(z, t)$ – k_w -мерный вектор упругих смещений деформируемых тел, z – k_z -мерный вектор пространственных координат, G – диагональная матрица операторов, содержащих частные производные по z и t , $n(t)$ – k_n -мерный вектор сосредоточенных на абсолютно жестких телах граничных сил и моментов (от упругих тел), g – диагональная матрица операторов связи, F и V , P_j – k_y -мерная и k_w -мерные вектор-функции от соответствующих вектор-аргументов, ε – малый параметр задачи; точка означает производную по времени t .

Если

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = B = \text{const}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C = \text{const}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = K = \text{const}, \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} = M = \text{const} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = A = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = V_1(z), \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} = V_2(z), \quad \frac{\partial V}{\partial \ddot{y}} = V_3(z), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = V_4(z)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial y} = \alpha_j = \text{const}, \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial P_j}{\partial \varepsilon} = 0; \quad j = 1, \dots, 4$$

то из соотношений (1.1)–(1.5) следуют линейные уравнения движения ДКС

$$M\ddot{y} + K\dot{y} + Cy + An = Bx, \quad Lw(z, t) = V_1y + V_2\dot{y} + V_3\ddot{y} + V_4x$$

$$z = 0: \quad w(0, t) = \alpha_1y, \quad w'(0, t)E = \alpha_2y$$

$$z = 1: \quad w(1, t) = \alpha_3y, \quad y'(1, t)E = \alpha_4y \quad (1.7)$$

$$n(t) = gf(w(z, t))$$

$$t = 0: \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad w(z, 0) = w_0(z), \quad \partial w(z, 0) / \partial t = \dot{w}_0(z)$$

где L – диагональная матрица линейного оператора.

Далее, подобно традиционному подходу [1–4], ограничимся рассмотрением линейных уравнений движения ДКС.

2. Динамическая модель линейной ДКС. Пусть вектор-функции $x(t)$, $y(t)$, $n(t)$, $w(z, t)$, удовлетворяют условиям существования интегрального преобразования Лапласа. Полагая начальные условия нулевыми, из (1.7) получаем уравнения линейной ДКС в изображениях (которые обозначаются тильдой, λ – произвольный комплексный параметр)

$$(M\lambda^2 + K\lambda + C)\tilde{y}(\lambda) + A\tilde{n}(\lambda) = B\tilde{x}(\lambda) \quad (2.1)$$

$$L\tilde{w}(z, \lambda) = (V_1 + V_2\lambda + V_3\lambda^2)\tilde{y}(\lambda) + V_4\tilde{x}(\lambda) \quad (2.2)$$

$$z = 0: \quad \tilde{w}(0, \lambda) = \alpha_1\tilde{y}(\lambda), \quad \tilde{w}'(0, \lambda)E = \alpha_2\tilde{y}(\lambda)$$

$$z = 1: \quad \tilde{w}(1, \lambda) = \alpha_3\tilde{y}(\lambda), \quad \tilde{w}'(1, \lambda)E = \alpha_4\tilde{y}(\lambda) \quad (2.3)$$

$$\tilde{n}(\lambda) = gf(\tilde{w}(z, \lambda)) \quad (2.4)$$

Интегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение (2.2) по z при граничных условиях (2.3). Полагая, что уравнения (2.2), (2.3) позволяют найти точное решение $\tilde{w}(z, \lambda) = \tilde{w}^0[z, \lambda, \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)]$, и подставляя его в соотношение (2.4), имеем

$$\tilde{n}(\lambda) = \tilde{n}^0[\lambda, \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)]$$

Преобразуя выражение для $A\tilde{n}(\lambda)$ и подставляя его в (2.1), находим изображение выходной вектор-функции динамической системы

$$\tilde{y}(\lambda) = [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)]\tilde{x}(\lambda), \quad \mu = 1, \dots, k_y; \quad \chi = 1, \dots, k_x \quad (2.5)$$

$$[\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] = [(M + M_w(\lambda))\lambda^2 + (K + K_w(\lambda))\lambda + (C + C_w(\lambda))]^{-1}[B + B_w(\lambda)]$$

где $M_w(\lambda)$, $K_w(\lambda)$, $C_w(\lambda)$, $B_w(\lambda)$ – матрицы трансцендентных функций от иррациональных выражений от λ .

Таким образом, получена динамическая модель линейной ДКС в форме матрицы $[\Phi_{\mu\chi}(\lambda)]$ обобщенных передаточных функций размера $k_y \times k_x$. В самом общем случае обобщенные передаточные функции представляются в виде квазирациональных

дробей

$$\Phi_{\mu\chi}(\lambda) = Q_{\mu\chi}(\lambda) / D(\lambda) \quad (2.6)$$

$$D(\lambda) = \det[(M + M_w(\lambda))\lambda^2 + (K + K_w(\lambda))\lambda + (C + C_w(\lambda))] =$$

$$= A_0(\lambda)\lambda^n + A_1(\lambda)\lambda^{n-1} + \dots + A_n(\lambda)$$

$$Q_{\mu\chi}(\lambda) = B_0(\lambda)\lambda^m + B_1(\lambda)\lambda^{m-1} + \dots + B_m(\lambda)$$

$$\mu = 1, \dots, k_y; \chi = 1, \dots, k_x, \quad n > m$$

где $Q_{\mu\chi}(\lambda)$ и $D(\lambda)$ – квазимногочлены с переменными коэффициентами, n и m – целые положительные числа. Здесь и далее у $B_0(\lambda), B_1(\lambda), \dots, B_m(\lambda)$, m индексы $\mu\chi$ для краткости опущены.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – абсолютно интегрируемые на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ вектор-функции. Тогда, используя преобразование Фурье, имеем

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_{\mu\chi}(i\omega)] \tilde{x}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \tilde{x}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Так как $x(t) = 0$ при всех $t < 0$, в физически возможной системе реакция $y(t)$ должна быть действительной вектор-функцией от действительной переменной t с областью определения $[0, \infty)$. Для этого достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re} Q_{\mu\chi}(-i\omega) = \operatorname{Re} Q_{\mu\chi}(i\omega), \quad \operatorname{Im} Q_{\mu\chi}(-i\omega) = -\operatorname{Im} Q_{\mu\chi}(i\omega) \quad (2.7)$$

$$\operatorname{Re} D(-i\omega) = \operatorname{Re} D(i\omega), \quad \operatorname{Im} D(-i\omega) = -\operatorname{Im} D(i\omega)$$

Учитывая равенства (2.7) и полагая, что $x(t) = \delta(t) - k_x$ -мерный вектор функций Дирака (т.е. $\operatorname{Re} \tilde{x}(i\omega) = \operatorname{Re} \tilde{\delta}(i\omega) = 1$, $\operatorname{Im} \tilde{x}(i\omega) = \operatorname{Im} \tilde{\delta}(i\omega) = 0$), при учете соотношения $y(-t) = 0$ получаем формулу для вычисления вектора импульсных переходных функций

$$q(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} \Phi_{\mu\chi}(i\omega)] E \cos \omega t d\omega, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

Пусть существуют такие действительные числа κ и β , что

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda^{n+\kappa}} = c_a = \text{const}, \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{Q_{\mu\chi}(\lambda)}{\lambda^{m+\beta}} = c_b = \text{const}$$

где κ и β – приращения степеней квазимногочленов соответственно $D(\lambda)$ и $Q_{\mu\chi}(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Так как в физически возможной ДКС $q(0) = 0$, то по известной из операционного исчисления формуле начального значения оригинала должно выполняться равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda \tilde{q}(\lambda) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^{m+\beta+1-n-\kappa} [(Q_{\mu\chi}(\lambda) / \lambda^{m+\beta}) / (D(\lambda) / \lambda^{n+\kappa})] E = 0$$

Следовательно,

$$n + \kappa > m + \beta + 1, \quad |c_b| < \infty, \quad c_a \neq 0 \quad (2.9)$$

Линейную динамическую модель ДКС (2.6) будем называть физически возможной, если выполняются условия (2.7) и (2.9).

