

УДК 531.391:62–50

© 2000 г. Ф.Л. Черноусько

ДВИЖЕНИЕ МНОГОЗВЕННИКА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследуются возможные движения плоского многозвенника по горизонтальной плоскости. Между многозвенником и плоскостью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона. Многозвенник приводится в движение при помощи внутренних управляющих моментов, действующих в шарнирах, соединяющих звенья. Построены способы управления, обеспечивающие движение многозвенника как целого в любом заданном направлении. Оценена скорость этих движений. Найденные формы движения могут служить моделью перемещения змей и некоторых других животных, а также могут быть использованы при создании ползающих робототехнических систем.

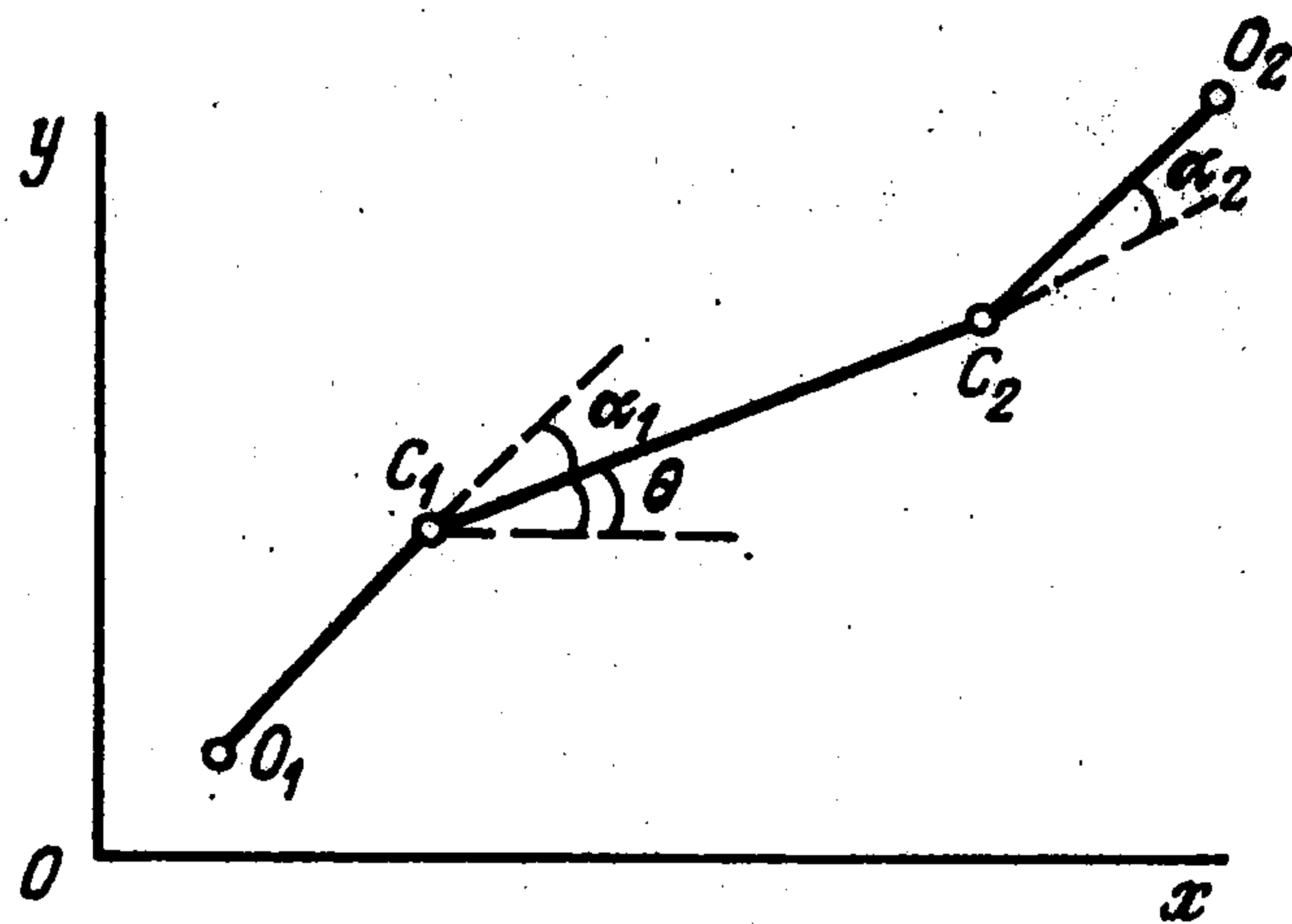
1. Введение. Рассмотрим различные способы движения тел (аппаратов, транспортных средств, животных) по плоской горизонтальной поверхности. Пусть внешние силы, кроме силы тяжести и реакции поверхности, а также реактивные силы отсутствуют. Тогда, как известно, силы трения в точках контакта тела с поверхностью играют существенную роль: только при наличии этих сил движение вообще может начаться. Отличительной особенностью большинства известных способов движения, использующих колеса, ноги, гусеницы, является следующее свойство: в процессе движения точки тела, которыми оно соприкасается с поверхностью, не остаются неизменными. Действительно, при качении колеса точки контакта меняются непрерывно, при ходьбе – от шага к шагу и т.д. В тех же редких случаях, когда точки контакта не меняются (например, можно двигаться на лыжах, не отрывая их от снега), происходит перераспределение сил нормального давления между точками контакта (человек переносит тяжесть с одной ноги на другую).

Однако есть такой способ движения, при котором точки контакта тела с поверхностью остаются неизменными и, кроме того, нормальное давление тела на поверхность в этих точках также не меняется. Такой способ движения реализуют змеи и некоторые другие животные. Они постоянно соприкасаются с поверхностью по всей (или почти всей) своей длине и передвигаются только за счет изгибания тела. Эти животные могут перемещаться не только вперед, но и вбок, т.е. перпендикулярно оси своего тела. Различные аспекты механики змей, а также некоторые проблемы механики роботов, использующих этот принцип движения, обсуждались в [1–3].

Отличительная особенность этого способа движения состоит в том, что управляющие моменты, приводящие тело в движение, приложены к осям, перпендикулярным плоскости движения. Иными словами, все движение системы является плоским.

В данной работе предлагается механическая модель такого способа движения. На примере простой системы (трехзвенника) показано, что только за счет внутренних моментов, действующих в шарнирах, можно обеспечить движение системы в любом заданном направлении и ее вращение на месте. Предполагается, что между многозвенником и плоскостью действуют силы сухого трения. Построены периодические законы изменения углов в шарнирах и соответствующие формы движения многозвенника. Оценены смещения и скорости движения.

2. Механическая модель. Рассмотрим плоский трехзвенник $O_1C_1C_2O_2$, движущийся по горизонтальной плоскости (фиг. 1). Примем для простоты, что вся масса трехзвенника сосредоточена в точках O_1, C_1, C_2, O_2 , которые скользят по плоскости. Предполагаем, что звенья являются абсолютно жесткими стержнями, а их масса пренебрежимо мала. Массы, сосредоточенные в шарнирах C_1 и C_2 , обозначим через m_1 , а массу каждой из концевых точек O_1 и O_2 — через m_0 . Таким образом, масса всего многозвенника равна $m = 2(m_0 + m_1)$. Длины звеньев O_1C_1 и C_2O_2 предполагаем равными и обозначим через l , а длину звена C_1C_2 — через $2a$. Звено C_1C_2 вместе с массами, сосредоточенными в шарнирах C_1 и C_2 , будем называть корпусом, звенья O_1C_1 и C_2O_2 вместе с концевыми массами — концевыми звеньями.



