УДК 531.36

© 2000 г. А.В. Карапетян, О.В. Проконина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Рассматривается задача о движении тяжелого динамически симметричного шара по горизонтальной плоскости с трением; внутри шара имеется осесимметричная эллипсоидальная полость, целиком заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Показано, что рассматриваемая система наряду с интегралом постоянства интенсивности вихря допускает интеграл типа интеграла Желле. Кроме того, полная механическая энергия системы является невозрастающей функцией. На основе модифицированной теоремы Рауса [1, 2] исследуется устойчивость равномерных вращений системы. Рассматриваются частные случаи сферической полости и невесомой оболочки.

1. Постановка задачи. Пусть по горизонтальной плоскости движется динамически симметричный шар с осесимметричной эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. В отличие от рассмотренного ранее случая абсолютно гладкой плоскости [3] предположим, что плоскость шероховатая, т.е. реакция плоскости представляет собой сумму нормальной реакции и силы трения скольжения.

Предположим, что ось симметрии полости совпадает с осью динамической симметрии шара, а центр масс G системы отстоит от геометрического центра шара на расстояние c. Пусть $Gx_1x_2x_3$ – главные оси инерции системы, причем положительное направление оси симметрии Gx_3 выбрано так, что аппликата геометрического центра шара равна $c > 0$. При указанных условиях уравнение полости имеет вид

$$x_1^2 / a_1^2 + x_2^2 / a_2^2 + (x_3 - a)^2 / a_3^2 = 1$$

где $a_1 = a_2$ и a_3 – полуоси полости, a – аппликата ее геометрического центра (в частности, в случае невесомой оболочки $a = 0$).

Уравнения движения системы, отнесенные к системе координат $Gx_1x_2x_3$, имеют вид [1, 2]

$$m(\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) = -mg\gamma_1 + R_1 \quad (123) \tag{1.1}$$

$$A_{*1}\dot{\omega}_1 + A_1'\dot{\Omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + A_3'\omega_2\Omega_3 - A_2'\omega_3\Omega_2 = \rho_2 R_3 - \rho_3 R_2 \quad (123) \tag{1.2}$$

$$\dot{\Omega}_1 + 2a_1^2\left(\frac{(\omega_2 - \Omega_2)\Omega_3}{a_3^2 + a_1^2} - \frac{(\omega_3 - \Omega_3)\Omega_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) = 0 \quad (123) \tag{1.3}$$

$$\dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0 \quad (123) \tag{1.4}$$

Здесь

$$A_1^* = \frac{m_l(a_2^2 - a_3^2)^2}{5(a_2^2 + a_3^2)}, \quad A_1' = \frac{4m_l a_2 a_3^2}{5(a_2^2 + a_3^2)} \quad (123)$$

$$A_{*i} = A_i + A_i^*, \quad m = m_b + m_l$$

символ (123) означает, что два невыписанных соотношения получаются из выписанного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3; m_b – масса оболочки, m_l – масса жидкости, A_1, A_2 и A_3 – главные центральные моменты инерции оболочки ($A_1 = A_2$), через v_i, ω_i, Ω_i, γ_i, R_i и ρ_i обозначены проекции векторов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\rho}$ на оси $Gx_1x_2x_3$, $\mathbf{v}$ – скорость центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $2\boldsymbol{\Omega}$ – вектор вихря, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт восходящей вертикали, $\mathbf{R} = N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}$ – реакция плоскости ($\mathbf{F}$ – сила трения: $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0$, $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) \leqslant 0$, $\boldsymbol{\rho} = c\mathbf{e}_3 - r\boldsymbol{\gamma}$ – радиус-вектор точки касания волчка с опорной плоскостью относительно центра масс ($\mathbf{e}_3$ – орт оси Gx_3, r – радиус сферической оболочки)).

Уравнение (1.1) выражает теорему об изменении импульса системы, уравнение (1.2) – теорему об изменении кинетического момента, уравнение (1.3) – теорему Гельмгольца, а уравнение (1.4) – условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в инерциальной системе координат. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, нужно задать тот или иной закон трения в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}(N, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma})$ и к уравнениям (1.1)–(1.4) добавить уравнение

$$(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{1.5}$$

выражающее условие безотрывного движения волчка.