3. Устойчивость динамических моделей ДКС. Исследуем устойчивость физически возможных динамических моделей ДКС в рамках следующих определений.

Определение 1. Динамическая система устойчива, если

$$|q(t)| < \infty \text{ при всех } t \geq 0 \quad (3.1)$$

Определение 2. Динамическая система асимптотически устойчива, если выполняется условие (3.1) и $\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t)| = 0$.

Теорема 1. Пусть переменные коэффициенты $A_j(\lambda)$ ($j = 0, \dots, n$) квазимногочлена $D(\lambda)$ – аналитические функции в правой половине комплексной плоскости $\lambda = \alpha + i\omega$ и выполняются условия

$$\forall \alpha > 0: \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (D(\lambda) / \lambda^{n+\kappa}) = c_a \neq 0 \quad (3.2)$$

$$\forall \omega \in (-\infty, \infty): D(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega) \neq 0, \quad u(-\omega) = u(\omega), \quad v(-\omega) = -v(\omega)$$

Тогда, если при монотонном возрастании ω от 0 до ∞ вектор $D(i\omega)$ повернется на комплексной плоскости (u, iv) от положительной действительной полуоси u в положительном направлении на угол $(n + \kappa)\pi/2$, то все корни квазимногочлена $D(\lambda)$ будут расположены на комплексной плоскости (λ) слева от мнимой оси.

Доказательство. Подобно случаю систем с сосредоточенными параметрами [5] доказательство опирается на принцип аргумента [6]. Возьмем на комплексной плоскости $\lambda = \alpha + i\omega$ открытую область Ω , ограниченную замкнутым контуром $S = S_1 + S_2$, где S_1 – полуокружность с центром $(0,0)$ и радиусом r в правой полуплоскости, S_2 – отрезок $[-ir, ir]$. По условиям теоремы функция $D(\lambda)$ аналитична в области Ω и при $r \rightarrow \infty$ не имеет нулей на контуре S . Согласно принципу приращения аргумента, при однократном полном обходе точкой λ контура S против часовой стрелки функция $D(\lambda)$ получает приращение аргумента

$$\lim_{r=|\lambda| \rightarrow \infty} \Delta_S \arg D(\lambda) = \lim_{r=|\lambda| \rightarrow \infty} \Delta_{S_1} \arg D(\lambda) + \lim_{r=|\lambda| \rightarrow \infty} \Delta_{S_2} \arg D(\lambda) = 2\pi N \quad (3.3)$$

где N – число нулей функции $D(\lambda)$ в правой половине комплексной плоскости. При учете первого условия (3.2) имеем

$$\lim_{r=|\lambda| \rightarrow \infty} \Delta_{S_1} \arg D(\lambda) = (n + \kappa)\pi \quad (3.4)$$

Так как $\forall \lambda \in S_2: \lambda = i\omega$, то согласно остальным условиям (3.2)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_{S_2} \arg D(\lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\Delta \arg D(i\omega)) = -2 \Delta \arg D(i\omega) \quad (3.5)$$

$r \geq \omega \geq -r \quad 0 \leq \omega < \infty$

Подставляя выражения (3.4), (3.5) в соотношение (3.3) и принимая $N = 0$, получаем условие расположения нулей $D(\lambda)$ в комплексной плоскости (λ) слева от мнимой оси

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = (n + \kappa)\pi / 2$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть в физически возможных квазирациональных дробях (2.6) квазимногочлены $Q_{\mu\chi}(\lambda)$ аналитичны на открытой комплексной плоскости и каждая функция $\Phi_{\mu\chi}(\lambda)$ имеет счетное множество изолированных полюсов $\lambda = \lambda_v = \alpha_v + i\omega_v$ ($v = 1, 2, \dots$), среди которых один полюс $\lambda = \lambda_1$ имеет кратность k , а остальные полюса однократны.

Тогда: 1) если динамическая модель (2.6) удовлетворяет теореме 1, то она асимптотически устойчива; 2) если один корень обобщенного определителя $D(\lambda)$ равен нулю, то динамическая модель устойчива, но не асимптотически; 3) если два или более корней равны нулю, то динамическая модель неустойчива.

Доказательство. Возьмем на плоскости (λ) открытую область H , ограниченную замкнутым контуром $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где отрезок прямой $\eta_1 = [\alpha_0 - ir, \alpha_0 + ir]$ проходит через точку $(\alpha_0, 0)$, $\alpha_0 > 0$ параллельно мнимой оси, η_2 – полуокружность с центром $(\alpha_0, 0)$ и радиусом r слева от прямой $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 \ll r$.

Вектор импульсных переходных функций динамической модели выражается по формуле Меллина [5]

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_0 - i_\infty}^{\alpha_0 + i_\infty} e^{\lambda t} [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] E d\lambda, \quad \alpha_0 > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

Полюса $\lambda_v (v = 1, 2, \dots)$ функций $\Phi_{\mu\chi}(\lambda)$ изолированы, являются полюсами функций $e^{\lambda t} \Phi_{\mu\chi}(\lambda)$ и при $r \rightarrow \infty$ принадлежат H . По теореме о вычетах

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_0 - ir}^{\alpha_0 + ir} e^{\lambda t} [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] E d\lambda + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\eta_2} e^{\lambda t} [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] E d\lambda \right) = \\ &= \text{Res}_{\lambda=\lambda_1} (e^{\lambda t} [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] E) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{Res}_{\lambda=\lambda_j} (e^{\lambda t} [\Phi_{\mu\chi}(\lambda)] E) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Действительно, для физически возможных динамических моделей согласно соотношениям (2.9) $\vartheta = n + \kappa - m - \beta > 1$ и существует такое действительное число $M > 0$, что при $\infty > t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\forall \lambda \in \eta_2: |e^{\lambda t} \Phi_{\mu\chi}(\lambda)| \leq M/|\lambda|^{\vartheta} \text{ при } |\lambda| \geq r \rightarrow \infty; \quad \vartheta > 1$$

Следовательно,

$$\int_{\eta_2} e^{\lambda t} \Phi_{\mu\chi}(\lambda) d\lambda \leq \frac{M\pi}{r^{\vartheta-1}} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

Переходя в (3.7) к пределу при $r \rightarrow \infty$, при учете соотношения (3.6) убеждаемся в справедливости последнего равенства в этой цепочке.