Фиг. 1

В плоскости движения введем неподвижную декартову систему координат Oxy . Обозначим через x, y декартовы координаты центра масс корпуса C_1C_2 , а через $\theta_1, \theta, \theta_2$ — углы наклона звеньев O_1C_1, C_1C_2, C_2O_2 к оси x , соответственно. Имеем

$$\theta_1 = \theta + \alpha_1, \quad \theta_2 = \theta + \alpha_2 \quad (2.1)$$

где α_1, α_2 — углы между корпусом и концевыми звеньями O_1C_1, C_2O_2 , соответственно (см. фиг. 1). Запишем нужные для дальнейшего декартовы координаты шарниров C_1, C_2 и концевых точек O_1, O_2

$$\begin{aligned} x_i^C &= x \mp a \cos \theta, & y_i^C &= y \mp a \sin \theta \\ x_i^O &= x \mp a \cos \theta \mp l \cos \theta_i, & y_i^O &= y \mp a \sin \theta \mp l \sin \theta_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее верхние знаки минус и плюс соответствуют $i = 1$, нижние — $i = 2$. Используя равенства (2.2), определим координаты центра масс C многозвенника

$$\begin{aligned} x_C &= x - m_0 m^{-1} l (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ y_C &= y - m_0 m^{-1} l (\sin \theta_1 - \sin \theta_2), \quad m = 2(m_0 + m_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дифференцируя соотношения (2.2), найдем компоненты скоростей точек C_1, C_2, O_1, O_2

$$\begin{aligned} v_{xi}^C &= \dot{x} \pm a \dot{\theta} \sin \theta, & v_{yi}^C &= \dot{y} \mp a \dot{\theta} \cos \theta \\ v_{xi}^O &= \dot{x} \pm (a \dot{\theta} \sin \theta + l \dot{\theta}_i \sin \theta_i), & v_{yi}^O &= \dot{y} \mp (a \dot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}_i \cos \theta_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подсчитаем кинетический момент многозвенника относительно начала координат по формуле

$$K = \sum_{i=1}^2 \left(m_0 \begin{vmatrix} x_i^O & y_i^O \\ v_{xi}^O & v_{yi}^O \end{vmatrix} + m_1 \begin{vmatrix} x_i^C & y_i^C \\ v_{xi}^C & v_{yi}^C \end{vmatrix} \right) \quad (2.5)$$

Подставляя в выражение (2.5) соотношения (2.2) и (2.4), после громоздких, но элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} K &= m(xy - yx) + 2(m_0 l^2 + m_0 a^2 + m_1 a^2) \dot{\theta} + m_0 l^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) + \\ &+ m_0 l [\dot{x} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - \dot{y} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)] + m_0 a l \dot{\theta} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + \\ &+ m_0 l \dot{\theta}_1 (-x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 + a \cos \alpha_1) + m_0 l \dot{\theta}_2 (x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 + a \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для каждой из масс O_1, C_1, C_2, O_2 ее вес уравнивается нормальной реакцией плоскости. Сила сухого трения, действующая на каждую из этих масс, подчиняется закону Кулона

$$\mathbf{F}_i = -m_i g k \mathbf{v}_i v_i^{-1}, \quad v_i \neq 0; \quad |\mathbf{F}_i| \leq m_i g k, \quad v_i = 0 \quad (2.7)$$

Здесь \mathbf{F}_i – двумерный вектор силы трения, лежащий в плоскости Oxy , \mathbf{v}_i – вектор скорости рассматриваемой точки, m_i – ее масса, g – ускорение силы тяжести, k – коэффициент трения между массами и плоскостью.

В шарнирах C_1 и C_2 действуют управляющие моменты M_1 и M_2 , соответственно, создаваемые двигателями, расположенными в этих шарнирах. Будем считать, что моменты M_1 и M_2 приложены к концевым звеньям O_1C_1 и O_2C_2 соответственно. На корпус со стороны этих звеньев действуют моменты $(-M_1)$ и $(-M_2)$, соответственно. Цель настоящей работы – построение законов управления, обеспечивающих движение многозвенника по плоскости в любом направлении. Для этого достаточно построить законы движения многозвенника, имеющего первоначально прямолинейную конфигурацию, вдоль самого себя (продольное движение), поперек (боковое движение), а также его вращение на месте. При помощи этих форм движения нетрудно обеспечить любое перемещение.

3. Элементарные движения. Искомые движения будем строить как комбинации более простых движений, которые будем называть элементарными. Элементарные движения начинаются из состояния покоя и заканчиваются также в состоянии покоя. Начальные и конечные значения угла поворота звена α_i для каждого элементарного движения обозначим через α_i^0 и α_i^1 , соответственно, $i = 1, 2$. Введем также обозначение

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i^1 - \alpha_i^0, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Элементарные движения делятся на медленные и быстрые движения.

В медленных движениях движется одно или оба концевых звена, причем их угловые скорости и ускорения достаточно малы, так что корпус C_1C_2 не вовлекается в движение. Угловая скорость вращения каждого звена $\dot{\alpha}_i$ ($i = 1, 2$) сохраняет постоянный знак. Примем для определенности, что абсолютная величина ω угловой скорости звеньев $\dot{\alpha}_i$ ($i = 1, 2$) сначала возрастает от 0 до ω_0 , а затем убывает от ω_0 до 0. Абсолютную величину углового ускорения $|\dot{\omega}|$ считаем постоянной и равной ε_0 . Справедливы соотношения

$$|\dot{\alpha}_i| = \omega, \quad |\Delta\alpha_i| = \omega_0 T/2, \quad i = 1, 2, \quad \omega_0 = \varepsilon_0 T/2 \quad (3.2)$$

$$\omega(t) = \varepsilon_0 t, \quad t \in [0, T/2]; \quad \omega(t) = \varepsilon_0 (T - t), \quad t \in [T/2, T]$$

Здесь T – длительность медленного движения. График изменения $\omega(t)$ представлен на фиг. 2. В медленных движениях либо участвует одно концевое звено, причем другое остается неподвижным, либо движутся оба звена синхронно. В последнем случае они могут вращаться либо в одну и ту же сторону, либо в противоположные стороны, причем выполняется условие

$$\alpha_2(t) = \pm\alpha_1(t) + \beta, \quad t \in [0, T] \quad (3.3)$$

где β – постоянная. Оба звена начинают и заканчивают движение одновременно, за одно и то же время T , и для каждого из них имеют место соотношения (3.2).

В быстрых движениях угловые скорости и ускорения концевых звеньев достаточно велики, а время движения мало по сравнению с временем медленных движений T . При этом величины управляющих моментов M_1 и M_2 в шарнирах C_1 и C_2 , соответственно, должны быть велики по сравнению с моментами сил трения, которые ограничены

величинами порядка μgkL , где $\mu = \max(m_0, m_1)$, $L = \max(a, l)$. При рассмотрении быстрых движений можно поэтому не учитывать силы трения. Оба концевых звена при быстрых движениях поворачиваются либо в одну и ту же, либо в противоположные стороны синхронно. Здесь снова выполняются соотношения (3.3), однако имеют место также дополнительные условия.

Будем рассматривать следующие три вида быстрых движений.

