УДК 531.01:629.78

© 2000 г. Д.М. Азимов

УЧАСТКИ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТЯГИ В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ МАЙЕРА

Для вариационной задачи Майера об оптимальном полете ракеты в ньютоновском поле сил выписаны уравнения – необходимые условия и получены их аналитические решения, соответствующие движению с промежуточной тягой. В случае, когда время полета не фиксировано и функционал задачи явно не зависит от полярного угла, полученные решения отличаются от известных. Для полета с фиксированным временем полученные решения соответствуют движению по некоторой спиральной траектории. Описываются условия, при выполнении которых полученные решения удовлетворяют необходимому условию оптимальности Роббинса. Определяются типы задач, в которых полученные участки промежуточной тяги могут найти применение. Приводится пример.

Известно, что в вариационной задаче Майера об оптимальной траектории ракеты в ньютоновском поле удовлетворение необходимым условиям оптимальности сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений 14-го порядка отдельно на участках нулевой тяги (НТ), промежуточной тяги (ПТ) и максимальной тяги (МТ) [1–3]. Участки ПТ соответствуют особому решению и их возможное появление в задаче приводит к значительным трудностям. Не существует общей теории для анализа этих участков и их оптимальности [4–6]. Известны некоторые аналитические решения, такие как спиральные траектории [1, 4, 7], сферические траектории [8][1] и круговые траектории [8, 9]. Однако эти решения не дают ответа на вопрос об обеспечении ими действительного минимума. Кроме того, получены некоторые классы спиральных траекторий, отличающиеся от известных ранее решений и удовлетворяющие необходимому условию оптимальности Роббинса [10]. Остаются открытыми вопросы о возможности существования оптимальных участков ПТ и об их применимости.

В данной работе на основе анализа необходимых условий оптимальности – канонической системы уравнений вариационной задачи и свойств функции переключения получены новые классы аналитических решений для участков ПТ. Изучены вопросы выполнения необходимого условия оптимальности Роббинса и применения полученных участков для решения задач динамики полета.

1. Постановка задачи. Пусть уравнения движения ракеты в центральном ньютоновском поле сил даны в виде [2]

$$\dot{\mathbf{v}} = cmM^{-1}\mathbf{e} - \mu r^{-2}\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{M} = -m \tag{1.1}$$

где μ – гравитационный параметр, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра притяжения, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\mathbf{e}$ – единичный вектор тяги, M – масса ракеты, m – секундный расход массы, на который наложено ограничение $0 \leqslant m \leqslant \overline{m}$, c = const – скорость истечения газов. Для направляющих косинусов e_1, e_2, e_3 вектора тяги и се-

[1] См. также: *Азимов Д.М.* Исследование оптимальных траекторий в центральном ньютоновском поле: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1991. 13 с.

кундного расхода массы имеют место равенства [1]

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=1, \qquad m(\overline{m}-m)-\gamma^2=0 \tag{1.2}$$

Управляющими переменными являются m, e_1, e_2, e_3 и γ. Для упрощения записи фазовые переменные обозначим через x_i ($i = 1, \ldots, 7$), где x_1, x_2, x_3 – составляющие $\mathbf{v}$; x_4, x_5, x_6 – составляющие $\mathbf{r}$, x_7 обозначает массу. Пусть в начальный момент $t = t_0$ заданы условия $x_i = x_{i0}$. При $t = t_1$ заданы конечные условия $x_k = x_{kl}$, где $k = 1, \ldots, j < 7$. Требуется найти такие m, e_1, e_2, e_3 и γ, чтобы соответствующие им x_i удовлетворяли уравнениям движения (1.1), равенствам (1.2) для направляющих косинусов вектора тяги и секундного расхода массы, начальным и конечным условиям, а заданный функционал

$$J=J(x_{j+1,1},\ x_{j+2,1},\ \ldots,\ x_{71},\ t_1)$$

принимал минимальное значение из возможных.