В силу того, что полюс λ_1 имеет кратность k , а остальные полюса $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ различны, имеем

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(e^{\lambda t} (\lambda - \lambda_1)^k \frac{[Q_{\mu\chi}(\lambda)]}{D(\lambda)} E \right) + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \left(e^{\lambda t} (\lambda - \lambda_j) \frac{[Q_{\mu\chi}(\lambda)]}{D(\lambda)} E \right) = \\ &= e^{\lambda_1 t} \sum_{\xi=1}^k t^{k-\xi} \left(\frac{[Q_{\mu\chi}(\lambda)]}{\Psi(\lambda)} \right)^{\xi-1} \Big|_{\lambda=\lambda_1} \frac{E}{(\xi-1)!(k-\xi)!} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{\lambda_j t} \lambda_j^{m-n} \frac{[Q_{\mu\chi}(\lambda_j)]}{\lambda_j^m} \frac{\lambda_j^n}{D'(\lambda_j)} E \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$n > m, \quad \Psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_1)^i D^{(k+i)}(\lambda_1)}{(k+i)!}$$

Так как $\Psi(\lambda_1) \neq 0$, $D'(\lambda_j) \neq 0$ и $Q_{\mu\chi}(\lambda)$ – аналитические на открытой комплексной плоскости функции, то существует такое действительное число $C > 0$, что

$$\left| \left(\frac{Q_{\mu\chi}(\lambda)}{\Psi(\lambda)} \right)^{\xi-1} \right|_{\lambda=\lambda_1} < C, \quad \xi = 1, 2, \dots, k, \quad \left| \frac{Q_{\mu\chi}(\lambda_j)}{\lambda_j^m} \frac{\lambda_j^n}{D'(\lambda_j)} \right| < C, \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Заметим, что в силу аналитичности функций $Q_{\mu\chi}(\lambda)$ полюса $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ функций $\Phi_{\mu\chi}(\lambda) = Q_{\mu\chi}(\lambda)/D(\lambda)$ являются нулями функции $D(\lambda)$.

Пусть квазимногочлен $D(\lambda)$ удовлетворяет теореме 1, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_v = \alpha_v < 0$, $\max \{\alpha_v\} = -\alpha$, $\alpha > 0$ ($v = 1, 2, \dots$). Тогда из соотношений (3.8) и (3.9) имеем

$$|q(t)| < [C]e^{-\alpha t} \left(\sum_{\xi=1}^k \frac{t^{k-\xi}}{(k-\xi)!(\xi-1)!} + \Sigma \right), \quad t \geq 0$$

$$[C] = [C, \dots, C]^T, \quad \Sigma = \sum_{j=2}^{\infty} |\lambda_j|^{m-n}$$

Назначим номера j как, чтобы $|\lambda_{j+1}| > |\lambda_j|$. Тогда согласно интегральному признаку ряд Σ сходится. Кроме того,

$$\lim e^{-\alpha t} = 0, \quad \lim t^{k-\xi} e^{-\alpha t} = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

Следовательно, $\forall t \geq 0: |q(t)| < \infty$, $\lim |q(t)| = 0$ при $t \rightarrow \infty$, и по определению 2 динамическая модель асимптотически устойчива.

Пусть $k = 1$, $\lambda_1 = 0$. При этом $D(\lambda) = \lambda D_1(\lambda)$, $D_1(0) \neq 0$. При учете соотношений (3.9) из (3.8) имеем

$$|q(t)| \leq \|Q_{\mu\chi}(0)\| / \|D_1(0)\| E + [C]e^{-\alpha t} \Sigma, \quad t \geq 0$$

Отсюда следует, что $|q(t)| < \infty$, и согласно (3.8)

$$\lim |q(t)| = \|Q_{\mu\chi}(0)\| / \|D_1(0)\| \neq 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

т.е. динамическая модель устойчива, но не асимптотически.

Пусть $k = 2$, $\lambda_1 = 0$. Из (3.8) находим

$$q(t) = t \left[\frac{Q_{\mu\chi}(0)}{\Psi(0)} \right] E + \left[\frac{Q_{\mu\chi}(\lambda)}{\Psi(\lambda)} \right] \bigg|_{\lambda=0} E + \sum_{j=2}^{\infty} e^{\lambda_j t} \left[\frac{Q_{\mu\chi}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} \right] E$$

Видно, что $|q(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и динамическая модель неустойчива, если два корня равны нулю. Аналогично можно показать, что при $k \geq 3$, $\lambda_1 = 0$ динамическая модель неустойчива.

Замечание. Пусть среди полюсов $\lambda = \lambda_v$ ($v = 1, 2, \dots$) функций $\Phi_{\mu\chi}(\lambda)$, являющихся нулями квазимногочлена $D(\lambda)$, имеется хотя бы один полюс $\lambda = \lambda_p$ в правой половине комплексной плоскости (λ), т.е. $\operatorname{Re} \lambda_p = \alpha_p > 0$. Тогда динамическая модель (2.6) неустойчива, так как в силу того, что

$$|\exp(\lambda_p t)| = \exp(\alpha_p t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

из соотношения (3.8) при учете неравенств (3.9) имеем $|q(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Квазистатическая модель линейной ДКС. Построим квазистатическую модель линейной ДКС по методу последовательных приближений. На первом шаге исключаем в уравнениях с частными производными (УЧП) системы (1.7) все члены, содержащие производные по времени t , проводим интегрирование по пространственным координатам z и при заданных граничных условиях находим статическое решение УЧП нулевого приближения. На втором шаге подставим решение нулевого приближения в члены УЧП, содержащие частные производные по времени, а также учитываем члены $V_2 \ddot{u}$ и $V_3 \ddot{u}$ в правой части УЧП из (1.7) и, снова проводя интегрирование по z при нулевых граничных условиях, находим квазистатическое решение УЧП, зависимость которого от времени осуществляется через граничные условия и правую часть УЧП. Подставляя это квазистатическое решение в условия связи и далее в обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) системы (1.7), получаем квазистатическую модель линейной ДКС в форме обыкновенной динамической системы, содержащей

только ОДУ и начальные условия. Полагая начальные условия нулевыми и производя прямое интегральное преобразование Лапласа, находим

$$\tilde{y}(\lambda) = [\bar{\Phi}_{\mu\chi}(\lambda)]\tilde{x}(\lambda), \quad \mu = 1, \dots, k_y; \quad \chi = 1, \dots, k_x$$

$$[\bar{\Phi}_{\mu\chi}(\lambda)] = [(M + \bar{M}_w)\lambda^2 + (K + \bar{K}_w)\lambda + (C + \bar{C}_w)]^{-1}(B + \bar{B}_w) \quad (4.1)$$

$$\bar{\Phi}_{\mu\chi}(\lambda) = \bar{Q}_{\mu\chi}(\lambda) / \bar{D}(\lambda), \quad \bar{Q}_{\mu\chi}(\lambda) = B_0\lambda^m + B_1\lambda^{m-1} + \dots + B_m$$

$$\bar{D}(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_n, \quad n > m$$

Здесь $\bar{M}_w, \bar{K}_w, \bar{C}_w, \bar{B}_w$ – матрицы постоянных присоединенных к абсолютно жестким телам от упругих тел соответственно инерционных коэффициентов, коэффициентов демпфирования, коэффициентов упругой жесткости и коэффициентов возмущения; $\bar{Q}_{\mu\chi}(\lambda)$ и $\bar{D}(\lambda)$ – обыкновенные многочлены с постоянными коэффициентами.