1°. Концевые звенья вращаются в противоположные стороны, причем в начале и в конце движения один из углов α_i ($i = 1, 2$) равен нулю. С учетом условия (3.3) имеем $\alpha_2(t) + \alpha_1(t) = \beta$ и

$$\alpha_1^0 = 0, \quad \alpha_2^0 = \beta \quad \text{или} \quad \alpha_1^0 = \beta, \quad \alpha_2^0 = 0 \quad (3.4)$$

2°. Концевые звенья вращаются в противоположные стороны, причем $\beta = 0$, так что $\alpha_2(t) = -\alpha_1(t)$.

3°. Концевые звенья вращаются в одну и ту же сторону, причем $\beta = 0$, так что $\alpha_2(t) = \alpha_1(t)$.

Закон изменения угловых скоростей концевых звеньев для быстрых движений несуществен. Важно лишь, что движения обоих звеньев происходят за одно и то же время при выполнении указанных выше условий, начинаются и заканчиваются в состоянии покоя.

4. Анализ медленных движений. Рассмотрим баланс сил и моментов в медленных движениях и найдем условия, достаточные для того, чтобы корпус в этих движениях оставался неподвижным.

На неподвижный корпус C_1C_2 со стороны вращающихся концевых звеньев O_1C_1 и O_2C_2 действуют силы N_1, R_1 и N_2, R_2 , соответственно, равные (всюду далее $i = 1, 2$)

$$N_i = m_0 \dot{\alpha}_i^2 l, \quad R_i = m_0 \ddot{\alpha}_i l \quad (4.1)$$

Силы N_i направлены по соответствующим звеньям O_iC_i , а силы R_i перпендикулярны этим звеньям, см. фиг. 3. Кроме того, к корпусу приложены управляющие моменты, равные $(-M_i)$. Примем для определенности, что корпус параллелен оси x . Проекция на ось x , y сил трения, приложенных к точкам C_i , обозначим через X_i, Y_i .

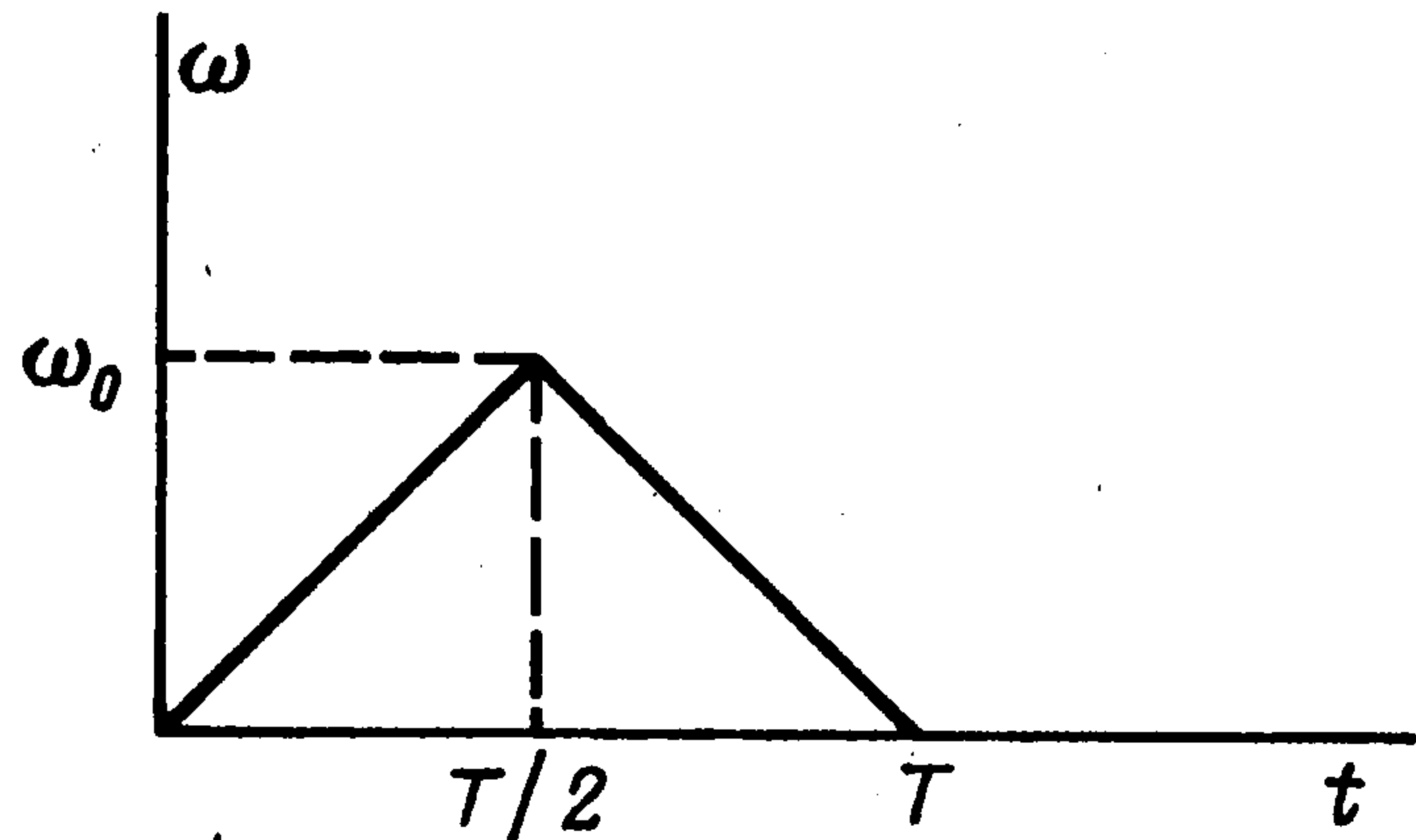
Составим уравнения равновесия корпуса под действием приложенных сил и моментов. В качестве трех уравнений равновесия возьмем условия равенства нулю сумм моментов приложенных сил относительно шарниров C_1 и C_2 и условия равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x . Имеем