Как известно из общей теории оптимальных траекторий ракет в гравитационном поле [1] анализ условий Вейерштрасса приводит к выводам, что на оптимальной траектории тягу следует ориентировать по направлению базис-вектора, и должны быть выполнены условия: $\chi\leqslant 0$ на участках НТ, где $m = 0$; $\chi = 0$ на участках ПТ, где $0<m<\overline{m}$; $\chi\geqslant 0$ на участках МТ, где $m=\overline{m}$. Здесь $\chi=cM^{-1}\lambda-\lambda_7$ – функция переключений, λ – величина базис-вектора $\boldsymbol{\lambda}$, λ_7 – множитель, сопряженный массе. В точке переключения двух различных участков вектор-функции $\boldsymbol{\lambda}$, $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ и функция λ_7 должны быть непрерывными. Учет условий стационарности и Вейерштрасса позволяет записать уравнения (1.1) в виде замкнутой канонической системы уравнений 14-го порядка на каждом участке тяги [2]. В общем случае эта система может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{v}}=cmM^{-1}\lambda^{-1}\boldsymbol{\lambda}-\mu r^{-2}\mathbf{r},\quad \dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v},\quad \dot{M}=-m\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{\lambda}_r,\quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r=\mu r^{-3}\boldsymbol{\lambda}-3\mu r^{-5}\ (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r})\mathbf{r},\quad \dot{\lambda}_7=cmM^{-2}\lambda\end{gathered} \tag{1.3}$$

с гамильтонианом

$$H=-\mu(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r})\mathbf{r}^{-3}+\boldsymbol{\lambda}_r\mathbf{v}+\chi m$$

В сферической системе координат (r, θ, δ) с началом в центре притяжения [2] векторы имеют следующие составляющие:

$$\mathbf{r}=(r,\ 0,\ 0),\quad \mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3),\quad \boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r=(\lambda_4,\ [\lambda_1 v_2-\lambda_2 v_1+(\lambda_2 v_3-\lambda_3 v_2)\mathrm{tg}\delta+\lambda_5\cos\delta]r^{-1}\ \ (\lambda_1 v_3-\lambda_3 v_1+\lambda_6)r^{-1})$$

где λ_r – вектор, сопряженный радиус-вектору [2], а λ_4, λ_5 и λ_6 – множители, сопряженные r, θ, и δ соответственно.

2. Случай, когда время полета фиксировано и функционал явно зависит от полярного угла. Можно показать [2, 5], что в плоском случае при использовании полярной системы координат (r, θ) с началом в центре притяжения, где θ – угол между радиус-вектором и осью $\theta = 0$, каноническая система уравнений движения (1.3) на участках ПТ имеет следующие первые интегралы и инвариантные соотношения:

$$H=\lambda_1(v_2^2r^{-1}-\mu r^2)-\lambda_2 v_1 v_2 r^{-1}+\lambda_4 v_1+\lambda_5 v_2 r^{-1}=C \tag{2.1}$$

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2-2\lambda_4 r+c\lambda\ln(M_0M^{-1})-3Ct=C_1,\quad \lambda_5=C_3,\quad \lambda_7 M=c\lambda=C_2 \tag{2.2}$$

$$\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_2 v_2 r^{-1}+\lambda_2^2 v_1 r^{-1}+\lambda_5\lambda_2 r^{-1}=0 \tag{2.3}$$

$$\lambda_4^2+(\lambda_1 v_2 r^{-1}-\lambda_2 v_1 r^{-1}+\lambda_5 r^{-1})^2=\lambda^2\mu r^{-3}-3\lambda_1^2\mu r^{-3} \tag{2.4}$$

где v_1, v_2 – радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости, t – время движения на участке ПТ, M_0 – начальная масса, C, C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования. При исключении переменной λ_4 и разности $(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1)$ из (2.1), (2.3) и (2.4) при учете последнего соотношения (2.2) получим уравнение относительно r

$$C^2\lambda^4 r^4 + 6\mu C\lambda^2\lambda_1^3 r^2 + \mu C_3^2\lambda^4(3\lambda_1^2\lambda^{-2} - 1)r + 9\mu^2\lambda_1^6 = 0 \tag{2.5}$$

$$\lambda_1 = \lambda\sin\varphi, \quad \lambda_2 = \lambda\cos\varphi$$

где λ = const – величина базис-вектора, φ – угол между вектором тяги и перпендикуляром к радиус-вектору [1]. Для решения этого уравнения рассмотрим следующие возможные случаи, связанные с условиями задачи.

1°. Время полета не фиксировано ($C = 0$) и функционал задачи явно не зависит от полярного угла ($C_3 = 0$) [10]. В этом случае анализ соотношений (2.1), (2.3) и (2.6) при учете последнего равенства (2.2) показывает, что участки ПТ вырождаются в участки НТ.

2°. Время полета не фиксировано ($C = 0$) и функционал задачи явно зависит от полярного угла ($C_3 \neq 0$). В этом случае при $\lambda = 1$ известны спиральные траектории, полученные Лоуденом [1] и Келли [4], а при любых значениях λ – другие спиральные траектории, полученные автором с использованием свойств функции переключения ($\ddot{\chi} = 0$, $\dddot{\chi} = 0$) [10]. Указанные решения различаются формулами определения переменных канонической системы уравнений (1.3), кроме формулы для величины радиус-вектора. Однако, как было показано [4–6, 10], все эти решения не удовлетворяют необходимому условию оптимальности.

