ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 64. Вып. 1, 2000

УДК 531.38

© 2000 г. Л.И. Конкина

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ – УГОЛ

Исследуется движение механической системы, представляющей собой вращающееся вокруг неподвижной точки твердое тело, несущее упругие стержни, испытывающие деформации изгиба. Применяется асимптотический метод построения приближенных уравнений, описывающих эволюцию движения системы в канонических переменных действие – угол. Метод разделения движений и применение оператора усреднения позволяют выявить качественные особенности поведения системы, поскольку, как правило, уравнения движения таких систем не интегрируются в явном виде.

1. Рассмотрим несимметричное тело с упругими элементами в виде двух пар стержней, расположенных в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, вращающееся вокруг неподвижной точки O. Стержни гибкие и деформации изгиба сопровождаются рассеянием энергии.

Введем две декартовы системы координат: оси OX_k ($k = 1, 2, 3$) неподвижны, ось OX_3 направлена вертикально вверх; оси OZ_k связаны с главными осями инерции тела, причем OZ_3 – ось собственного вращения тела. В плоскости OZ_1Z_2 по главным осям эллипсоида инерции OZ_1 и OZ_2 расположены две пары гибких стержней. При движении стержни деформируются. Функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил определяются по формулам

$$E[\mathbf{u}] = \frac{N}{2}\int\limits_V \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial s^2}\right)^2 ds, \quad D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E[\dot{\mathbf{u}}] \tag{1.1}$$

где N – изгибная жесткость стержня, χ – постоянная, характеризующая рассеяние энергии в стержне при изгибах, b – размерная постоянная, $u_{ij}(s, t)$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) – отклонение сечения одного из стержней с координатой s при изгибе по соответствующей оси. Вектор $\mathbf{u}(s, t)$ принимается равным $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

Запишем уравнения движения системы в виде

$$\dot{I} = -\nabla_w R(I, w, u, \dot{u}), \quad \dot{w} = \nabla_I R(I, w, u, \dot{u}) \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{u}} R - \nabla_u R = -Q_u, \quad Q_u = -\frac{\partial}{\partial \dot{u}} D[\dot{\mathbf{u}}]$$

где Q_u – диссипативные силы.

Функционал Рауса $R(I, w, u, \dot{u})$, описывающий движение системы, определяется формулой

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}[\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, \ J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)] - \frac{1}{2}\int\limits_V (\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2)\rho ds + E[\mathbf{u}] \tag{1.3}$$

$$\mathbf{G}_u = \int\limits_K \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\rho ds$$

где $\mathbf{G}$ – вектор момента количества движения.

Используя линейную теорию изгиба тонких прямолинейных стержней, радиус-вектор точки стержня в системе OZ_k представим в виде [2, 3]

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 = s\mathbf{e}_1 + u_{12}(s,t)\mathbf{e}_2 + u_{13}(s,t)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_1 = s\mathbf{e}_1 \\ &\mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 = u_{12}(s,t)\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2 + u_{23}(s,t)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_2 = s\mathbf{e}_2 \\ &s \in V = [-l,-a]\cup[a,l] \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{e}_k$ (k = 1, 2, 3) – орт оси OZ_k, l – постоянные, ρ – плотность материала стержней, которые предполагаются однородными.

Тензор инерции $J[\mathbf{u}]$ системы, состоящей из твердого тела и деформированных стержней, рассматривается в подвижной системе координат. Запишем тензор инерции в предложении, что u_{ij} – малые величины, поэтому ограничимся членами, линейными относительно u_{ij}. Получим

$$J^{-1}[\mathbf{u}] \approx J_0^{-1} - J_0^{-1}J_1J_0^{-1}$$

$$J_0 = \mathrm{diag}\{A,B,C\}, \quad A = A_1 + f[\mathbf{u}_2], \quad B = B_1 + f[\mathbf{u}_1], \quad C = C_1 + f[\mathbf{u}_1] + f[\mathbf{u}_2]$$

$$f[\mathbf{u}_i] = \int\limits_{-l}^{l} (2su_i + u_i^2)\rho ds, \quad (i = 1,2)$$

(J_1 – линейная по u компонента тензора инерции).

Представим функцию Рауса следующим образом:

$$R = R_0 + \varepsilon R_1 + \ldots, \quad \varepsilon = bN^{-1}$$

где R_0 – функция, описывающая невозмущенное движение тела, в предположении, что стержни не деформируются (u = 0), ε – безразмерный малый параметр.