2. Перманентные вращения и их устойчивость. Можно показать, что полная механическая энергия H волчка не возрастает в силу системы (1.1)–(1.5), и эта система допускает три первых интеграла – обобщенный интеграл Желле J, интеграл постоянства интенсивности вихря W и геометрический Γ:

$$H = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{1}{2}(A_{*1}\omega_1^2 + A_{*1}\omega_2^2 + A_{*3}\omega_3^2) + \frac{1}{2}(A_1'\Omega_1^2 + A_1'\Omega_2^2 + A_3'\Omega_3^2) -$$
$$-mgc\gamma_3 \leqslant h(\dot{H} \leqslant 0) \tag{2.1}$$

$$J = (A_{*1}\omega_1 + A_1'\Omega_1)\gamma_1 + (A_{*1}\omega_2 + A_1'\Omega_2)\gamma_2 + (A_{*3}\omega_3 + A_3'\Omega_3)\gamma_3 - \varepsilon A_{*3}\omega_3 = k \quad (\varepsilon = c/r) \tag{2.2}$$

$$W = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \delta^2\Omega_3^2 = \Omega^2 \quad (\delta = a_1/a_3) \tag{2.3}$$

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.4}$$

Согласно обобщенной теории Рауса [1, 2] критическим точкам невозрастающей функции H на фиксированных уровнях первых интегралов J, W и Γ отвечают стационарные движения системы, причем точкам минимума – устойчивые стационарные движения.

Будем решать задачу отыскания критических точек функции H в два этапа. Сначала [2] найдем единственный минимум функции (2.1) по переменным $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на фиксированном уровне интеграла Желле (2.2), рассматривая переменные $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ как параметры. Для этого введем функцию $\Phi = H - \lambda(J - k)$, где λ – неопределенный множитель Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ и λ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}} = m\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_i} = A_{*i}(\omega_i - \lambda(\gamma_i - \delta_{i3}\varepsilon)) = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (A_{*1} = A_{*2}) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = -(J - k) = 0 \tag{2.7}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Из уравнений (2.5), (2.6) следует, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \omega_i = \lambda(\gamma_i - \delta_{i3}\varepsilon), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

Подставляя выражения (2.8) в уравнение (2.7), получим

$$\lambda = \Lambda/\Delta_\varepsilon, \tag{2.9}$$
$$\Lambda = k - (A_1'\Omega_1\gamma_1 + A_1'\Omega_2\gamma_2 + A_3'\Omega_3\gamma_3)$$
$$\Delta_\varepsilon = A_{*1}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + A_{*3}(\gamma_3 - \varepsilon)^2$$

Таким образом (см. (2.1), (2.8) и (2.9)),

$$\min_{\mathbf{v},\boldsymbol{\omega}} H\,|_{J=k} = V_k = \frac{1}{2}(A_1'\Omega_1^2 + A_1'\Omega_2^2 + A_3'\Omega_3^2) - mgc\gamma_3 + \frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{\Delta_\varepsilon} \tag{2.10}$$

Функцию $V_k(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\gamma})$ можно интерпретировать как обобщенный эффективный потенциал. Его критические точки на прямом произведении эллипсоида (2.3) и сферы (2.4) отвечают (при учете соотношений (2.8), (2.9)) стационарным движениям системы, причем точки минимума – устойчивым стационарным движениям.

Для отыскания критических точек функции (2.10) при условиях (2.3) и (2.4) введем функцию

$$\Psi = V_k - \frac{1}{2}\mu(W - \Omega^2) - \frac{1}{2}\nu(\Gamma - 1)$$

где μ и ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, μ и ν:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Omega_i} = -\frac{\Lambda}{\Delta_\varepsilon}A_i'\gamma_i + A_i'\Omega_i - \mu[1 + \delta_{i3}(\delta^2 - 1)]\Omega_i = 0$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_i} = -\frac{\Lambda}{\Delta_\varepsilon}A_i'\Omega_i - \frac{\Lambda^2}{\Delta_\varepsilon^2}A_{*i}(\gamma_i - \delta_{i3}\varepsilon) - \nu\gamma_i - mgc\delta_{i3} = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} = -\frac{1}{2}(W - \Omega^2) = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = -\frac{1}{2}(\Gamma - 1) = 0$$