3°. Время полета фиксировано ($C \neq 0$) и функционал задачи явно не зависит от полярного угла ($C_3 = 0$). Для этого случая известны решения в виде спиральных траекторий, которые отличаются от вышеупомянутых и удовлетворяют необходимому условию оптимальности Роббинса при $\sin\varphi < 0$, $C > 0$ [10].

4°. Время полета фиксировано ($C \neq 0$) и функционал задачи явно зависит от полярного угла ($C_3 \neq 0$). Это наиболее общий случай при решении уравнения (2.5). В зависимости от знаков дискриминанта

$$Q = \mu^4\frac{C_3^4}{C^8}(3s^2-1)^2\left[\frac{C_3^4}{256}(3s^2-1)^2 - \mu C\lambda^3 s^9\right]$$

уравнения (2.5), где $s = \sin\varphi$, и для выражения Cs имеют место условия

а) $Q \geqslant 0$, $Cs < 0$; б) $Q < 0$, $Cs > 0$

При этом вид решений зависит от знака выражения $3s^2 - 1$. Если $3s^2 - 1 < 0$, то соответствующие решения для условий *а* и *б* представлены ранее [10]. При $3s^2 - 1 = 0$ имеют место круговые участки ПТ, решения для которых обсуждались ранее [8, 9]. Ниже приводятся другие решения уравнения (2.5), которые выявлены в результате дальнейших исследований условий *а* и *б* при $3s^2 - 1 > 0$ с учетом знаков выражений $2\cos(\alpha/3) - 1$ и $1 + 2\operatorname{cosec} 2\alpha$, где α – известная функция от переменной s.

Введем обозначения

$$R_i = \left[\frac{\sqrt{2}\mu C_3^2(3s^2-1)}{4\lambda^2C^2X_i(s)}\right]^{1/2} - X_i(s), \quad \xi = \frac{C_3^4(3s^2-1)^2}{128\mu\lambda^7Cs^9} - 1$$

При $Q \geqslant 0$, $Cs < 0$ имеем

$$r_1 = R_1(s), \quad X_1(s) = (-2C^{-1}\mu\lambda s^3(2\operatorname{cosec}2\alpha + 1))^{1/2} \tag{2.6}$$

$$a = \operatorname{arctg}((\operatorname{tg}\beta)^{1/3}), \quad |\alpha| \leqslant \pi/4, \quad 1 + 2\operatorname{cosec}2\alpha > 0, \quad \beta = -1/\xi$$

При $1+2\operatorname{cosec}2\alpha \leqslant 0$ участки ПТ не существуют: нет действительных решений. При $Q<0$, $Cs>0$ имеем

$$r_2 = R_2(s),\quad X_2(s) = (2C^{-1}\mu\lambda s^3(2\cos(\alpha/3)-1))^{1/2} \tag{2.7}$$

$$2\cos(\alpha/3)-1>0,\quad \alpha = \arccos\xi$$

Если $2\cos(\alpha/3)-1 \leqslant 0$, то

$$r_3 = R_3(s),\quad X_3(s) = (2C^{-1}\mu\lambda s^3(1-2\cos(\alpha/3+\pi/3)))^{1/2} \tag{2.8}$$

После определения $r=r(s)$, остальные решения системы уравнений (1.3) при учете соотношения

$$(\lambda^2-5\lambda_1^2)\nu_1 + 2\lambda_1(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2) - 4\lambda_1\lambda_4 r = 0 \tag{2.9}$$

которое получается из равенства $\dddot{\chi}=0$, записываются в виде

$$\nu_1 = 2k\frac{3w+2C_3}{5s^2-3},\quad \nu_2 = \frac{(3-s^2)w+4C_3k^2}{\lambda s(5s^2-3)}$$

$$t = \frac{\lambda}{2}\int\frac{(5s^2-3)R}{k(3w+2C_3)}d\varphi + C_4,\quad \theta = \frac{1}{2}\int\frac{(R(3-s^2)w+6k^2\lambda)}{rsk(3w+2C_3)}d\varphi + C_5$$

$$M = M_0\exp\frac{P}{c\lambda} \tag{2.10}$$

$$\lambda_1 = \lambda s,\quad \lambda_2 = \lambda k,\quad \lambda_4 = k(\lambda - w)/(\lambda s),\quad \lambda_7 = C_2M^{-1}$$