Заметим, что квазистатическая модель (4.1) следует из динамической модели (2.5), (2.6), если разложить $M_w(\lambda), K_w(\lambda), C_w(\lambda)$ и $B_w(\lambda)$ по степеням λ , подставить в (2.5) (2.6) и ограничиться членами, содержащими λ со степенями до второй включительно. Если в (4.1) положить

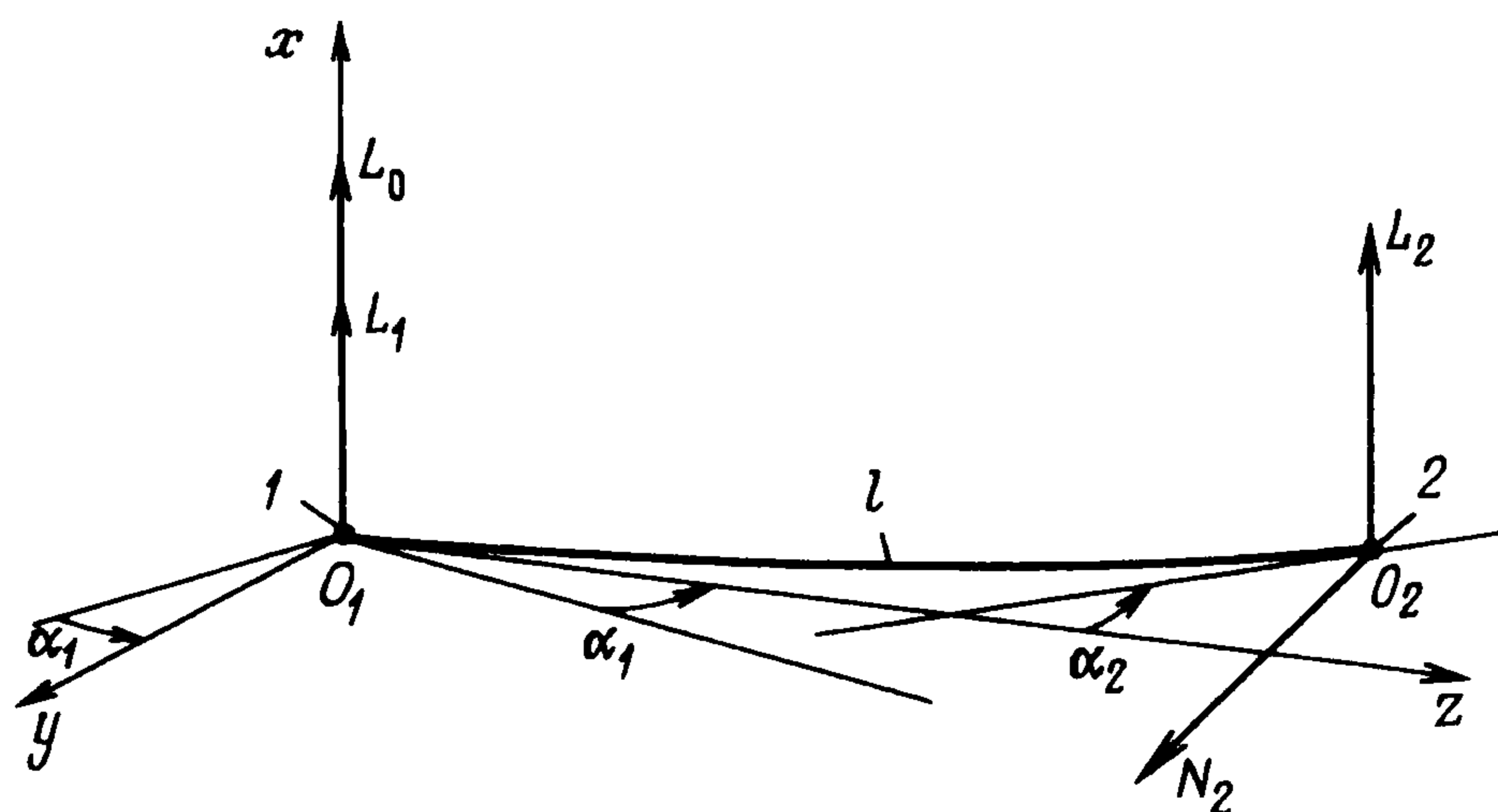
$$\bar{M}_w = \lim M_w(\lambda), \quad \bar{K}_w = \lim K_w(\lambda), \quad \bar{C}_w = \lim C_w(\lambda), \quad \bar{B}_w = \lim B_w(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0$$

то из (4.1) следует предельная квазистатическая модель ДКС. Математические модели деформируемых объектов управления, построенные на приближенных решениях УЧП по методу конечных элементов, либо по методу разложения по первым собственным формам, являются, подобно квазистатическим моделям, конечномерными. Спроектированное на основе таких приближенных моделей управляющее устройство может вызвать дестабилизацию неучтенных форм колебаний. Этот эффект, экспериментально наблюдаемый в больших космических конструкциях, авторы работы [7] называют излишним управлением.

5. Пример динамического моделирования упругого звена манипулятора. Исследуем применительно к манипуляторам задачу об управлении плоским угловым движением дискретно-континуальной механической модели (фиг. 1) с упругим прямолинейным однородным стержнем длиной l , внутреннее трение в котором учитывается по Фойгту. Начало стержня жестко заделано в точке O_1 абсолютно жесткого вала 1 с моментом инерции J_0^* . На другом конце стержня закреплено в центре массы O_2 абсолютно жесткое тело 2 с массой m_2^* и моментом инерции J_2^* . К валу 1 приложен управляющий момент

$$L_0^* = p^*\alpha_0^* - p^*\Pi\alpha_1^* - k_0^*\dot{\alpha}_1^*$$

где α_0^* – управляющее воздействие (входная функция), α_1^* – угол поворота вала, Π – оператор корректирующего устройства, p^* – коэффициент усиления; k_0^* – коэффициент демпфирования. Учитывая малость деформаций стержня, запишем полярный угол выходной точки O_2 гибкого стержня в виде



Фиг. 1

$$\alpha^* = \alpha_1^* - y_1^* / l, \quad |y^*(l, t)| = |y_1^*(t)| \ll l$$

Обозначая через L_1^*, L_2^*, N_2^* реакции стержня на концах, запишем размерные уравнения движения рассматриваемой ДКС

$$J_0^* \ddot{\alpha}_1^* + k_0^* \dot{\alpha}_1^* + p^* \Pi \alpha_1^* = p^* \alpha_0^* + L_1^*, \quad \alpha^* = \alpha_1^* - y_1^* / l, \quad J_2^* (\ddot{\alpha}_1^* + \ddot{\alpha}_2^*) = L_2^*$$

$$m_2^* \ddot{y}_1^* - m_2^* l \ddot{\alpha}_1^* = N_2^*$$

$$\rho y_{tt}^* + EJ(1 + h \partial / \partial t^*) y_{zzzz}^* = \rho z^* \ddot{\alpha}_1^*$$

$$y^*(0, t^*) = 0, \quad y_z^*(0, t^*) = 0, \quad y^*(l, t^*) = y_1^*(t^*), \quad y_z^*(l, t^*) = -\alpha_2^*(t^*)$$

$$L_1^* = -EJ(1 + h \partial / \partial t^*) y_{zz}^*(0, t^*), \quad L_2^* = EJ(1 + h \partial / \partial t^*) y_{zz}^*(l, t^*)$$

$$N_2^* = EJ(1 + h \partial / \partial t^*) y_{zzz}^*(l, t^*)$$

$$t^* = 0: \alpha_1^*(0) = 0, \quad \dot{\alpha}_1^*(0) = 0, \quad \alpha_2^*(0) = 0, \quad \dot{\alpha}_2^*(0) = 0$$

$$y_1^*(0) = 0, \quad \dot{y}_1^*(0) = 0, \quad y^*(z^*, 0) = 0, \quad y_t^*(z^*, 0) = 0$$

где ρ – погонная плотность стержня, E и J – модуль Юнга и экваториальный момент инерции поперечного сечения, h – коэффициент внутреннего трения по Фойгту, $y^*(z^*, t^*)$ – прогиб стержня, $\alpha_0^*(t^*)$ – входная функция, $\alpha^*(t^*)$ – выходная функция.