Система уравнений (2.11) допускает решения

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \Omega_3 = \Omega/\delta \tag{2.12}$$
$$\left(\mu_\pm = \frac{A_3'}{\delta^2} - A_3'\frac{\omega_\pm}{\Omega\delta(1\mp\varepsilon)}, \quad \omega_\pm = \frac{k \mp A_3'\Omega/\delta}{A_{*3}(1\mp\varepsilon)},\right.$$
$$\left.\nu_\pm = \mp mgc - A_3'\frac{\omega_\pm\Omega}{\delta(1\mp\varepsilon)} - A_{*3}\frac{\omega_\pm^2}{(1\mp\varepsilon)}\right)$$

Верхний (нижний) знак в выражении для γ_3 соответствует верхнему (нижнему) знаку во всех других выражениях соотношений (2.12).

Эти решения отвечают перманентным вращениям твердого тела (оболочки) и жидкости вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии при наивысшем ($\gamma_3 = -1$) и наинизшем ($\gamma_3 = +1$) расположении центра масс

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = \omega_1 = \omega_2 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$$
$$\gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_3 = \omega_\pm, \quad \Omega_3 = \Omega/\delta \tag{2.13}$$

Для исследования устойчивости решений (2.13) достаточно проанализировать вторую вариацию $\delta^2\Psi$ функции Ψ на линейном многообразии $\delta W = \delta\Gamma = 0$, которое для этих решений имеет вид

$$\delta\Omega_3 = \delta\gamma_3 = 0 \tag{2.14}$$

Для решения (2.13) в случае $\gamma_3 = +1$ получим

$$\delta^2\Psi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\,[A(\delta\Omega_j)^2 + 2B\delta\Omega_j\delta\gamma_j + C(\delta\gamma_j)^2]$$

$$A = \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Omega_i^{(2)}}\right)_{(2.12)} = A_1' - \mu_+ = A_1' - \frac{A_3'}{\delta^2} + A_3'\frac{\omega_+}{\Omega\delta(1-\varepsilon)} = A_1'\left[\frac{\delta^2-1}{2\delta^2} + \frac{\delta^2+1}{2\delta^3(1-\varepsilon)}\frac{\omega_+}{\Omega}\right]$$

$$B = \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Omega_i\partial\gamma_i}\right)_{(2.12)} = -A_1'K_+ = -A_1'\frac{\omega_+}{1-\varepsilon} = -A_3'\frac{2\omega_+}{(\delta^2+1)(1-\varepsilon)}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\gamma_i^{(2)}}\right)_{(2.12)} = -(\nu_+ + K_+^2A_{*1}) = mgc + A_3'\frac{\Omega\omega_+}{\delta(1-\varepsilon)} + A_{*3}\frac{\omega_+^2}{1-\varepsilon} - A_{*1}\frac{\omega_+^2}{(1-\varepsilon)^2}$$

$$\left(K_\pm = \frac{k \mp A_3'\Omega/\delta}{A_{*3}(\pm 1-\varepsilon)^2} = \frac{\omega_\pm}{\pm 1-\varepsilon}\right)$$

Таким образом, условия устойчивости решения (2.13) в случае $\gamma_3 = +1$ имеют вид $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, что эквивалентно неравенствам

$$\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1} + \frac{\delta\omega_+}{\Omega(1-\varepsilon)} > 0 \tag{2.15}$$

$$\left[\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1} + \frac{\delta\omega_+}{\Omega(1-\varepsilon)}\right]\left[mgc + (A_{*3}(1-\varepsilon) - A_{*1})\frac{\omega_+^2}{(1-\varepsilon)^2}\right] +$$

$$+ A_3'\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}\frac{\Omega\omega_+}{\delta(1-\varepsilon)}\left[1 + \frac{\delta(\delta^2-1)}{\delta^2+1} + \frac{\omega_+}{\Omega(1-\varepsilon)}\right] > 0 \tag{2.16}$$

Условия устойчивости решения (2.13) в случае $\gamma_3 = -1$ имеют вид, аналогичный условиям (2.15), (2.16) при замене в них ω_+, ε, c, A_{*3} на ω_-, $-\varepsilon$, $-c$, $-A_{*3}$.