$$w = C_3^{-1}(3\mu\lambda^2s^4r^{-1} + C\lambda sr + C_3^2),\qquad R = dr/d\varphi,\quad s = \sin\varphi,\quad k = \cos\varphi$$

$$P = C_2 - k\frac{w(15s^2-3)+8s^2C_3}{s(s-3)^2} + 3C(t-C_4)$$

Здесь θ – полярный угол, C_4 и C_5 – постоянные интегрирования. Секундный расход массы может быть определен из уравнения $\chi(IV)=0$ в виде

$$m = [10\lambda^2\mu s^2 - \nu_2^2 r\lambda^2(3-13s^2) - 2\lambda_4 r^2\lambda(s\nu_1 - 3k\nu_2) -$$

$$-4\lambda_4^2r^3 + 6\lambda sC_3\nu_2r^{-1}](cs\lambda^2r^2(3-5s^2))^{-1} \tag{2.11}$$

Таким образом, выражения (2.6)–(2.8), (2.10), (2.11) являются решениями канонической системы уравнений (1.3) безотносительно критерия оптимальности, описывающими движение с ПТ по некоторым спиралевидным траекториям. При $s<0$ и $C>0$ в формуле (2.6) и при $s<0$ и $C<0$ в формулах (2.7) и (2.8) полученные решения соответствуют требованиям необходимого условия оптимальности [5]. Эти требования, как известно [3, 5], сводятся к тому, чтобы радиальная составляющая базис-вектора была отрицательной и функция переключения была тождественно равна нулю.

Для полного определения выполнимости необходимого условия оптимальности полученных решений, следуя описанному ранее методу [5, 6], проверим знак реактивного ускорения. Для этого спроектируем первое уравнение системы (1.3) (или (1.1)) на направление базис-вектора и получим [1]

$$\dot{u}_1 - u_2\dot{\psi} = cmM^{-1} - \mu r^{-2}s \tag{2.12}$$

где

$$u_1 = \frac{\lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1}{\lambda},\quad u_2 = \frac{-\lambda_2\nu_1+\lambda_1\nu_2}{\lambda},\quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi + \vartheta \tag{2.13}$$

Здесь u_1, u_2 – проекции скорости ракеты на направление базис-вектора и перпендикуляра к нему, ψ – угол между базис-вектором и полярной осью ($\theta = 0$). В полученных выше решениях угол φ рассматривается в качестве независимой переменной, и поэтому запишем производные от u_1, θ и λ_1 в виде [2,9]

$$\dot{u}_1 = \frac{du_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt},\ \dot{\theta} = \frac{v_2}{r},\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_2,\ \dot{\varphi} = \lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_4 \tag{2.14}$$

Учитывая соотношения $r = r(s)$, (2.10), (2.13), (2.14) и принимая $\lambda = 1$ [1,11], из (2.12) после преобразований получим выражение для реактивного ускорения

$$a = \frac{cm}{M} = \frac{1}{k}\left[\frac{du_1}{d\varphi}\left(\frac{v_2}{r} - \lambda_4\right) - \lambda_4(sv_2 - kv_1) + \mu\frac{s}{r^2}\right]$$

где

$$\frac{du_1}{d\varphi} = -\left(a_3 w + a_4 C_3 + a_5 sk\frac{dw}{d\varphi}\right)(s^2(3-5s^2))^{-2}$$

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\left(a_1 r + a_2\frac{dr}{d\varphi}\right)(r^2 C_3)^{-1},\ \frac{dr}{d\varphi} = v_1\left(\frac{v_1}{r} - \frac{\lambda_4}{k}\right)$$

$$a_1 = 12\mu s^3 k + Cr^2 k + 2Csr\frac{dr}{d\varphi} + C_3^2\frac{dr}{d\varphi}$$

$$a_2 = 3\mu s^4 + Csr^4 + C_3^2 r,\ a_3 = -24 + 40s^4 + 114s^2k^2 + 3k^4 - 15s^2k^4$$

$$a_4 = -12 + 20s^2 + 40s^2k^2,\ a_5 = 24 - 40s^2 - 3k^2 + 5s^2k^2$$

Расчеты, выполненные для различных значений постоянных C и C_3, показали, что для множества значений s, удовлетворяющих неравенствам $s = \sin\varphi < 0$ и $(3s^2 - 1) > 0$ имеют место условия

$a > 0$, если $-1 < s < -0{,}7746$; $a < 0$, если $-0{,}7746 \leqslant s < 0$

Следовательно, полученные выше классы решений удовлетворяют необходимому условию оптимальности, если $-1 < s < -0{,}7746$.