$$2a(N_i \sin \alpha_i - R_i \cos \alpha_i \mp Y_i) = M_1 + M_2 \quad (4.2)$$

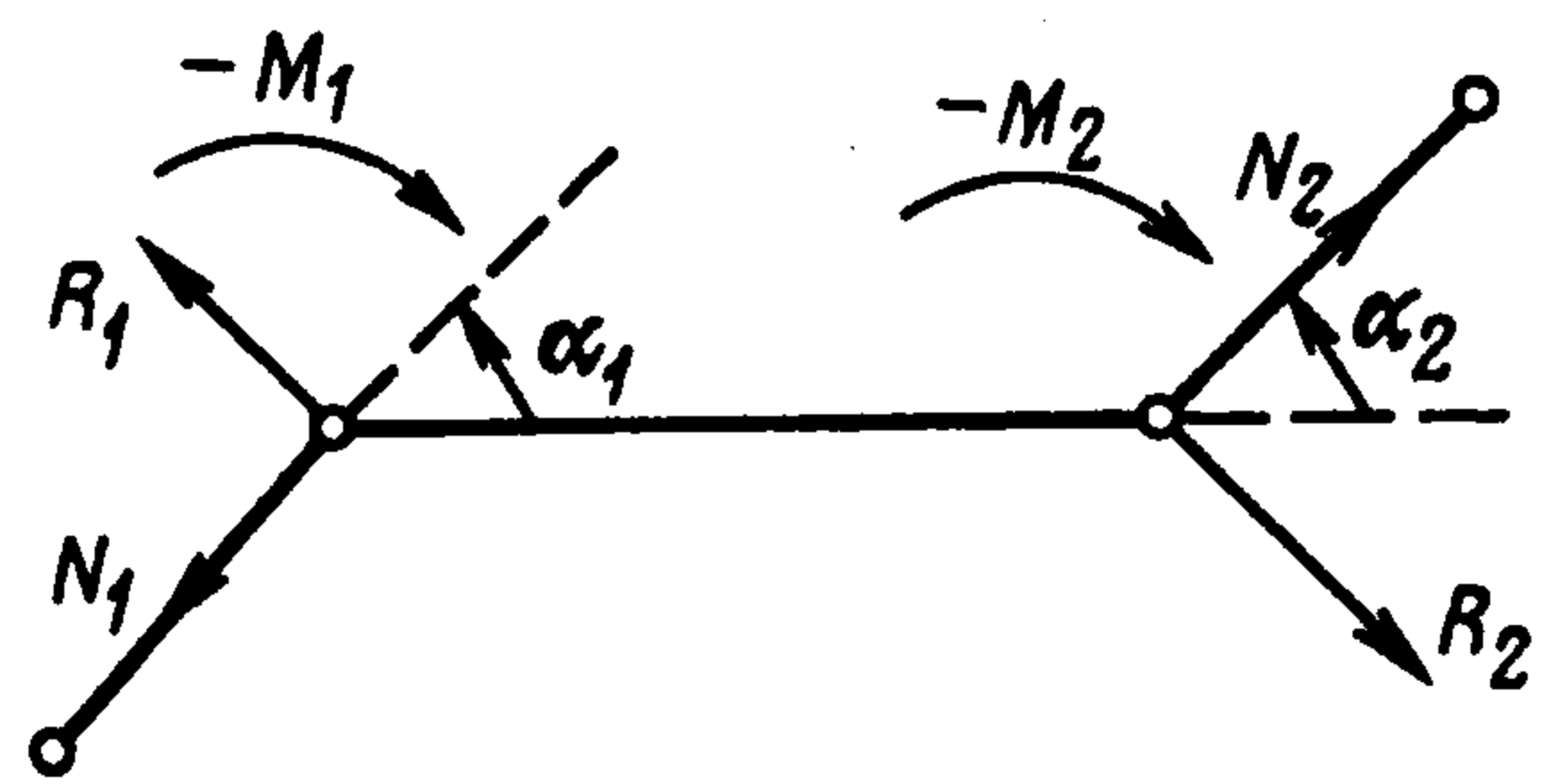
$$N_1 \cos \alpha_1 + R_1 \sin \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 - R_2 \sin \alpha_2 = X_1 + X_2 \quad (4.3)$$

Здесь и далее действует принятое в разд. 2 соглашение: верхние знаки минус и плюс отвечают значениям $i = 1$, нижние $-i = 2$. Условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось y является следствием уравнений (4.2).

Отметим, что рассматриваемая система статически неопределима: для четырех неизвестных сил реакции X_i, Y_i имеется всего три уравнения (4.2), (4.3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Обозначим через Φ_{ix} , Φ_{iy} проекции на оси x , y суммарных сил Φ_i , действующих на корпус со стороны концевых звеньев O_iC_i .

Имеем

$$\Phi_{ix} = \mp(N_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i), \quad \Phi_{iy} = \mp(N_i \sin \alpha_i - R_i \cos \alpha_i) \quad (4.4)$$

Используя обозначения (4.4), найдем из (4.2)

$$Y_i = -\Phi_{iy} \mp Q, \quad Q = (M_1 + M_2)/(2a) \quad (4.5)$$

Уравнение (4.3) перепишем в виде

$$X_1 + X_2 = -\Phi_{1x} - \Phi_{2x} \quad (4.6)$$

Равновесие корпуса будет иметь место, если существуют реакции X_i , Y_i , удовлетворяющие соотношениям (4.5), (4.6) и неравенствам закона Кулона (2.7)

$$(X_i^2 + Y_i^2)^{1/2} \leq F_1, \quad F_1 = m_1 g k \quad (4.7)$$

Таким образом, силы Y_i однозначно определены соотношениями (4.5), а силы X_i удовлетворяют одному равенству (4.6). Кроме того, все эти силы должны удовлетворять неравенствам (4.7).

Так как для обеспечения равновесия достаточно указать хотя бы один набор сил X_i , Y_i , удовлетворяющих условиям (4.5)–(4.7), положим

$$X_i = -\Phi_{ix} \quad (4.8)$$

Уравнение (4.6) при этом удовлетворяется. Имея в виду получение простых достаточных условий равновесия, заменим неравенства (4.7) более жесткими условиями

$$|X_i| + |Y_i| \leq F_1 \quad (4.9)$$

гарантирующими выполнение неравенств (4.7). Подставляя равенства (4.5) и (4.8) в левую часть неравенства (4.9), получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |X_i| + |Y_i| &\leq |\Phi_{ix}| + |\Phi_{iy}| + |Q| \leq \sqrt{2}(\Phi_{ix}^2 + \Phi_{iy}^2)^{1/2} + |Q| = \\ &= \sqrt{2}|\Phi_i| + |Q| = \sqrt{2}(N_i^2 + R_i^2)^{1/2} + |Q| = \\ &= \sqrt{2}m_0l(\dot{\alpha}_i^4 + \ddot{\alpha}_i^2)^{1/2} + |Q| \leq \sqrt{2}m_0l(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2)^{1/2} + |Q| \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь использован тот факт, что сила Φ_i , с которой концевое звено O_iC_i действует на корпус, разлагается, с одной стороны, на компоненты Φ_{ix} , Φ_{iy} , а с другой стороны, — на компоненты N_i , R_i , определяемые равенствами (4.1). Кроме того, использованы оценки величин угловых скоростей и ускорений, вытекающие из (3.2).

Обратимся к оценке величин управляющих моментов M_i . Уравнение вращения концевой звена O_iC_i запишем в виде

$$m_0 l^2 \ddot{\alpha}_i = M_i - m_0 g k l \operatorname{sign} \dot{\alpha}_i \quad (4.11)$$

Из (4.11) и (3.2) следует оценка

$$|M_i(t)| \leq M_0, \quad M_0 = m_0 l (\varepsilon_0 l + g k) \quad (4.12)$$

Оценим величину Q из (4.5). Если в медленном движении оба концевых звена вращаются в одном и том же направлении, то $M_1 = M_2$ и из (4.5), (4.12) получим

$$|Q| \leq M_0 a^{-1} \quad (4.13)$$

Оценка (4.13) заведомо справедлива и в случаях, когда вращается лишь одно звено

(момент M_1 или M_2 равен нулю) и когда звенья вращаются в противоположных направлениях ($M_1 + M_2 = 0$). Подставляя оценки (4.10), (4.12) и (4.13) в условия (4.9), получим неравенство

$$m_0 l [\sqrt{2}(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2)^{1/2} + (\varepsilon_0 l + gk)a^{-1}] \leq m_1 gk \quad (4.14)$$

которое является достаточным условием неподвижности корпуса для всех медленных движений.

Существенно лучшее условие можно получить для медленного движения, при котором концевые звенья вращаются в противоположные стороны. В этом случае имеем $M_1 + M_2 = 0$, $Q = 0$. Подставляя равенства (4.5) и (4.8) в левую часть исходного неравенства (4.7), имеем вместо (4.10)

$$(X_i^2 + Y_i^2)^{1/2} = (\Phi_{ix}^2 + \Phi_{iy}^2)^{1/2} = |\Phi_i| \leq m_0 l (\omega_0^4 + \varepsilon_0^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

Подставляя неравенство (4.15) в условие (4.7), получим достаточное условие неподвижности корпуса при вращении концевых звеньев в противоположные стороны

$$m_0 l (\omega_0^4 + \varepsilon_0^2)^{1/2} \leq m_1 gk \quad (4.16)$$

Условие (4.16) всегда выполнено для достаточно медленных вращений, когда ω_0 и ε_0 достаточно малы. Условие (4.14) заведомо выполнено для достаточно медленных вращений, если $m_0 l < m_1 a$.