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$t = \frac{t^*}{T}, \quad T = \left(\frac{\rho l^4}{EJ} \right)^{1/2}, \quad y = \frac{y^*}{\delta}, \quad y_1 = \frac{y_1^*}{\delta}, \quad z = \frac{z^*}{l}, \quad \frac{\delta}{l} \ll 1, \quad \gamma = \frac{h}{T}$$

$$\alpha_r = \frac{l}{\delta} \alpha_r^*, \quad r = 0, 1, 2; \quad p = \frac{l}{EJ} p^*, \quad J_0 = \frac{J_0^*}{\rho l^3}, \quad J_2 = \frac{J_2^*}{\rho l^3}, \quad m_2 = \frac{m_2^*}{\rho l}, \quad k_0 = \frac{l}{EJT} k_0^*$$

$$L_1 = \frac{L_1^*}{L}, \quad L_2 = \frac{L_2^*}{L}, \quad L = \frac{EJ\delta}{l^2}, \quad N_2 = \frac{N_2^*}{N}, \quad N = \frac{EJ\delta}{l^3}$$

представим уравнения движения системы в безразмерной форме и, производя интегральное преобразование Лапласа, получаем уравнения данной линейной ДКС в изображениях

$$(J_0 \lambda^2 + k_0 \lambda + p \Pi(\lambda)) \alpha_1(\lambda) - L_1(\lambda) = p \alpha_0(\lambda), \quad \Pi(\lambda) = A(\lambda) / B(\lambda)$$

$$J_2 \lambda^2 (\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)) - L_2(\lambda) = 0 \quad (5.1)$$

$$m_2 \lambda^2 (y_1(\lambda) - \alpha_1(\lambda)) - N_2(\lambda) = 0, \quad \alpha(\lambda) = \alpha_1(\lambda) - y_1(\lambda)$$

$$y_{zzzz}(z, \lambda) - n^4 y(z, \lambda) = -n^4 z \alpha_1(\lambda), \quad n^4 = -\lambda^2 / (1 + \gamma \lambda) \quad (5.2)$$

$$y(0, \lambda) = y_z(0, \lambda) = 0, \quad y(1, \lambda) = y_1(\lambda), \quad y_z(1, \lambda) = -\alpha_2(\lambda) \quad (5.3)$$

$$L_1(\lambda) = -(1 + \gamma \lambda) y_{zz}(0, \lambda), \quad L_2(\lambda) = (1 + \gamma \lambda) y_{zz}(1, \lambda)$$

$$N_2(\lambda) = (1 + \gamma \lambda) y_{zzz}(1, \lambda) \quad (5.4)$$

Здесь $\Pi(\lambda)$ – правильная рациональная дробь.

Общее решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (5.2) представляется в виде

$$y(z, \lambda) = C_1 S(nz) + C_2 T(nz) + C_3 U(nz) + C_4 V(nz) + z \alpha_1(\lambda)$$

$$S(x) = (\operatorname{ch} x + \cos x) / 2, \quad T(x) = (\operatorname{sh} x + \sin x) / 2, \quad U(x) = (\operatorname{ch} x - \cos x) / 2,$$

$$V(x) = (\operatorname{sh} x - \sin x) / 2$$

C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (5.3).

Подставляя выражение $y(z, \lambda)$ в равенства (5.4) и далее в уравнения (5.1), получаем

$$\alpha(\lambda) = (Q(\lambda)/D(\lambda))\alpha_0(\lambda), \quad \alpha_1(\lambda) = (Q_1(\lambda)/D(\lambda))\alpha_0(\lambda) \quad (5.5)$$

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} + \varphi_{13} & B(\lambda)p \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} + \varphi_{23} & 0 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} + \varphi_{33} & 0 \end{vmatrix}, \quad Q_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & B(\lambda)p \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = \det[\varphi_{ij}], \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\varphi_{11} = B(\lambda)\mu_{11}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{12} = B(\lambda)\mu_{12}(1 + \gamma\lambda)$$

$$\varphi_{13} = B(\lambda)(J_0\lambda^2 + k_0\lambda + \mu_{13}\lambda^2) + A(\lambda)p$$

$$\varphi_{21} = J_2\lambda^2 + \mu_{21}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{22} = \mu_{22}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{23} = J_2\lambda^2 - \mu_{23}\lambda^2$$

$$\varphi_{31} = \mu_{31}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{32} = m_2\lambda^2 + \mu_{32}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{33} = -m_2\lambda^2 - \mu_{33}\lambda^2$$

$$\mu_{11} = f_{11}n, \quad \mu_{12} = f_{12}n^2, \quad \mu_{13} = f_{13}n^{-3}, \quad \mu_{21} = f_{21}n, \quad \mu_{22} = f_{22}n^2, \quad \mu_{23} = f_{23}n^{-3}$$

$$\mu_{31} = f_{31}n^2, \quad \mu_{32} = f_{32}n^3, \quad \mu_{33} = f_{33}n^{-2}$$

$$f_{11} = V/\Delta, \quad f_{12} = U/\Delta, \quad f_{13} = [U(n - T) - V(1 - S)]/\Delta, \quad f_{21} = (UT - VS)/\Delta$$

$$f_{22} = (T^2 - US)/\Delta, \quad f_{23} = V - [VS(1 - S) - US(n - T) + T^2(n - T) - UT(1 - S)]/\Delta$$

$$f_{31} = (US - V^2)/\Delta, \quad f_{32} = (TS - UV)/\Delta$$

$$\mu_{ij}(1 + \gamma\lambda) = a_{ij}^{(0)}(1 + \gamma\lambda) + a_{ij}^{(2)}\lambda^2 + O(|\lambda|^3), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2$$

$$\mu_{ij}\lambda^2 = a_{ij}^{(0)}\lambda^2 + O(|\lambda|^3), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 3$$

Выражения (5.5) определяют ДКС с динамической моделью стержня, где весь бесконечный спектр собственных частот и форм колебаний стержня учитывается через переменные коэффициенты $\mu_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$. Заметим, что

$$\mu_{ij} = a_{ij}^{(0)} + \lambda^2 a_{ij}^{(2)} + O(|\lambda|^3) \quad \text{при } |\lambda| \ll 1 \quad (5.6)$$

$$a_{11}^{(0)} = 2, \quad a_{11}^{(2)} = -1/140, \quad a_{12}^{(0)} = 6, \quad a_{12}^{(2)} = -13/420, \quad a_{13}^{(0)} = 1/30$$

$$a_{21}^{(0)} = 4, \quad a_{21}^{(2)} = 1/105, \quad a_{22}^{(0)} = 6, \quad a_{22}^{(2)} = 11/210, \quad a_{23}^{(0)} = 1/20$$

$$a_{31}^{(0)} = 6, \quad a_{31}^{(2)} = 11/210, \quad a_{32}^{(0)} = 12, \quad a_{32}^{(2)} = 13/35, \quad a_{33}^{(0)} = 7/20$$

$$\mu_{ij} \rightarrow b_{ij}\lambda^{k_{ij}} \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

$$k_{11} = k_{12} = 0; \quad k_{13} = -k_{32} = -0,75; \quad k_{21} = -k_{33} = 0,25; \quad k_{22} = -k_{23} = k_{31} = 0,5$$