2. Невозмущенное движение (ε = 0) несимметричного тела ($A \neq B \neq C$) описывается уравнениями вращения твердого тела в случае Эйлера. В качестве переменных используются канонические переменные действие–угол $I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3$ [1]. Исходными переменными при введении переменных действие–угол являются переменные Андуайе L, I_2, I_3, 1, φ_2, φ_3. При ε = 0 модуль кинетического момента I_2, а также канонически сопряженные переменные I_3, φ_3, задающие положение этого вектора в осях OX_k, – постоянные величины. Введем в невозмущенной задаче параметры

$$\chi^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \lambda^2 = \chi^2 \frac{A}{C}\frac{2Ch - I_2^2}{I_2^2 - 2Ah} \tag{2.1}$$

где h – постоянная энергии. Вращениям тела вокруг большей (OX_3), меньшей (OX_1), средней (OX_2) осей эллипсоида инерции соответствуют значения $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$.

Исследование будем проводить в областях ротационных движений ($\lambda \leqslant 1$) при условии, что частоты движения тела несоизмеримы, т.е. равенство $\mathbf{k}\omega_k = 0$ (k = 1, 2), где $\mathbf{k}$ – целочисленный вектор, выполняется только при $\mathbf{k} = 0$. В этих областях движения переменные действие – угол даются формулами

$$\begin{aligned} &I_1 = \frac{2I_2}{\pi\chi}\sqrt{\frac{1+\chi^2}{\chi^2+\lambda^2}}[(\chi^2+\lambda^2)\Pi(\chi^2,\lambda) - \lambda^2 K(\lambda)] \\ &I_2 = \pm\frac{\sqrt{\chi^2+\lambda^2}}{\chi}\left[\mathrm{dn}\left(\frac{2K(\lambda)}{\pi}w_1,\lambda\right)\right]^{-1}, \quad I_3 = I_3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$w_1 = \frac{\pi}{2K(\lambda)} F(\xi,\lambda), \quad w_2 = \varphi_2 + \frac{i}{2}\ln\frac{\theta_4(w_1 - i\sigma)}{\theta_4(w_1 + i\sigma)}$$

$$\xi = \pm\,\mathrm{am}(\tau_1,\lambda), \quad \sigma = \frac{\pi}{2K(\lambda)} F\left(\mathrm{arctg}\frac{\chi}{\lambda},\ \lambda'\right)$$

$$\tau_1 = \frac{2K(\lambda)}{\pi} w_1, \quad \chi^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \lambda^2 = 2\chi^2 \frac{I_2 - I_1}{I_2\sqrt{1+\chi^2}}$$

где $K(\lambda)$, $\Pi(\varkappa, \lambda)$ – полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно, $F(\xi, \lambda)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода, θ_4 – тета-функция Якоби, $\lambda(I_1, I_2)$ – однозначное решение относительно λ уравнения для I_1 из формулы (2.2).

Функцию Рауса для невозмущенного движения при произвольных A, B, C в переменных действие–угол запишем и в виде

$$R_0 = \frac{I_2^2}{2A}\left[1 - \frac{C-A}{A}\frac{\chi^2}{\chi^2+\lambda^2}\right]$$

Канонические уравнения невозмущенного движения с функцией R_0 интегрируются и общее решение имеет вид

$$I_i = I_{i_0}; \quad w_1 = \omega_1 t + w_1^0, \quad w_2 = \omega_2 t + w_2^0, \quad w_3 = w_3^0 \tag{2.3}$$

Частоты невозмущенного движения определяются следующими выражениями [4]:

$$\omega_1 = -\frac{C-A}{AC}\frac{\sqrt{1+\chi^2}\,I_2^3}{\varkappa^2}, \quad \omega_2 = \frac{I_2^2}{A} - \frac{C-A}{2AC}\frac{I_1 I_2^2}{\varkappa}; \quad \varkappa = \sqrt{1+\chi^2}\,I_2^2 + 2I_1 \tag{2.4}$$

Изгибные колебания стержней в возмущенном движении описываются вторым из уравнений системы (1.1)

$$\rho\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} + N\frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial s^4} + \chi N\frac{\partial^5 u_{ij}}{\partial t\partial s^4} + \frac{d}{dt}[J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)(\mathbf{r}_i+\mathbf{u}_i)]\rho\mathbf{e}_j +$$
$$+\frac{1}{2}((\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)\nabla_{u_{ij}}J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)) + [J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)\dot{\mathbf{u}}\rho]\mathbf{e}_j = 0, \quad i = 1,2;$$
$$j = 1,2,3; \quad i \neq j \tag{2.5}$$