5. Анализ быстрых движений. Как отмечено выше, быстрые движения осуществляются при помощи больших управляющих моментов, по сравнению с которыми моменты сил трения пренебрежимо малы. Поэтому для быстрых движений влияние сил трения можно не учитывать. Так как эти движения начинаются из состояния покоя, то в процессе быстрых движений сохраняется положение центра масс многозвенника, а его кинетический момент остается равным нулю. Имеем

$$\dot{x}_C = 0, \quad \dot{y}_C = 0, \quad K = 0 \quad (5.1)$$

Подставляя соотношения (2.3) в первые два равенства (5.1), найдем

$$\dot{x} = -m_0 m^{-1} l (\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = m_0 m^{-1} l (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)$$

Преобразуем выражение (2.6), подставляя в него соотношения (5.2) и равенства

$$\dot{\theta}_i = \dot{\theta} + \dot{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \quad \dot{\alpha}_2 = \pm \dot{\alpha}_1 \quad (5.3)$$

вытекающие из (2.1) и условий (3.3).

Для случая вращений концевых звеньев в противоположных направлениях, выбирая знак минус в (5.3), получим

$$K = 2\{(m_0 l^2 + m_0 a^2 + m_1 a^2) - m_0^2 m^{-1} l^2 [1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]\} + \\ + m_0 a l (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \dot{\theta} + m_0 a l (\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2) \quad (5.4)$$

Рассмотрим движения корпуса отдельно для быстрых движений 1° и 2° из разд. 3.

Для движения 1°, в соответствии с условием (3.3), сделаем замену переменных

$$\alpha_1 = \beta/2 + \eta, \quad \alpha_2 = \beta/2 - \eta \quad (5.5)$$

Новая переменная η , согласно условиям (3.3) и (3.4), изменяется в процессе движения либо от $-\beta/2$ до $\beta/2$, либо от $\beta/2$ до $-\beta/2$, т.е. всегда в пределах $|\eta| \leq |\beta|/2$. После

подстановки (5.5) соотношение (5.4) примет вид

$$K = 2f(\eta)\dot{\theta} - 2h(\eta)\dot{\eta} \quad (5.6)$$

$$f(\eta) = m_0 l^2 + m_0 a^2 + m_1 a^2 - 2m_0^2 m^{-1} l^2 \sin^2 \eta + 2m_0 a l \cos(\beta/2) \cos \eta$$

$$h(\eta) = m_0 a l \sin(\beta/2) \sin \eta$$

Так как $K = 0$ согласно (5.1), имеем из (5.6) квадратуру для приращения угла θ за время движения

$$\Delta\theta = \pm \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{h(\eta)}{f(\eta)} d\eta \quad (5.7)$$

Знаки \pm в (5.7) отвечают двум возможным случаям (3.4). Так как $f(\eta)$ – четная, а $h(\eta)$ – нечетная функция η , см. (5.6), то в обоих случаях имеем $\Delta\theta = 0$.

Для движения 2° в соотношениях (5.5) и (5.6) нужно положить $\beta = 0$. В этом случае имеем $h(\eta) \equiv 0$, и условие $K = 0$ приводит к соотношению $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \text{const}$.

Таким образом, в движении 2° угол θ наклона корпуса к оси x остается неизменным, а в движении 1° этот угол испытывает колебания, но его конечное значение совпадает с начальным. Выберем ориентацию осей так, чтобы ось x была параллельна корпусу в начале движений 1° и 2°. Тогда для обоих этих движений имеем $\theta = 0$ в начале и в конце движений.

Определим приращения Δx и Δy координат середины корпуса за время движений 1° и 2°. Так как в силу (5.1) смещение центра масс для этих движений равно нулю ($\Delta x_C = \Delta y_C = 0$), то из (2.3) найдем

$$\Delta x = m_0 m^{-1} l \Delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (5.8)$$

$$\Delta y = m_0 m^{-1} l \Delta(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

Символ Δ всюду обозначает полное приращение соответствующей величины за время движения.

Подставим в (5.8) соотношения (2.1) и (5.5) и примем во внимание, что $\theta = 0$ в начале и в конце движения. Получим

$$\Delta x = -2m_0 m^{-1} l \sin(\beta/2) \Delta \sin \eta \quad (5.9)$$

$$\Delta y = 2m_0 m^{-1} l \cos(\beta/2) \Delta \sin \eta$$

В движении 1° величина η изменяется либо от $-\beta/2$ до $\beta/2$, либо от $\beta/2$ до $-\beta/2$. Поэтому для движения 1° получим из (5.9)

$$\Delta x = \mp 4m_0 m^{-1} l \sin^2(\beta/2), \quad \Delta y = \pm 2m_0 m^{-1} l \sin \beta \quad (5.10)$$

где выбор верхних и нижних знаков минус и плюс отвечает двум случаям (3.4).

В движении 2° имеем $\beta = 0$, $\eta = \alpha_1 = -\alpha_2$. Получим из (5.9)

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 2m_0 m^{-1} l (\sin \alpha_1^1 - \sin \alpha_1^0) \quad (5.11)$$

Осталось рассмотреть быстрое движение 3°, в котором $\alpha_2 = \alpha_1$ и, в силу (2.1), $\theta_2 = \theta_1$. Из равенств (5.2) получим $\dot{x} = \dot{y} = 0$, т.е. середина корпуса остается неподвижной. Поместив начало координат системы Oxy в середине корпуса, будем иметь $x = y = 0$. Выражение (2.6) для кинетического момента в случае движения 3° примет вид

$$K = 2(m_0 l^2 + m_0 a^2 + m_1 a^2 + 2m_0 a l \cos \alpha_1) \dot{\theta} + 2m_0 l (l + a \cos \alpha_1) \dot{\alpha}_1 \quad (5.12)$$

Так как $K = 0$, то из (5.12) определим приращение $\Delta\theta$ в виде квадратуры

$$\Delta\theta = - \int_{\alpha^0}^{\alpha^1} \varphi(\alpha_1) d\alpha_1 \quad (5.13)$$

Функция $\varphi(\alpha_1)$ равна отношению коэффициентов при $\dot{\alpha}_1$ и $\dot{\theta}$ в (5.12), а α^0 и α^1 — начальное и конечное значения углов $\alpha_1 = \alpha_2$.

Перейдем к формированию продольного, бокового и вращательного движений многозвенника из элементарных движений, описанных в разд. 3.

6. Продольное движение. Пусть в начальный момент времени многозвенник покоится, и все его звенья параллельны оси x . В этом состоянии имеем $\theta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, см. состояние 0 на фиг. 4.

1. Осуществляем медленное движение, при котором звено O_1C_1 поворачивается вокруг шарнира C_1 на угол γ . Остальные звенья остаются неподвижными, и многозвенник переходит в состояние 1 на фиг. 4, в котором $\alpha_1 = \gamma$, $\alpha_2 = 0$.