3. Случай полета с нефиксированным временем. Если по условиям вариационной задачи время полета не фиксировано, то имеем $C = 0$ [1]. Тогда из (2.5) получим

$$r = 9\mu\lambda^2 C_3^{-2} s^6 (1 - 3s^2)^{-1} \tag{3.1}$$

Отметим, что эта формула была получена Лоуденом [1] и Келли [4] (для случая $\lambda = 1$).

Ниже найдем соответствующие (3.1) аналитические решения, которые отличаются от решений, представленных ранее [1, 4, 10]. Так, из уравнений (2.3)–(2.5) при учете (2.9) имеем

$$\lambda(sv_2 - kv_1) + C_1 = C_3\frac{1-3s^2}{3s^2} \tag{3.2}$$

$$\lambda_4 = C_3^3 k\frac{(1-3s^2)^2}{27\lambda^2\mu s^9} \tag{3.3}$$

$$\lambda(sv_1 + kv_2) = 4C_3 k\frac{1-3s^2}{6s^3} + \lambda v_1\frac{5s^2-1}{2s} \tag{3.4}$$

Соотношения (3.2) и (3.4) позволяют найти компоненты скорости

$$v_1 = \frac{2C_3 k}{3\lambda s^2(3-5s^2)}, \quad v_2 = \frac{5C_3(1-5s^2+6s^4}{\lambda s^3(3-5s^2)} \tag{3.5}$$

Остальные решения, соответствующие (3.1), (3.3), (3.5) могут быть найдены в квадратурах

$$t = \frac{81\mu\lambda^3}{C_3^3}\int \frac{3-11s^2-10s^4}{1-3s^2}d\varphi + t_0 \tag{3.6}$$

$$\theta = 3\lambda\int \frac{(3-23s^2-30s^4)(1-2s^2)}{s(1-3s^2)}d\varphi + \theta_0$$

где t_0, θ_0 – постоянные интегрирования. Следовательно, первые интегралы, определяемые первым и последним соотношениями (2.2) позволяют определить оставшиеся переменные:

$$M = M_0 e^{f(s)}, \quad \lambda_7 = C_2 M_0^{-1}\exp(f(s)) \tag{3.7}$$

$$f(s) = \left[\frac{C_3\lambda k(5s^2-1)}{3s^2(3-5s^2)} - C\right]C_2^{-1}$$

Секундный расход массы может быть определен из уравнения $\chi^{(\mathrm{IV})} = 0$. Таким образом, равенства (3.1), (3.3), (3.5)–(3.7) представляют собой решения системы (1.3) для участков ПТ в случае полета с нефиксированным временем в зависимости от угла φ. Эти участки являются спиральными траекториями, отличающимися от спиралей Лоудена [1] и других ранее известных решений [4, 7, 10]. Указанные в этих работах решения описывают движения по различным спиральным траекториям, где полярные углы имеют разные интенсивности изменения, и направления этих движений имеют неодинаковые углы наклона к горизонту. Кроме того, текущая масса ракеты определяется по разным формулам.

Для проверки необходимого условия оптимальности Роббинса определим знак реактивного ускорения. Учитывая соотношения (2.13), (2.14), (3.1), (3.3), (3.5) и принимая $\lambda = 1$, из (2.12) получим

$$a = \frac{cm}{M} = C_3^2 \frac{1-3s^2}{[81\mu\lambda_4 s^{13}(3-5s^3)]}\times$$

$$\times\{-90+943s^2-3768s^4+7620s^6-9430s^8+8625s^{10}-4500s^{12}\} \tag{3.8}$$

Расчеты показали, что в множестве значений s, удовлетворяющих неравенствам $s = \sin\varphi < 0$ и $1-3s^2 > 0$ (см. формулу (3.1)), имеем

$a > 0$, если $-0{,}5052 < s < 0$; $a < 0$, если $-0{,}5773 \leqslant s \leqslant -0{,}5052$

Поэтому полученный выше класс решений (3.1), (3.3), (3.5) удовлетворяет необходимому условию оптимальности ($s < 0$) [5], если только $-0{,}5052 < s < 0$, и следовательно, является экстремальным, в отличие от спиралей Лоудена и других решений, полученных ранее [10].

Замечания. 1°. Ранее [1,4] при получении решений для участков ПТ не учитывалось необходимое условие существования этих участков, которое выражается тождеством $\chi \equiv 0$ [12]. Соответствующий анализ решений Лоудена показал, что они не удовлетворяют равенствам $\ddot\chi = \dddot\chi = \chi^{(\mathrm{IV})} = 0$. Учет именно этих условий и приводит к вырождению участков ПТ, найденных Лоуденом [1].