Подставляя выражения (5.6) в соотношения (5.5) и учитывая, что

$$\mu_{ij}(1 + \gamma\lambda) = a_{ij}^{(0)}(1 + \gamma\lambda) + a_{ij}^{(2)}\lambda^2 + O(|\lambda|^3), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2$$

$$\mu_{ij}\lambda^2 = a_{ij}^{(0)}\lambda^2 + O(|\lambda|^3), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 3$$

получаем модель упругого звена манипулятора с квазистатической моделью стержня.

Если принять $\mu_{ij} = a_{ij}^{(0)}$ ($i, j = 1, 2, 3$), то имеем модель упругого звена манипулятора с предельной квазистатической моделью стержня.

Модель (5.5) удобна для параметрического синтеза. Пусть $\alpha_0(t) = \delta(t)$ – функция

Дирака. Тогда импульсная переходная функция по выходу $\alpha(t)$ согласно формуле (2.8) имеет вид

$$q(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi(i\omega) \cos \omega t d\omega, \quad \Phi(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{D(i\omega)}$$

Если $\alpha_0(t) = 1(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда, то переходная функция системы по выходу $\alpha(t)$ представится в виде

$$\alpha(t) = \int_0^t q(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi(i\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad t \geq 0 \quad (5.8)$$

Аналогично вычисляется переходная функция по углу $\alpha_1(t)$ поворота вала 1. Выбираем желаемую частотную характеристику системы

$$\operatorname{Re} \Phi^{\circ}(i\omega) = (1 - \tau^2 \omega^2) / ((1 - \tau^2 \omega^2)^2 + 2\tau^2 \omega^2)$$

которой соответствует согласно (5.8) желаемая переходная функция $\alpha^{\circ}(t)$, имеющая экспоненциальный характер и время переходного процесса не более 3τ .

Пусть $\operatorname{Re} \Phi(i\omega)$ зависит от конструктивных параметров $T_1, T_2, \dots, T_s$ с ограничениями $T_j \in [a_j, b_j]$. Введем в рассмотрение интеграл

$$\int_0^{\infty} [\operatorname{Re} \Phi(i\omega, T_1, T_2, \dots, T_s) - \operatorname{Re} \Phi^{\circ}(i\omega)]^2 d\omega \quad (5.9)$$

Осуществляя многомерную минимизацию, выбираем $T_1^{\circ}, T_2^{\circ}, \dots, T_s^{\circ}$, при которых интеграл (5.9) достигает минимума. Далее вычисляется переходная функция спроектированной системы

$$\alpha_c(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi(i\omega, T_1^{\circ}, T_2^{\circ}, \dots, T_s^{\circ}) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

и проводится ее анализ. Степень приближения $\alpha_c(t)$ к $\alpha^{\circ}(t)$ зависит от структуры управляющего устройства и корректирующих звеньев.

Примем модель ДКС без груза на конце стержня $m_2 = J_2 = 0$ с параметрами $J_0 = 7,1 \cdot 10^{-3}$; $k_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$; $\gamma = 4,8 \cdot 10^{-3}$; $p = 31,5$ и корректирующим устройством

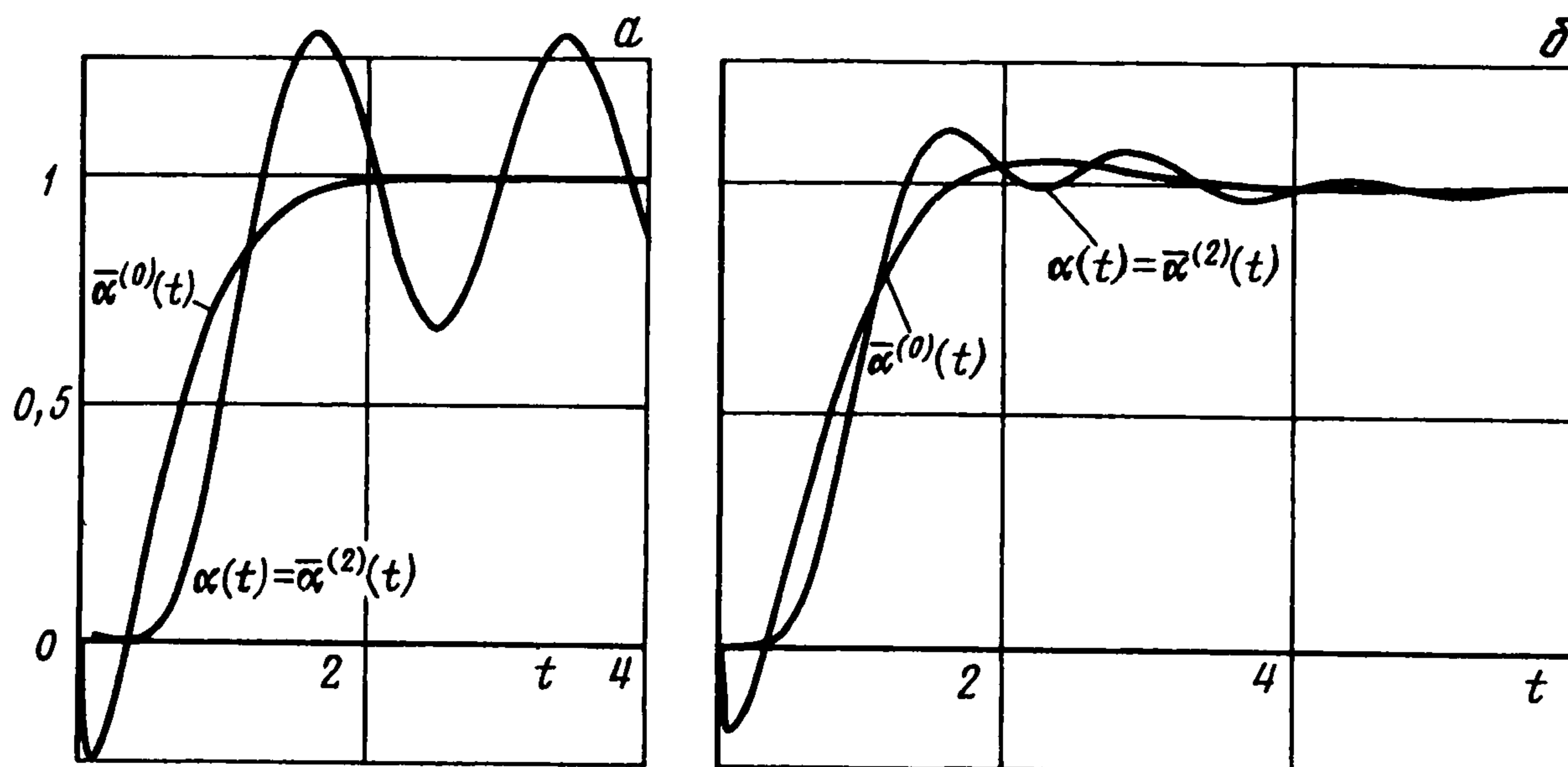
$$\Pi_0(\lambda) = \frac{(T_1\lambda + 1)(T_2\lambda + 1)(T_3\lambda + 1)}{(T_4\lambda + 1)(T_5\lambda + 1)(T_6\lambda + 1)} \quad (5.10)$$