2. Осуществляем быстрое движение типа 1° из разд. 3, в результате которого угол α_1 изменяется от γ до 0, а угол α_2 — от 0 до γ . Многозвенник переходит в состояние 2 на фиг. 4.

3. Осуществляем медленное движение, при котором угол α_1 изменяется от 0 до $-\gamma$, а угол α_2 — от γ до 0. Многозвенник переходит в состояние 3 на фиг. 4.

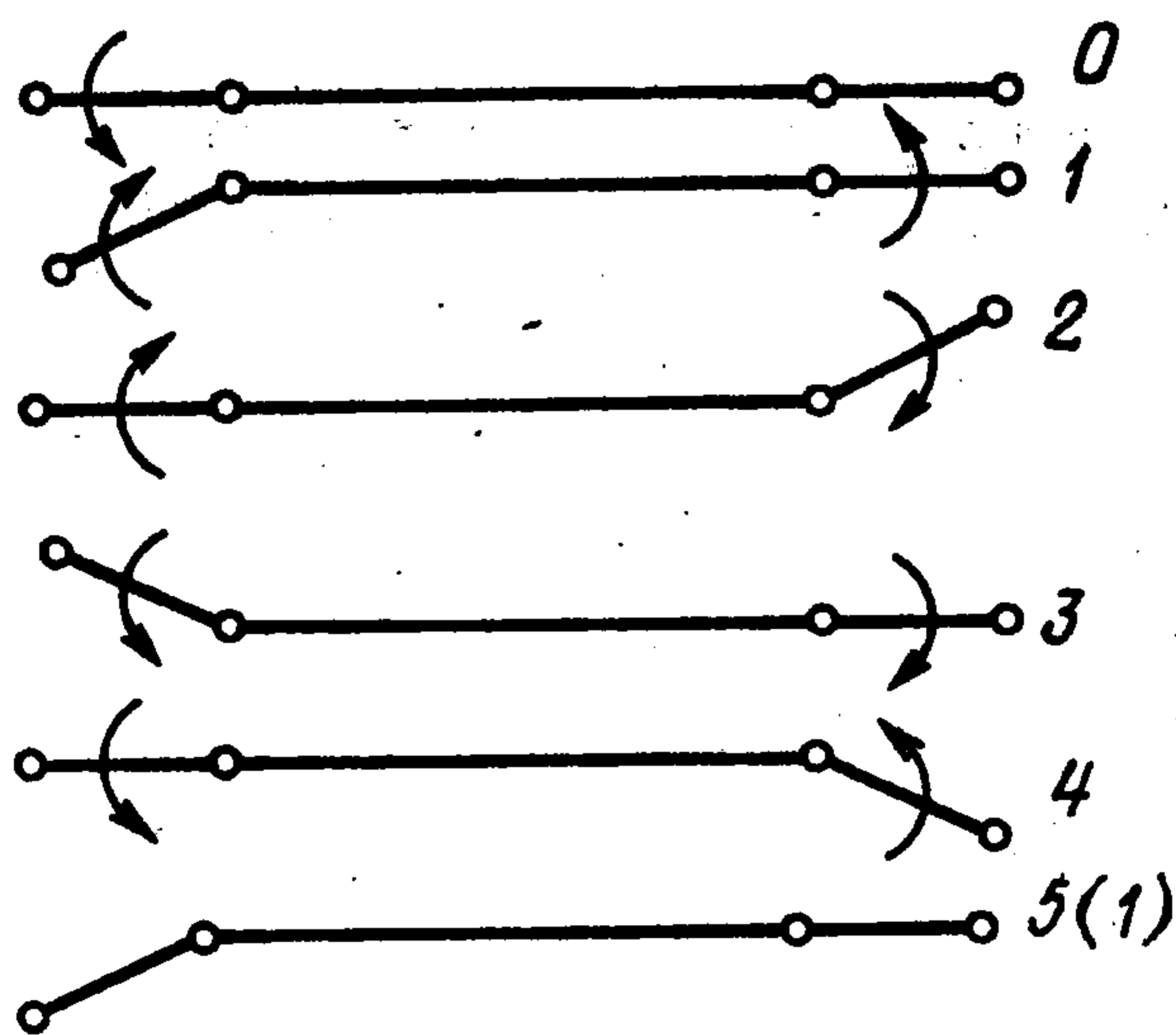
4. Осуществляем быстрое движение типа 1° , в результате которого угол α_1 изменяется от $-\gamma$ до 0, а угол α_2 от 0 до $-\gamma$. Многозвенник переходит в состояние 4 на фиг. 4.

5. Осуществляем медленное движение, в результате которого угол α_1 изменяется от 0 до γ , а угол α_2 — от $-\gamma$ до 0. Многозвенник переходит в состояние 5 на фиг. 4.

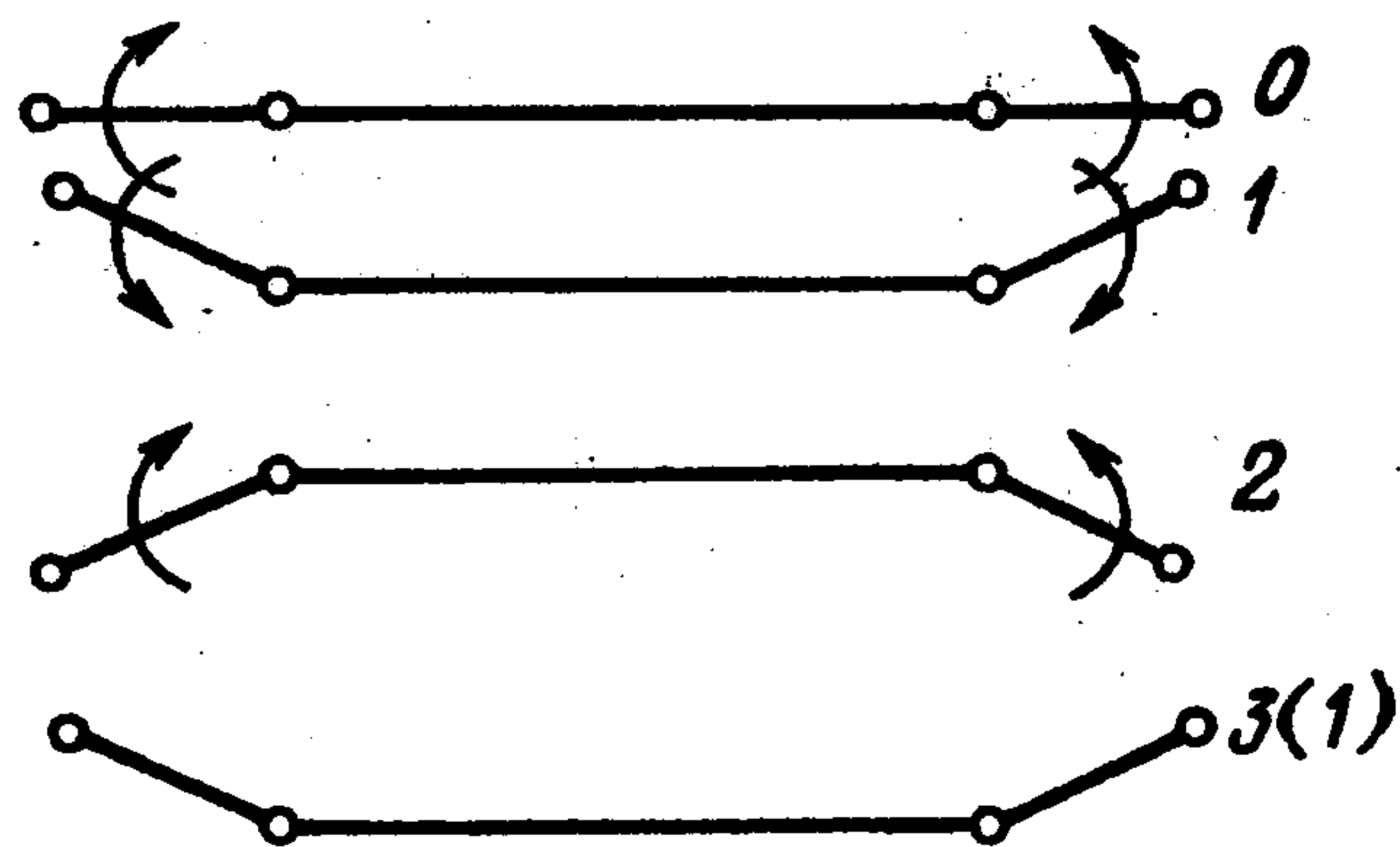
Нетрудно видеть, что состояние 5, в котором $\alpha_1 = \gamma$, $\alpha_2 = 0$, в точности совпадает с состоянием 1, см. фиг. 4. Далее цикл из двух быстрых и двух медленных движений, переводящий многозвенник из состояния 1 в состояние 5, может повторяться любое число раз. Для того чтобы в конце движения перевести многозвенник из состояния 5 в исходное прямолинейное состояние 0, нужно выполнить медленное движение, в результате которого угол α_1 изменится от γ до 0.