Из этих условий следует, что вращение жидкости, совпадающее с вращением твердого тела по направлению ($\omega_\pm/\Omega > 0$), оказывает стабилизирующее воздействие. Если же оболочка и жидкость закручены в разные стороны ($\omega_\pm/\Omega < 0$), то область устойчивости у́же, чем в задаче о движении тела без жидкости.

В частности, в случае шаровой полости ($\delta = 1$) условие (2.15) и аналогичное ему для $\gamma_3 = -1$ означают, что жидкость и тело вращаются в одну и ту же сторону, а условие (2.16) и аналогичное ему для $\gamma_3 = -1$ совпадают с соответствующими случаю отсутствия жидкости условиями устойчивости вертикальных вращений волчка [2].

3. Случай невесомой оболочки. Рассмотрим случай, когда массой оболочки можно пренебречь ($m_b = 0$, $A_1 = A_3 = 0$); при этом $A_{*3} = 0$ и обобщенный эффективный потенциал (2.11) имеет особенность при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Поэтому стационарные движения волчка с невесомой оболочкой будем изучать путем непосредственного исследования критических точек функции (2.1) на фиксированных уровнях первых интегралов (2.2)–(2.4).

Представим невозрастающую функцию H и обобщенный интеграл Желле J в виде

$(m_l = m)$

$$H = (ma_3^2/5)H_0, \quad J = (ma_3^2/5)J_0$$

где

$$H_0 = \frac{5}{2a_3^2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}(\omega_1^2+\omega_2^2) + \right.$$

$$\left. +4\frac{\delta^2}{\delta^2+1}(\Omega_1^2+\Omega_2^2) + 2\delta^2\Omega_3\right] - G\gamma_3 \leqslant h_0, \quad G = 5\frac{gc}{a_3^2} \tag{3.1}$$

$$J_0 = \frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2) + 4\frac{\delta^2}{\delta^2+1}(\Omega_1\gamma_1+\Omega_2\gamma_2) + 2\delta^2\Omega_3\gamma_3 = k_0 \tag{3.2}$$

Для отыскания критических точек функции (3.1) при условиях (3.2), (2.3), (2.4) введем функцию

$$V = H_0 - \lambda(J_0 - k_0) - \frac{1}{2}\mu(W - \Omega^2) - \frac{1}{2}\nu(\Gamma - 1)$$

где λ, μ, ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, λ, μ и ν. В результате получим

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \frac{5}{a_3^2}v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_j} = \frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}(\omega_j - \lambda\gamma_j), \quad \frac{\partial V}{\partial \Omega_j} = 4\frac{\delta^2}{\delta^2+1}(\Omega_j - \lambda\gamma_j) - \mu\Omega_j = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_j} = -\lambda\frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}\omega_j + 4\lambda\frac{\delta^2}{\delta^2+1}\Omega_j - \nu\gamma_j = 0; \quad j = 1, 2 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega_3} = \delta^2[(2-\mu)\Omega_3 - 2\lambda\gamma_3] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_3} = -G - 2\lambda\delta^2\Omega_3 - \nu\gamma_3 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = -(J_0 - k_0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} = -(W - \Omega^2) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = -(\Gamma - 1) = 0$$

Очевидно, система (3.3) допускает решения

$$v_1 = v_2 = v_3 = \omega_1 = \omega_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \Omega_3 = \Omega/\delta \tag{3.4}$$

$$(\lambda = \mp p\Omega \ (p \in \mathbb{R}), \quad \mu = 2(1 - p\delta), \quad \nu = \mp G - 2p\delta\Omega^2)$$

аналогичные решениям (2.13) с соответствующим верхним или нижним знаком.

Для исследования устойчивости стационарных движений (3.4) вычислим вторую вариацию функции V на линейном многообразии $\delta J_0 = \delta W = \delta\Gamma = 0$, которое для этих решений имеет вид (2.14), сохраняя для вариаций переменных v_i (i = 1, 2, 3), ω_j, Ω_j, γ_j (j = 1, 2) их прежние обозначения. В результате получим

$$\delta^2 V=\frac{5}{2a_3^2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}\omega_j^2+2\left(p\delta+\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}\right)\Omega_j^2+\right.$$

$$\left.+(\pm G+2p\delta\Omega^2)\gamma_j^2-2p\Omega\frac{(\delta^2-1)^2}{\delta^2+1}\omega_j\gamma_j-8\frac{\delta^2}{\delta^2+1}p\Omega\Omega_j\gamma_j\right] \tag{3.5}$$

(знак плюс перед G берется для решения (3.4) в случае $\gamma_3=+1$, а знак минус – для решения (3.4) в случае $\gamma_3=-1$).