Сначала в предположении предельной квазистатической модели стержня ($\mu_{ij} = a_{ij}^{(0)}$, $i, j = 1, 2, 3$) путем минимизации интеграла (5.9) были выбраны параметры корректирующего устройства

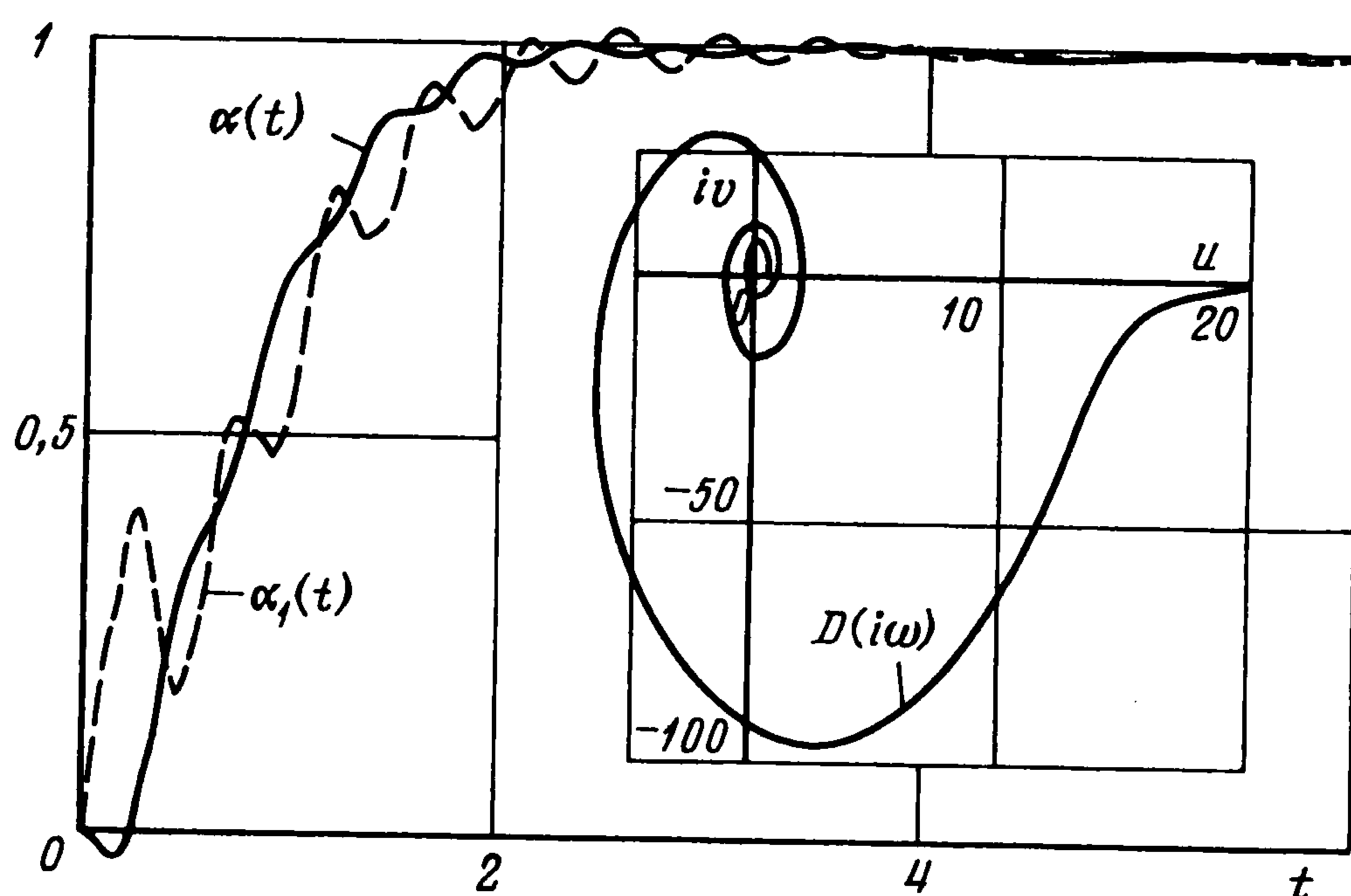
$$T_1 = 0,36; \quad T_2 = 0,2544; \quad T_3 = 0,246; \quad T_4 = 3,8 \cdot 10^{-2}; \quad T_5 = 10^{-2}; \quad T_6 = 4,76 \cdot 10^{-6} \quad (5.11)$$

и вычислена переходная функция $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$.

Затем в этой системе предельная квазистатическая модель стержня была заменена на динамическую и вычислена переходная функция $\alpha(t)$. Аналогично вычислена переходная функция $\bar{\alpha}^{(2)}(t)$ этой системы с квазистатической (5.6) моделью стержня. Результат представлен на фиг. 2, а. Видно, что корректирующее устройство $\Pi_0(\lambda)$, построенное на основе предельной квазистатической модели стержня, дестабилизирует систему как с динамической, так и с квазистатической моделями стержня на неучтенной форме колебаний. Заметим, что графики $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}^{(2)}(t)$ практически совпадают. На фиг. 2, б приведены графики $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$, $\bar{\alpha}^{(2)}(t)$ при $p = 0,315$, из которых видно, что снижение коэффициента усиления p сближает результаты предельного квазистати-



Фиг. 2



Фиг. 3

ческого $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$, квазистатического $\bar{\alpha}^{(2)}(t)$ и динамического $\alpha(t)$ моделирования.

Далее в ДКС с динамической моделью стержня при $m_2 = J_2 = 0$, $p = 31,5$ было сформировано корректирующее устройство вида

$$П(\lambda) = П_0(\lambda) \frac{(T_7^2 \lambda^2 + 2\xi_1 T_7 \lambda + 1)(T_8^2 \lambda^2 + 2\xi_2 T_8 \lambda + 1)}{(T_9^2 \lambda^2 + 2\xi_3 T_9 \lambda + 1)(T_{10}^2 \lambda^2 + 2\xi_4 T_{10} \lambda + 1)} \quad (5.12)$$

где $T_7 = 7,246 \cdot 10^{-2}$; $\xi_1 = 10^{-3}$; $T_8 = 2,934 \cdot 10^{-2}$; $\xi_2 = 7 \cdot 10^{-2}$