2°. Лоуденом [11] получены решения для спирального участка ПТ в случае нефиксированного времени и минимизации расхода массы в предположении, что траектория такого участка входит в решение задачи оптимального отрыва от круговой орбиты. Однако в данном случае при учете последнего равенства (2.2) из условия трансверсальности следует, что $C_3 = -\partial J/\partial\theta_1 = 0$. Тогда, учитывая, что $\lambda_5 = -\lambda A$ [10], где A – постоянная, фигурирующая в решениях Лоудена, получим $A = 0$, что приводит к вырождению указанных участков. Следовательно, полученные Лоуденом участки ПТ не могут быть включены в оптимальную траекторию отрыва от круговой орбиты.

4. Случай, когда функционал явно не зависит от угловой дальности полета. В данном случае из условия трансверсальности для конечного момента времени получим [1]

$$\lambda_{51} = C_3 = -\partial J/\partial\theta_1 = 0 \tag{4.1}$$

Тогда для случая фиксированного момента времени ($C \neq 0$) из уравнения (2.5) следует равенство

$$r = (-3\mu\, C^{-1} \sin^3\varphi)^{1/2} \tag{4.2}$$

при $C < 0$, $\sin\varphi > 0$ или $C > 0$, $\sin\varphi < 0$.

Далее из соотношений (2.3), (2.4), (2.9) следуют решения для рассматриваемых участков

$$v_1 = \frac{2}{3}\frac{kz(\varphi)}{\lambda(3-5s^2)},\quad v_2 = \frac{2}{3}\frac{(5-7s^2)z(\varphi)}{\lambda s(3-5s^2)} \tag{4.3}$$

$$\theta = -\frac{15}{4}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{21}{4}\varphi + \theta_0,\quad t = -\frac{9}{4}\int\frac{(3-5s^2)}{[r\lambda^2\mu(1-3s^2)]^{1/2}}d\varphi + t_0$$

$$z(\varphi) = (Cr\lambda s + \mu\lambda^2 s^2 r^{-1})^{1/2}$$

Первые интегралы (2.1) и (2.2) позволяют получить решения для массы и сопряженной ей переменной в виде

$$M = M_0\exp(w(\varphi)),\quad \lambda_7 = C_2 M_0^{-1}\exp(-w(\varphi)) \tag{4.4}$$

$$w(\varphi) = \left[\frac{k(5s^2-1)}{s(3-5s^2)} - 3C(t-t_0) - C_1\right](c\lambda)^{-1}$$

Секундный расход массы теперь можно определить с помощью производной от массы по времени. Следовательно, система (4.2)–(4.4) представляет собой класс аналитических решений в квадратурах для спиральных участков ПТ в случае, когда минимизируемый функционал задачи явно не зависит от полярного угла. Отметим, что другой класс участков ПТ был получен ранее [10]. Хотя в указанных решениях формулы для величины радиус-вектора и одинаковы, поведение других переменных описывается разными выражениями. Движения по указанным спиралям происходят с разными скоростями, интенсивностями изменения полярного угла, изменениями массы и времени. Если направление движения, описываемое решениями, полученными ранее [10], составляет с перпендикуляром к радиус-вектору угол, равный 3 φ, то аналогичный угол для полученных выше решений равен ~ 0,4 φ. При $C > 0$ и $\sin\varphi < 0$ решения (4.2)–(4.4) соответствуют требованиям необходимого условия оптимальности.

Проверим знак реактивного ускорения a. При учете (2.13), (2.14) и (4.1)–(4.3), из (2.12) получим

$$a = \frac{cm}{M} = \frac{du_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} - u_2\dot\psi + \frac{\mu}{r}s \tag{4.5}$$

где

$$\frac{du_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{5(1-s^2)s^2}{3-5s^2}\left[(3-5s^2)sk\frac{dz}{d\varphi} - 3z(1-3s^2)\right]$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \mu\lambda^2[2sk(1-6s^2)r - s^2)(1-3s^2)\frac{dr}{d\varphi}]$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{9\mu\lambda k}{2C}s^2 r^{-1}$$

Из численных расчетов, проведенных по формуле (4.5) для различных значений $C(C > 0)$ и переменной s ($s < 0$, $1-3s^2 > 0$), следует, что