Напомним, что каждое элементарное движение начинается и заканчивается в состоянии покоя. Определим изменение положения и ориентации корпуса в результате одного цикла движения, переводящего многозвенник из состояния 1 в состояние 5. Отметим, что в ходе медленных движений корпус остается неподвижным, а центр масс многозвенника перемещается вдоль оси x . Это наглядно видно из сравнения пар состояний 2, 3 и 4, 5 на фиг. 4: концы многозвенника каждый раз смещаются вправо вдоль оси x . В ходе быстрых движений, наоборот, центр масс многозвенника остается неподвижным, а его корпус перемещается. Как показано в разд. 5, ориентация корпуса не изменяется при быстрых движениях типа 1° ($\Delta\theta = 0$), а центр корпуса испытывает смещения, определяемые формулами (5.10). Для обоих быстрых движений типа 1° , осуществляемых в процессе цикла, имеет место второй случай (3.4), так что в формулах для смещения (5.10) нужно выбирать нижние знаки. При этом угол β из (5.10) равен $\pm\gamma$ для этих двух движений. Поэтому полное изменение y за весь цикл равно нулю, а полное изменение Δ_0x координаты x равно

$$\Delta_0x = 8m_0m^{-1}l \sin^2(\gamma/2), \quad m = 2(m_0 + m_1) \quad (6.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Формула (6.1) определяет смещение многозвенника за цикл продольного движения. Так как длительность быстрых фаз движения много короче длительности медленных фаз, то полное время цикла приближенно равно $2T$, где T — длительность медленного движения. В обозначениях (3.1), (3.2) имеем

$$|\Delta\alpha| = \gamma, \quad \omega_0 = 2\gamma T^{-1}, \quad \varepsilon_0 = 4\gamma T^{-2} \quad (6.2)$$

Подставим равенства (6.2) в условие (4.14)

$$m_0 l [4\sqrt{2}\gamma(\gamma^2 + 1)^{1/2} T^{-2} + (4\gamma l T^{-2} + gk) a^{-1}] \leq m_1 gk \quad (6.3)$$

Для сохранения неподвижности корпуса в медленных фазах продольного движения достаточно, чтобы его параметры удовлетворяли условию (6.3). Средняя скорость продольного движения равна

$$v_1 = \Delta_0 x (2T)^{-1} \quad (6.4)$$

Величина $\Delta_0 x$ дана формулой (6.1).

7. Боковое движение. Боковое движение многозвенника осуществляется проще продольного. Снова предполагаем, что в начальный момент времени многозвенник покоится и представляет собой отрезок, параллельный оси x , см. состояние 0 на фиг. 5. Имеем $\theta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

1. Осуществляем медленное движение, при котором оба концевых звена $O_1 C_1$ и $O_2 C_2$ поворачиваются вокруг соответствующих шарниров C_1 и C_2 на углы $-\gamma$ и γ , соответственно. В результате многозвенник переходит в состояние 1 на фиг. 5, в котором $\alpha_1 = -\gamma$, $\alpha_2 = \gamma$.

2. Осуществляем быстрое движение типа 2°, в результате которого угол α_1 изменяется от $-\gamma$ до γ , а угол α_2 — от γ до $-\gamma$. Многозвенник переходит в состояние 2 на фиг. 5.

3. Осуществляем медленное движение, в ходе которого угол α_1 изменяется от γ до $-\gamma$, а угол α_2 — от $-\gamma$ до γ . Многозвенник переходит в состояние 3 на фиг. 5.

Состояние 3 идентично состоянию 1. Далее цикл из одного быстрого движения типа 2° и одного медленного движения можно повторять любое число раз. Чтобы в конце движения вернуть многозвенник в исходное состояние, достаточно выполнить медленное движение, изменив в его ходе угол α_1 от $-\gamma$ до 0, а угол α_2 — от γ до 0.

В ходе бокового движения, как следует из разд. 5, ориентация корпуса остается неизменной ($\theta \equiv 0$), продольное смещение равно нулю ($\Delta x = 0$). Полное боковое смещение корпуса за один цикл, согласно формуле (5.11), равно

$$\Delta_0 y = 4m_0 m^{-1} l \sin \gamma, \quad m = 2(m_0 + m_1) \quad (7.1)$$

Длительность цикла бокового движения приближенно равна времени T медленной фазы. В обозначениях (3.1) имеем

$$|\Delta\alpha| = 2\gamma, \quad \omega_0 = 4\gamma T^{-1}, \quad \varepsilon_0 = 8\gamma T^{-2} \quad (7.2)$$

Подставляя равенства (7.2) в условие (4.16), получим

$$8m_0 \gamma (4\gamma^2 + 1)^{1/2} T^{-2} \leq m_1 gk \quad (7.3)$$

Условие (7.3) является достаточным условием неподвижности корпуса в медленной

фазе бокового движения. Средняя скорость бокового движения равна

$$v_2 = \Delta_0 \gamma T^{-1} \quad (7.4)$$

Величина $\Delta_0 \gamma$ дается формулой (7.1).

8. Поворот многозвенника. Чтобы повернуть многозвенник, имеющий первоначально прямолинейную форму ($\theta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$), воспользуемся следующими движениями (здесь всегда $\alpha_1 = \alpha_2$).

1. При помощи медленного движения изменим углы $\alpha_1 = \alpha_2$ от 0 до α^0 . Многозвенник перейдет из состояния 0 в состояние 1 на фиг. 6.

2. Осуществим быстрое движение типа 3°, при котором углы $\alpha_1 = \alpha_2$ изменяются от α^0 до α^1 . При этом корпус повернется на угол $\Delta\theta$, многозвенник придет в состояние 2 на фиг. 6.

Данные движения можно повторять. Чтобы из состояния 2 привести многозвенник в прямолинейное состояние, нужно осуществить медленное движение, изменив углы $\alpha_1 = \alpha_2$ от α^1 до 0. Угол поворота многозвенника определяется формулой (5.13). Достаточные условия неподвижности корпуса в медленной фазе поворота имеют вид (6.3), где $\gamma = |\alpha^1 - \alpha^0|$.

