УДК 531.38

© 2000 г. В.Ю. Ольшанский

# ЛИНЕЙНЫЙ И КВАДРАТИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получены необходимые и достаточные условия существования линейного инвариантного соотношения в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнета–Лондона. Найдены необходимые и достаточные условия существования дополнительного квадратичного интеграла редуцированной системы.

В решении Гесса [1] задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки положение центра масс удовлетворяет известному конфигурационному условию Гесса. В обобщении Л.Н. Сретенского [2] решения Гесса на случай движения тяжелого гиростата условие Гесса также является необходимым для существования линейного инвариантного соотношения (ЛИС). Это условие остается необходимым для существования ЛИС даже при движении в однородном поле силы тяжести сложной механической системы, конфигурация и состав которой изменяются со временем по заданному закону [3].

В задаче о движении твердого тела в магнитном поле получены [4, 5] некоторые новые алгебраические интегралы. Для движения гиростата в магнитном поле найдены [6] условия существования ЛИС частного вида (типа Гесса). Как показано в настоящей работе, при наличии магнитного момента существуют ЛИС не гессова типа, включающие в себя проекцию кинетического момента как на направление барицентрического вектора, так и на ортогональное ему направление в плоскости кругового сечения гирационного эллипсоида.

Система с ЛИС допускает понижение порядка. Для выделения интегрируемых случаев редуцированной системы важно решить вопрос о существовании дополнительного квадратичного интеграла (КИ). Известен [6] один пример существования такого КИ для системы с ЛИС частного вида. Ниже получены необходимые и достаточные условия существования КИ движения с ЛИС гиростата в магнитном поле и вид этого КИ.

**1. Условия существования интегралов.** Используем следующую форму записи [6] уравнений движения гиростата в магнитном поле:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times K\mathbf{x} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - F\mathbf{x} - \mathbf{s}), \quad \boldsymbol{\nu}^{\bullet} = \boldsymbol{\nu}\times K\mathbf{x} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата, $\boldsymbol{\nu}$ – орт силы тяжести, $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент, $\mathbf{s}$ – радиус-вектор центра масс гиростата, $A$ – оператор инерции гиростата в неподвижной точке, $K = A^{-1}$, $F = BK$. Операторы $A, B, C$ – симметрические.

Система (1.1) имеет первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}^2 = \mathrm{const}, \quad (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\nu} = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

ЛИС системы (1.1) в общем случае может быть записано в виде

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}) = \alpha \tag{1.3}$$

В решениях [1–3, 6] векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{s}$) и координаты центра масс удовлетворяют условию Гесса (2.3). При отсутствии магнитного момента ($B = 0$) условие $\mathbf{p} \parallel \mathbf{s}$ является необходимым. При наличии магнитного момента ($B \neq 0$) существуют, как показано ниже, ЛИС не гессова типа (векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ не коллинеарны).

Сформулируем результат, полученный для случая, когда динамическая симметрия отсутствует. Пусть $A_1 > A_2 > A_3$ и $\mathbf{e}_i$ – собственный вектор $A$, соответствующий $A_i$. Наряду с главным базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ будем рассматривать правый ортобазис $\Gamma = \{\mathbf{m}_i\}$ такой, что $\mathbf{m}_2 = \mathbf{e}_2$, а орт $\mathbf{m}_1$ перпендикулярен круговому сечению гирационного эллипсоида. Если обозначить $k_{ij}$ элементы матрицы оператора $K$ в базисе $\Gamma$, то этот базис задается условиями $\mathbf{m}_2 = \mathbf{e}_2$, $k_{11} = k_{22}$. Всюду ниже $a_i = (\mathbf{a}, \mathbf{m}_i)$.

*Теорема* 1. Для существования ЛИС системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{e}_2$ был собственным вектором операторов $B$ и $C$, оператор $C$ имел вид

$$C = c_{22}E + (c_{33} - c_{22})\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T + \delta(\mathbf{q}\mathbf{m}_1^T + q_3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_3^T) \tag{1.4}$$

и выполнялись условия

$$\lambda_1 = \alpha k_{13}k_{11}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0 \tag{1.5}$$

$$s_1 = \alpha\delta, \quad s_2 = 0 \tag{1.6}$$

$$f_{11} = q_0(k_{11}^2 - k_{13}^2), \quad f_{22} = q_0(k_{13}^2 + k_{11}^2) \tag{1.7}$$

ЛИС при этом записывается в виде

$$x_3 + q_0(k_{11}\nu_3 + k_{13}\nu_1) = k_{11}k_{13}^{-1}\lambda_1 \tag{1.8}$$

Здесь $c_{ij}, f_{ij}$ – компоненты операторов $C$, $F$ в $\Gamma$; $E$ – тождественный оператор и

$$\mathbf{q} = q_0(\mathbf{m}_3\mathbf{m}_1^T + \mathbf{m}_1\mathbf{m}_3^T)K\mathbf{m}_1 \tag{1.9}$$

$$\delta = q_0k_{13}(k_{11} - k_{13}) - f_{13} \tag{1.10}$$

Отметим, что оператор $C$ определен с точностью до слагаемого $kE$ и член с $c_{22}E$ в (1.4) несуществен.