Граничные условия для функции $u_{ij}(s, t)$ зададим в виде

$$u_{ij}(\pm a,t) = \frac{\partial u_{ij}(\pm a,t)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{ij}(\pm l,t)}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 u_{ij}(\pm l,\ t)}{\partial s^3} = 0$$

Решение, описывающее вынужденные колебания стержней, будем искать в виде ряда по малому параметру $\varepsilon = N^{-1}$

$$u_{ij} = \varepsilon u_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 u_{ij}^{(2)} + \ldots, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3; \quad i \neq j$$

Функции u_{ij} удовлетворяют уравнению

$$\left(1 + \chi b\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 u_{ij}^{(1)}}{\partial s^4} + \frac{1}{2}(\mathbf{G}, \nabla_{\mathbf{u}_{ij}} J^{-1}[\mathbf{u}]\mathbf{G}) + \frac{d}{dt}[J^{-1}[\mathbf{u}]\mathbf{G}\times(\mathbf{r}_i+\mathbf{u}_i)]\rho\mathbf{e}_j = 0 \tag{2.6}$$

В канонических переменных действие I – угол w уравнения (2.6) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial^4 u_{ij}^{(1)}}{\partial s^4} + \chi b \frac{\partial^5 u_{ij}^{(1)}}{\partial t\, \partial s^4} = f_{ij} s, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3; \quad i \neq j \tag{2.7}$$

Функции f_{ij} определяются соотношениями

$$f_{12} = -\Sigma b_{n,0} b'_{n,0} \sin 2nw_1, \quad f_{13} = \Sigma b_{n,0} F \cos nw_1, \quad f_{23} = \Sigma b'_{n,0} F \sin nw_1$$

$$F = \left[\frac{\pi l_2}{2K(\lambda)} \frac{A-C}{AC} \frac{\chi}{\sqrt{(1+\chi^2)(\lambda^2+\chi^2)}} \right]$$

$$b_{n,0} = \frac{l_2}{A} \frac{\pi}{K(\lambda)\sqrt{\lambda^2+\chi^2}} \frac{q^{m+1/2}}{1+q^{2m+1}}, \quad b'_{n,0} = \frac{l_2}{B} \frac{i\pi}{K(\lambda)} \sqrt{\frac{\chi^2+1}{\lambda^2+\chi^2}} \frac{q^{m+1/2}}{1-q^{2m+1}}$$

$$q = \exp[-\pi K'(\lambda)/K(\lambda)]$$

где $n = 2m + 1$, а суммирование ведется по всем целым m от $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть u_{ij0} – решение уравнения (2.7) при $\chi = 0$. Тогда частное решение, описывающее вынужденные изгибные колебания стержней, имеет вид

$$u_{ij}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\chi)^k \frac{\partial^k u_{ij}^{(1)}}{\partial t^k} \tag{2.8}$$

$$u_{ij}^{(1)} = f_{ij} \psi(s), \quad \psi(s) = \frac{s^5}{120} - \frac{l^2 s^3}{12} + \frac{l^3 s^2}{6} \operatorname{sign} s$$

Функция $\psi(s)$ определяется при граничных условиях

$$u_{ij0}^{(1)}(0,t) = \frac{\partial}{\partial s} u_{ij0}^{(1)}(0,t) = 0$$

(условия закрепления в начале координат, причем для простоты $a = 0$) и динамических граничных условиях

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} u_{ij0}^{(1)}(\pm l, t) = \frac{\partial^3}{\partial s^3} u_{ij0}^{(1)}(\pm l, t) = 0$$

Отметим, что решения уравнения (2.7) находятся согласно методу разделения движений при условии, что канонические переменные действие–угол соответствуют невозмущенной задаче.

Ограничиваясь в ряде (2.8) двумя первыми членами, имеем

$$u_{ij}^{(1)} = u_{ij0}^{(1)} - \chi \dot{u}_{ij0}^{(1)} \tag{2.9}$$

Запишем уравнения возмущенного движения системы, подставив перемещения $u_{ij} = \varepsilon u_{ij}^{(1)}$ в уравнения (1.2)