9. Примеры. Зададимся следующими значениями параметров

$$\gamma = \pi/4, \quad k = 0,3, \quad g = 9,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \quad (9.1)$$

и рассмотрим два варианта многозвенника: "большой" и "малый". Для большого многозвенника примем

$$m_0 = 1 \text{ кг}, \quad m_1 = 1,6 \text{ кг}, \quad a = l = 0,2 \text{ м}, \quad T = 1 \text{ с} \quad (9.2)$$

а для малого многозвенника возьмем

$$m_0 = 0,1 \text{ кг}, \quad m_1 = 0,16 \text{ кг}, \quad a = l = 0,02 \text{ м}, \quad T = 0,5 \text{ с} \quad (9.3)$$

Подставляя значения (9.1)–(9.3) в условия (6.3) и (7.3), убеждаемся, что оба этих условия для обоих многозвенников выполняются. Средние скорости продольного (6.4) и бокового (7.4) движений для большого многозвенника (9.2) равны

$$v_1 = 0,02 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad v_2 = 0,1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

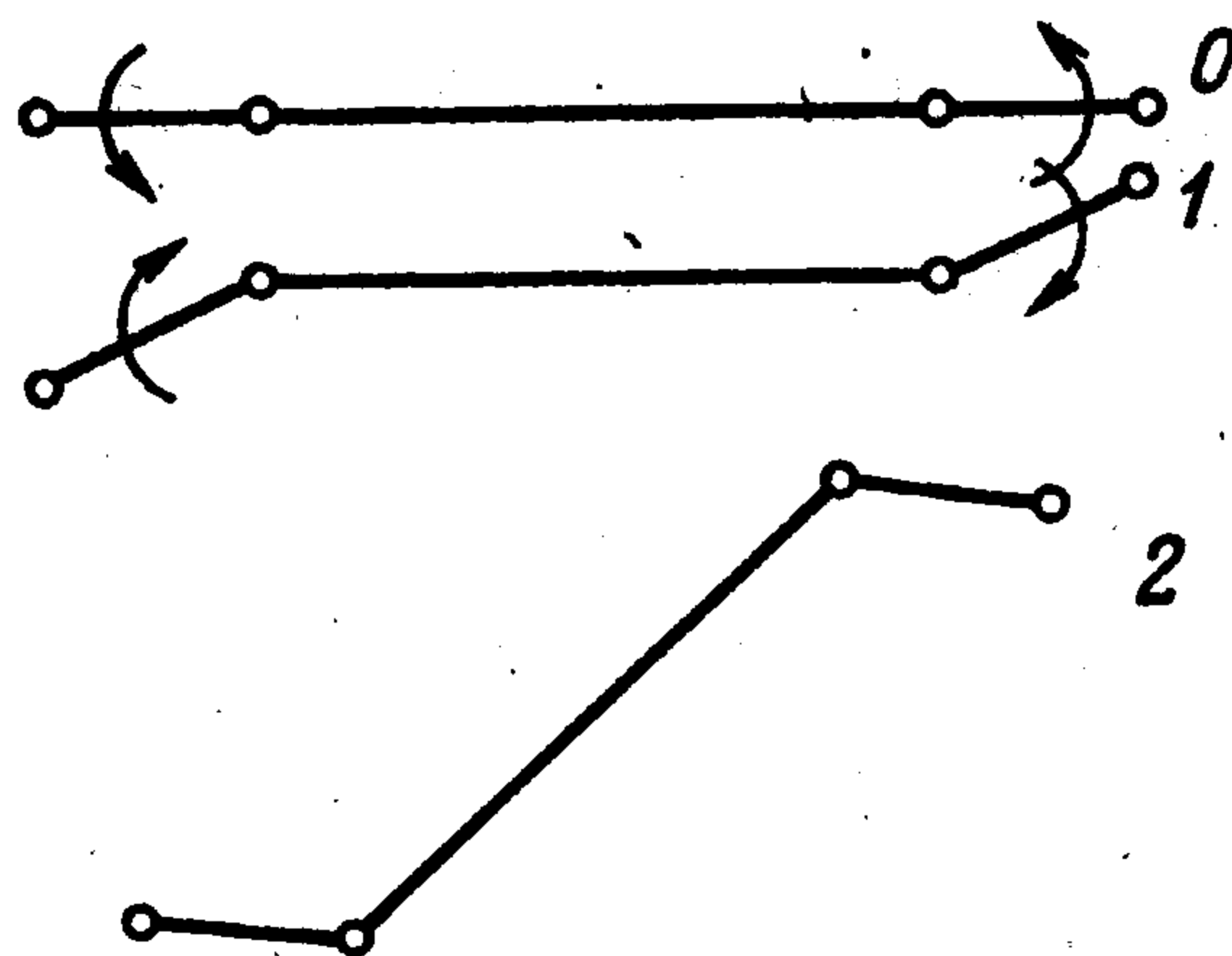
а для малого многозвенника (9.3) составляют

$$v_1 = 0,01 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad v_2 = 0,05 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

Для поддержания движений моменты M_i , развиваемые двигателями, должны быть существенно (на порядок) больше, чем моменты сил трения $m_0 g k l$. Для большого многозвенника (9.1) эти моменты должны быть порядка 4–8 Н·м, а для малого многозвенника (9.2) – порядка 0,1–0,2 Н·м.

10. Заключение. Показано, что плоский многозвенник может перемещаться по шероховатой плоскости в различных направлениях и поворачиваться под действием внутренних управляющих моментов, перпендикулярных плоскости движения. Предложены конструктивные способы продольного, бокового движения, поворота, найдены достаточные условия их осуществимости. Оценены смещения и средние скорости движений. Приведенные достаточные условия даны с большим запасом, эти движения реализуемы и при менее жестких требованиях к параметрам многозвенника и характеристикам движений.

Предложенные формы движения состоят из медленных фаз, при которых корпус (центральное звено) многозвенника остается неподвижным, и быстрых фаз, в которых



Фиг. 6

за счет интенсивных "гребков" концевых звеньев корпус перемещается в нужном направлении. Компьютерное моделирование подтвердило осуществимость продольных и боковых движений многозвенника при более точном и детальном учете всех факторов.

Рассматриваемый способ движения отличается тем, что движущееся тело осуществляет плоское движение и контактирует с плоскостью все время одними и теми же своими точками. Именно таким свойством обладает движение змей и некоторых других животных, не имеющих конечностей и перемещающихся только за счет изгиба тела, которое все время лежит на земле.

Отметим некоторые важные особенности рассмотренного способа движения.

1°. Так как движение системы – плоское, то аппарат может иметь небольшие вертикальные размеры. Для сравнения отметим, что высота колесных и шагающих аппаратов лимитируется снизу размерами колес или ног.

2°. Аппарат может быть снабжен всего двумя двигателями, в то время как для шагающего аппарата требуется не менее двух двигателей для каждой ноги.

3°. Как конструкция аппарата, так и способ управления весьма просты.

В силу сказанного, рассмотренный способ движения может быть полезен как возможный вариант перемещения малых мобильных роботов (мини- и микророботов).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258).

ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника. 1987. 144 с.
2. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators. New York; Oxford: Oxford Univ. Press, 1993. 220 p.
3. Ostrowski J., Burdick J. Gait kinematics for a serpentine robot // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Minneapolis, 1996. N.Y.: IEEE, 1996. P. 1294–1299.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1999