Квадратичная форма (3.5) определенно положительна при условиях

$$\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}+p\delta>0 \tag{3.6}$$

$$\Omega^2\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}f(p)\pm\left(\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}+p\delta\right)G>0 \tag{3.7}$$

$$f(p)=-p^3\delta(\delta^2-1)+p^2(\delta^2-1)+2p\delta$$

Учитывая произвольность параметра p, заключаем, что стационарные движения (3.4) устойчивы, если найдется $p\in\mathbb{R}$, при котором одновременно выполняются неравенство (3.6) и соответствующее неравенство (3.7) с верхним или нижним знаком.

Проанализируем неравенство (3.6) и неравенство (3.7) с верхним знаком. Если $\delta>1$, то эти неравенства выполняются при $p=0$. Если же $\delta<1$, то неравенство (3.6) выполняется при

$$p>p^0>0\quad\left(p^0=\frac{1-\delta^2}{\delta(1+\delta^2)}\right)$$

При таких p коэффициент при Ω^2 в левой части неравенства (3.7) с верхним знаком отрицателен, и это неравенство выполняется лишь при $\Omega^2<\Omega_p^2$, где

$$\Omega_p^2=G\frac{F(p)}{p^0},\quad F(p)=\frac{p-p^0}{f(p)}\quad(p>p^0)$$

Таким образом, при $\delta\in(0,1)$ неравенство (3.6) и неравенство (3.7) с верхним знаком выполняются одновременно при $p=p_0>p^0$, если

$$\Omega^2<\Omega_0^2=GF(p_0)/p^0 \tag{3.8}$$

где p_0 – точка максимума функции $F(p)$ на луче $(p^0,+\infty)$.

Аналогично анализируются неравенство (3.6) и неравенство (3.7) с нижним знаком. При $\delta>1$ эти неравенства выполняются одновременно при

$$p=p_1\in(p',0),\ \text{если}\ \ \Omega^2>\Omega_1^2=GF(p_1)/p^0 \tag{3.9}$$

где p' – меньший корень уравнения $f(p)=0$, а p_1 – точка минимума функции $F(p)$ на интервале $(p',0)$. При $\delta\in(0,1)$ эти неравенства не выполняются одновременно ни при каком $p\in\mathbb{R}$.

Таким образом, устойчивость вращений волчка с жидким наполнением вокруг вертикально расположенной оси симметрии на горизонтальной плоскости с трением существенно зависит (в случае невесомой оболочки) и от расположения полости и от ее формы. Если центр полости находится ниже центра сферической оболочки, то вращение волчка (решение (3.4) для случая $\gamma_3=+1$) всегда устойчиво, если полость представляет собой сжатый ($\delta>1$) сфероид, и устойчиво при малой завихренности жидкости (см. (3.8)), если полость – вытянутый ($0 < \delta < 1$) сфероид. Если же центр полости находится выше центра сферической оболочки, то вращение волчка (решение (3.4) для случая $\gamma_3 = -1$) для $0 < \delta < 1$ всегда неустойчиво, а для $\delta > 1$ устойчиво при большой завихренности жидкости (см. (3.9)).

В частности, если центр полости совпадает с центром невесомой сферической оболочки (при этом $G = 0$), то равномерное вращение волчка вокруг вертикально расположенной оси симметрии на горизонтальной плоскости с трением всегда устойчиво (неустойчиво), если полость сжата, $\delta > 1$ (вытянута, $\delta < 1$) вдоль оси симметрии. Таким образом, наличие трения скольжения разрушает устойчивость вращений волчка на абсолютно гладкой плоскости [3] в случае сильно вытянутой полости ($\delta < {}^1/_3$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00041) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (2.1-294).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
3. *Маркеев А.П.* Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 19–26.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1999