для $10^{-6} \leqslant C < 1{,}1 \times 10^{-5}$

$a < 0$ при $-0{,}1301 < s < 0$, $-0{,}5773 < s < -0{,}4101$

$a > 0$ при $-0{,}4101 \leqslant s \leqslant -0{,}1301$

для $1{,}1 \times 10^{-5} \leqslant C < 10^{-4}$

$a < 0$ при $-0{,}5773 < s \leqslant -0{,}4901$

$a > 0$ при $-0{,}4901 < s < 0$

для $10^{-4} \leqslant C \leqslant 4 \times 10^{-3}$

$a < 0$ при $-0{,}5773 < s \leqslant -0{,}5100$

$a > 0$ при $-0{,}5100 < s < 0$

для $C > 4 \times 10^{-3}$ при любых s получим $a < 0$. Следовательно, полученные в этом разделе решения удовлетворяют условию Роббинса только при определенных выше значениях s, при которых реактивное ускорение положительно.

5. Пример. На основе полученных выше результатов рассмотрим задачу определения траектории перелета с фиксированным временем между заданными соосными эллиптическими орбитами с эксцентриситетами e_1, e_2 и параметрами p_1, p_2 в центральном поле сил с ПТ. Долготы перегеев орбит примем равными нулю. В качестве минимизируемого функционала примем характеристическую скорость. В этом случае $\lambda(t_1) = 1$, где t_1 – конечный момент времени перелета. Ниже покажем, что для некоторых значений e_1 и e_2 этот перелет может быть осуществлен при помощи одного участка ПТ. В этом случае экстремаль может состоять из последовательности участков НТ, ПТ и НТ, где участки НТ представляют собой дуги граничных орбит. Следовательно, траектория перелета будет содержать две точки переключения.

Для определения траектории перелета согласно решениям, полученным в разд. 4, рассмотрим условия непрерывности радиус-вектора и вектора скорости в этих точках

$$r_i^2 = -\frac{3\mu}{C}s_i^2 = \frac{p_i^2}{(1+e_i\cos f_i)^2} \tag{5.1}$$

$$\frac{2c_i z_i}{3-5s_i^2} = \left(\frac{\mu}{p_i}\right)^{1/2} e_i \sin f_i, \quad \frac{(5-7s_i^2)z_i}{s_i(3-5s_i^2)} = \left(\frac{\mu}{p_i}\right)^{1/2}(1+e_i\cos f_i)$$

$$c_i = \cos\varphi_i, \quad s_i = \sin\varphi_i, \quad z_i = (Cr_i s_i + s_i^2\mu r_i^{-1})^{1/2}, \quad i = 1,2$$

f_i – истинная аномалия. Индексом i помечены значения соответствующих переменных в первой и второй точках переключения.

Из соотношений (5.1) получим значения φ_i, f_i, C, причем s_i^2 решения уравнений

$$(1+(1-b_i^2/4)/2)[-b_i^2(e_i^2+1)+(b_i^2 e_i/2)^2 -$$

$$-2b_i(4(e_i^2+1)-b_i^2e_i^2)^{1/2}+4]^{1/2} = a_i^2(1-3s_i^2) \tag{5.2}$$

где

$$a_i = \frac{5-7s_i^2}{3-5s_i^2}, \quad b_i = \frac{5-7s_i^2}{s_i c_i}$$

Остальные неизвестные f_i, C могут быть определены по формулам

$$f_i = \arcsin \frac{-b_i + (4(e_i^2+1) - b_i^2 e_i^2)^{1/2}}{2b_i(1-b_i^2/4)} \tag{5.3}$$

$$C = -3\mu s_1^3 (1+e_1\cos f_1)^2 p_1^{-1}$$

Исследование соотношений (5.1)–(5.3) показало, что значения φ_i и f_i зависят лишь только от e_i и не зависят от параметров граничных орбит, но между ними должно иметь место равенство

$$\frac{s_1^3}{s_2^3}\frac{(1+e_1\cos f_1)^2}{(1+e_2\cos f_2)^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} \tag{5.4}$$

Для определения базиса-вектора на граничных орбитах рассмотрим условия его непрерывности в точках переключения [1]

$$\sin\varphi_i = B_i e_i \sin f_i + C I_{2i}(f_i, e_i)$$

$$\cos\varphi_i = B_i(1+e_i\cos f_i) + \frac{D_i}{1+e_i\cos f_i} + C I_{2i}(f_i, e_i) \tag{5.5}$$

$$I_{2i} = \frac{\mathrm{ctg} f_i}{e_i(1+e_i\cos f_i)} + \frac{1+e_i\cos f_i}{e_i \sin f_i} I_{1i}$$

$$I_{1i} = \sin f_i \int \frac{df}{\sin^2 f(1+e\cos f)^2}$$

Здесь B_i, D_i – неизвестные постоянные. Из равенств (5.5) определяются B_i и D_i, тем самым определяются базис-векторы на граничных орбитах.