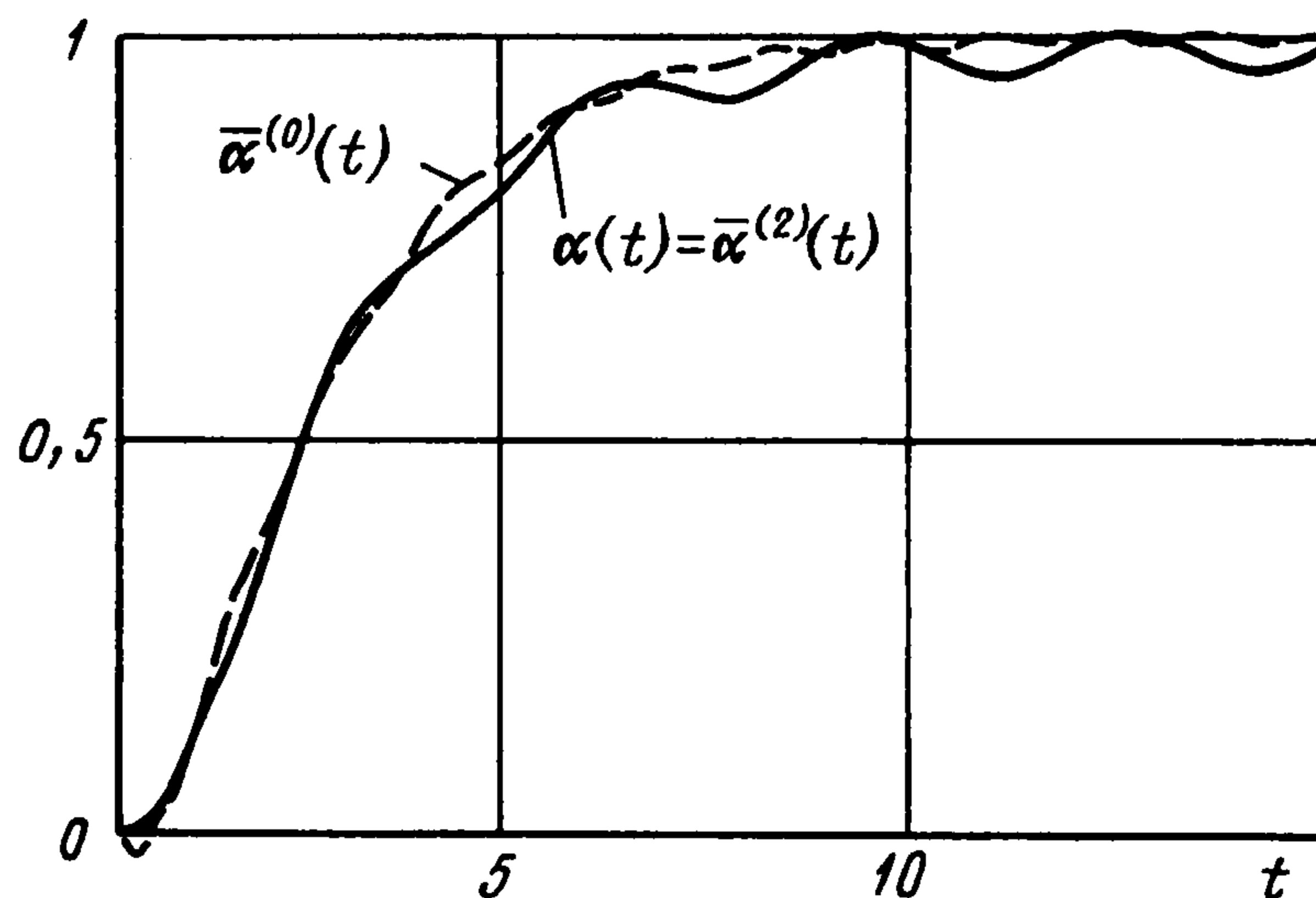
$T_9 = 0,284$; $\xi_3 = 10^{-3}$; $T_{10} = 4,575 \cdot 10^{-2}$; $\xi_4 = 4 \cdot 10^{-2}$

а функция $П_0(\lambda)$ дана соотношениями (5.10), (5.11).

На фиг. 3 показаны графики переходных функций $\alpha(t)$ и $\alpha_1(t)$, а также частотный годограф $D(i\omega)$ системы в специальном масштабе

$$u + iv = D(i\omega)(\text{Arsh } |D(i\omega)|) / |D(i\omega)|$$

Данная система удовлетворяет теореме 1, и здесь $n + \kappa = 12$, $\kappa = 1$.



Фиг. 4

В случае системы с $p = 31,5$ и грузом $m_2 = 0,34$, $J_2 = 0,1$ на конце стержня при синтезе по предельной квазистатической модели стержня корректирующее устройство имеет вид (5.12), где функция $\Pi_0(\lambda)$ дана соотношением (5.10), причем

$$T_1 = 1,36; \quad T_2 = 0,96; \quad T_3 = 4 \cdot 10^{-3}; \quad T_4 = 3,81 \cdot 10^{-2}; \quad T_5 = 10^{-2}; \quad T_6 = 10^{-4}$$

$$T_7 = 0,2206; \quad \xi_1 = 10^{-2}; \quad T_8 = 5,54 \cdot 10^{-2}; \quad \xi_2 = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$T_9 = 0,446; \quad \xi_3 = 4 \cdot 10^{-3}; \quad T_{10} = 0,1193; \quad \xi_4 = 10^{-2}$$

Графики переходных функций системы с данным корректирующим устройством в случае динамической $\alpha(t)$, квазистатической $\bar{\alpha}^{(2)}(t)$ и предельной квазистатической $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$ моделей стержня приведены на фиг. 4. Из сравнения графиков на фиг. 4 и фиг. 2, а видно, что введение груза на конце стержня с удовлетворительной для практики погрешностью сближает графики $\alpha(t) = \bar{\alpha}^{(2)}(t)$ и $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$.

При уменьшении внутреннего трения в стержне $\gamma \rightarrow 0$ в рассмотренных системах с динамической моделью стержня были найдены такие значения γ , при которых не удастся сформулировать конечномерное корректирующее устройство в форме рациональной дроби, обеспечивающее частотный годограф $D(i\omega)$, удовлетворяющий теореме 1, т.е. обеспечивающее устойчивость системы управления, что согласуется с известными результатами [8]. Однако в системе с предельной квазистатической моделью стержня даже при $\gamma = 0$ удастся выбрать конечномерное корректирующее устройство, обеспечивающее устойчивость системы управления и заданное качество переходной функции $\bar{\alpha}^{(0)}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д. Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 183–192.
2. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Управление упругим звеном манипулятора при помощи обратной связи по положению и скорости груза // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 51–60.
3. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О стабилизации положения круглой мембраны // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 457–465.
4. Злочевский С.И., Кубышкин Е.П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями // Космич. исследования. 1991. Т. 29. Вып. 6. С. 828–839.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1992. 576 с.
6. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969. 239 с.

7. *Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.L.* Dynamics and control of large space structures // *Guidance, Control, and Dynamics*. 1984. V. 7. № 5. P. 514–526. = *Нур Г.С., Райан Р.С., Скофилд Х.Н., Симс Дж.Л.* Динамика больших космических конструкций и управление ими // *Аэрокосмич. техника*. 1985. № 6. С. 129–147.
8. *Morris K.A., Vidyasagar M.* A comparison of different models for beam vibrations form the standpoint of control design // *Dynamics Systems, Measurement, and Control*. 1990. V. 112. № 3. P. 356–394. = *Моррис, Видьясагар.* Сравнение различных моделей колебаний стержней с точки зрения проектирования системы управления // *Современное машиностроение*. Сер. Б. 1991. № 2. С. 8–16.

Саратов
e-mail: apmath@office.sstu.saratov.su

Поступила в редакцию
22.X.1998