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\nabla_{w_1} = -\Sigma b_{n,0} n \sin nw_1 \int s \dot{u}_{23} \rho ds - \Sigma b'_{n,0} n \cos w_1 \int s \dot{u}_{13} \rho ds - \\ &-\Sigma b_{n,0} b'_{n,0} \sin 2nw_1 \int s(u_{12} + u_{21}) \rho ds + \Sigma n b_{n,0} \dot{w}_1 \sin nw_1 \int s u_{13} \rho ds + \\ &+\Sigma n b'_{n,0} \dot{w}_1 \cos nw_1 \int s u_{23} \rho ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\dot{I}_i = -\nabla_{w_i} R = 0, \quad i = 2,3; \quad \dot{w}_j = \nabla_{I_j} R, \quad j = 1,2,3$$

Из полученных уравнений следует, что величина вектора кинетического момента I_2 и его проекция на ось OX_3 сохраняют свои значения, в то время как переменная действия I_1 зависит от упругих колебаний и диссипативных сил, приводящих к эволюции системы.

3. Применив к уравнениям (2.10) оператор усреднения по угловым переменным w_1 и α, после вычислений получим усредненную систему уравнений

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = \Phi(s)\left\{\chi\left[\left(\frac{A-C}{AC}\frac{\pi I_2 \chi n}{K(\lambda)\sqrt{(1+\lambda^2)(\lambda^2+\chi^2)}}\right)^2 \Sigma(b_{n,0}^2 - b_{n,0}'^2)\right] - \Sigma(b_{n,0}^2 - b_{n,0}'^2)\right\} \tag{3.1}$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = 0, \quad i = 2,3; \quad \Phi(s) = \int \psi(s)\rho ds$$

Стационарные решения уравнения (3.1) найдем, полагая, что $\langle \dot{I}_1 \rangle = 0$. С точностью до λ^2 получим

$$\Phi(s)\chi\left(\frac{A-C}{AC}\frac{\sqrt{1+\chi^2}I_2^3}{[\sqrt{1+\chi^2}I_2 + 2I_1]^2}\right)^2 \Sigma(b_{n,0}^2 - b_{n,0}'^2) - \sum b_{n,0}^2 b_{n,0}'^2 = 0 \tag{3.2}$$

Выпишем коэффициенты первых членов разложения, входящих в выражение (3.2):

$$b_{00} = \frac{2}{4+\lambda^2}\left(\frac{2\chi^2+\lambda}{\chi^2}\right), \quad b_{1,0} = \frac{\lambda}{4+\chi\lambda^2}, \quad b_{2,0} = \frac{16(1-\lambda)}{\chi(\lambda-\chi^2)}$$

$$b_{0,0}' = \frac{(2\chi^2+\lambda^2)(2+\chi^2)}{\chi(4+\lambda^2)}, \quad b_{1,0}' = \frac{(2+\chi)\lambda}{2\chi^2(4+\lambda^2)}, \quad b_{2,0}' = \frac{8(2+\chi^2)(1-\lambda)}{\chi(\lambda-\chi^2)}$$

Подставляя в эти коэффициенты выражение

$$\lambda^2 = 2\chi^2 \frac{I_2 - I_1}{I_2\sqrt{1+\chi^2}}$$

которое является однозначным решением уравнения для I_1 (с точностью до λ_2^2), входящее в формулы (2.2), после вычислений получим для коэффициентов выражения, явно зависящие от переменных действия I_i.

Запишем соотношение (3.2) следующим образом:

$$\Phi(s)\{\chi\}\, \dot{w}_1^2 Q - Q_1 = 0$$

Отсюда можно получить значение угловой скорости вращения тела вокруг собственной оси вращения

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{\chi\Phi(s)Q}}; \quad Q = \Sigma(b_{n,0}^2 - b_{n,0}'^2), \quad Q_1 = \Sigma b_{n,0}^2 b_{n,0}'^2$$

Видно, что предельные значения для переменных действия и угловой скорости вращения вокруг оси собственного вращения зависят от деформаций стержней и диссипативных сил.

Рассматривая случай динамически симметричного тела ($A = B$) в данной постановке задачи, получим, что на этапе первого приближения эволюция движения совпадает с результатами, полученными при аналогичных исследованиях в канонических переменных Андуайе [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садов Ю.А.* Переменные действие–угол в задаче Эйлера – Пуансо // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962–964.
2. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ. 1986. 215 с.
3. *Веретенников В.Г., Карпов И.И., Марков Ю.Г.* Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами. М.: МАИ, 1998. 144 с.
4. *Демин В.Г., Конкина Л.И.* Новые методы в динамике твердого тела // Фрунзе: Илим, 1989. 183 с.

Великие Луки
e-mail: vgsha@ mart.ru

Поступила в редакцию
8.VI.1999