Для иллюстрации полученных результатов был рассмотрен численный пример с конкретными начальными и конечными условиями: $e_1 = 0{,}21$, $e_2 = 0{,}27$, $p_1 = 9000$ км, $p_2 = 9732$ км, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. На основе соотношений (5.1)–(5.4) для точек переключения получим

$$r_1 = 7628 \text{ км}, \ \sin\varphi_1 = -0{,}4872, \ \sin f_1 = 0{,}5166$$

$$r_2 = 7818 \text{ км}, \ \sin\varphi_2 = -0{,}4953, \ \sin f_2 = 0{,}4225$$

Постоянная гамильтониана $C = 0{,}002377$. Время движения на участке ПТ составляет 109,8 с, при этом отношение характеристической скорости ΔV_1 к местной круговой скорости V_0 для данного перелета равно 0,6946.

Для сравнения полученных результатов с результатами решения аналогичных задач были проведены расчеты для перелета с помощью двух участков максимальной тяги (МТ) и для двухимпульсного перелета между заданными орбитами. Для участков МТ, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, использовались приближенные аналитические решения в случае линейного центрального поля (где гравитационное ускорение – линейная функция радиус-вектора [3]). При этом первая точка переключения находится на начальной эллиптической орбите, вторая и третья на переходной кеплеровской орбите, а четвертая точка переключения соединяет переходную орбиту с конечной эллиптической орбитой. Оказалось, что для перелета с использованием участков МТ безразмерная величина, характеризующая расход массы, $\Delta V_2/V_0 \cong 0{,}3008$, а потери гравитационного ускорения во второй и третьей точках переключения соответственно равны $0{,}1 \times 10^{-6}$ км/с^2 и $1{,}2 \times 10^{-6}$ км/с^2. Для гомановского двухимпульсного перелета имеем $\Delta V/V_0 = 0{,}2859$. Следовательно, для осуществления рассматриваемого перелета между заданными орбитами эффективность (в смысле расхода топлива) использования участка ПТ в 2,3 раза меньше по сравнению со случаем использования участков МТ и в 2,4 раза меньше, чем при использовании импульсной тяги.

Автор признателен $\boxed{\text{А.Г. Азизову}}$ и В.С. Новоселову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лоуден Д.Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966. 152 с.
2. *Azizov A.G., Korshunova N.A.* On an analytical aolution of the optimum trajectory problem in gravitation field // Celest. Mech. 1986. V. 38. № 4. P. 297–306.
3. *Azimov D.M., Musabekov B.I.* A new analytical solutions for maximum thrust arcs and their application to optimal transfer between coplanar orbits. // Proc. Ankara Intern. Aerospace Conf. and Symp. Ankara. Turkey. 1996. P. 193–200.
4. *Kelley H.J.* Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket flight // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 7. P. 1578 – 1582. = Особые экстремали в задаче Лоудена об оптимальном полете ракеты // Ракетн. техника и космонавтика. 1963. Т. 1. № 7. С. 100–102.
5. *Robbins H.M.* Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories // AIAA Journal. 1965. V. 3. № 6. P. 1094–1098. = Оптимальность активных участков промежуточной тяги траекторий ракеты // Ракетн. техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 6. С. 139–145.
6. *Kopp R.E., Moyer H.G.* Necessary conditions for singular extremals // AIAA Journal. 1965. V. 3. № 8. P. 1439–1444. = Необходимые условия оптимальности особых экстремалей // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 8. С. 84–91.
7. *Завалищин С.Т.* Дополнение к теории Лоудена // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 731–738.
8. *Азимов Д.М.* К вопросу об оптимальности участков промежуточной тяги // Алгоритмы и численные методы решения задач прикладной и вычислительной математики / Ташкент: Изд-во Ташк. ун-та, 1988. С. 6–9.
9. *Коршунова Н.А.* О некоторых частных решениях задачи об оптимальной траектории точки переменной массы в центральном поле // Докл. АН УзССР. 1975. № 8. С. 13–15.
10. *Азимов Д.М.* Аналитические решения для участков промежуточной тяги траекторий ракеты в ньютоновском поле // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 426–432.
11. *Lawden D.F.* Optimal powered arcs in an inverse square law field // ARS Journal. 1961. V. 31. № 4. P. 566–568.
12. *Кузмак Г.Е., Исаев В.К., Давидсон Б.Х.* Оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 1. С. 58–61.

Ташкент
e-mail: azimov@csr.utexas.edu

Поступила в редакцию
25.I.1999