В полученном для общего случая ЛИС (1.8) $p_1 = p_2 = 0$ и рассмотренный ранее [6] случай $\mathbf{p} \parallel \mathbf{s}$ может быть реализован, только если $s_1 = 0$, что, в силу (1.6), эквивалентно $\alpha\delta = 0$. Таким образом, ЛИС вида

$$(\mathbf{s}, \mathbf{x}) + (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}) = \alpha \tag{1.11}$$

может существовать в двух случаях [6]:

1) $\alpha = 0$, $\mathbf{s} \parallel \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} \parallel \mathbf{m}_3$ и выполнены условия (1.4), (1.7);

2) $\delta = 0$, $\mathbf{s} \parallel \mathbf{m}_3$, $C = c_{22}E + (c_{33} - c_{22})\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T$, $f_{13} = \langle \mathbf{q}, \ K\mathbf{m}_3, \ \mathbf{m}_2 \rangle$ и выполнены условия (1.7).

Форма полученного ЛИС (1.8) совпадает с приведенной ранее [6] формой для отмеченного частного случая. Существенное отличие состоит в том, что в общем случае $\mathbf{s}$ не является одной из осей базиса $\Gamma$ и не удовлетворяет приведенному ниже условию Гесса (2.3).

Для движений с ЛИС система (1.1) допускает очевидное понижение порядка путем исключения $x_3$ при помощи равенства (1.8). Обозначим

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - x_3\mathbf{m}_3 \tag{1.12}$$

Тогда, поскольку $\mathbf{p} = \mathbf{m}_3$, из равенства (1.3) имеем $\mathbf{x} = \mathbf{z} + [\alpha - (\mathbf{q}, \nu)]\mathbf{m}_3$, и система пониженного порядка запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\bullet &= (\mathbf{q}, \ \boldsymbol{\nu}^\bullet)\mathbf{m}_3 + [\mathbf{z} - (\mathbf{q}, \ \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3 + \alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda}] \times K[\mathbf{z} - (\mathbf{q}, \ \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3 + \alpha\mathbf{m}_3] + \\ &+ \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}) - \boldsymbol{\nu} \times F[\mathbf{z} - (\mathbf{q}, \ \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3 + \alpha\mathbf{m}_3] \\ \boldsymbol{\nu}^\bullet &= \boldsymbol{\nu} \times K[\mathbf{z} - (\mathbf{q}, \ \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3 + \alpha\mathbf{m}_3] \end{aligned} \tag{1.13}$$

Любой КИ этой системы можно записать в виде

$$(\mathbf{z},\ H_1\mathbf{z})+(\boldsymbol{\nu},\ H_2\boldsymbol{\nu})+2(H_3\,\mathbf{z},\boldsymbol{\nu})+2(\mathbf{h}_1,\ \mathbf{z})+2(\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\nu})=\mathrm{const} \tag{1.14}$$

Необходимые и достаточные условия существования такого интеграла даются следующей теоремой.

*Теорема* 2. Если существует КИ системы пониженного порядка, отличный от интегралов (1.2), то он может быть записан в виде

$$(\mathbf{z}+\boldsymbol{\lambda})^2+(c_{33}-c_{22})k_{11}^{-1}\nu_3^2-2(k_{11}k_{13})^{-1}(\mathbf{s},\ K\mathbf{m}_1)\nu_3=\mathrm{const} \tag{1.15}$$

Для совместного существования ЛИС (1.3) системы (1.1) и КИ (1.14) системы (1.13) необходимо и достаточно выполнения условий (1.5), (1.6) и представимости операторов $B, C$ в виде

$$B=\delta(k_{13}d)^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^T,\quad C=c_{22}E+(c_{33}-c_{22})\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T \tag{1.16}$$

$$\mathbf{b}=(K\mathbf{m}_1)\times\mathbf{m}_2,\quad d=k_{11}k_{33}-k_{13}^2$$

ЛИС при этом имеет вид $x_3=\alpha$.

При существовании ЛИС частного вида (1.11) были рассмотрены [6] условия существования КИ в случае $\lambda=0$, соответствующем движению твердого тела.

**2. Доказательство теоремы 1.**

*Предложение* 1. ЛИС (1.3) с $\mathbf{p}=0$ не существует.

*Доказательство*. Пусть ЛИС имеет вид $(\mathbf{q},\boldsymbol{\nu})=\alpha$. Отсюда $\boldsymbol{\nu}=\alpha\mathbf{q}\,|\,\mathbf{q}\,|^{-2}+\mathbf{m}$, где $(\mathbf{m},\mathbf{q})=0$. Дифференцируя ЛИС в силу системы (1.1), получим $\langle\mathbf{q},\boldsymbol{\nu},K\mathbf{x}\rangle=0$, что эквивалентно условию $\langle\mathbf{q},\mathbf{m},K\mathbf{x}\rangle=0\ \forall\mathbf{m}:(\mathbf{q},\mathbf{m})=0$ или $\mathbf{q}\times\mathbf{m}=0\ \forall\mathbf{m}:(\mathbf{q},\mathbf{m})=0$, откуда $\mathbf{q}=0$.

Так как $\mathbf{p}\neq 0$, то, без ограничения общности, в (1.3) можно считать $|\mathbf{p}|=1$. Любое значение $\mathbf{x}$, удовлетворяющее равенству (1.3), представимо в виде

$$\mathbf{x}=[\alpha-(\mathbf{q},\boldsymbol{\nu})]\mathbf{p}+\mathbf{m},\quad(\mathbf{p},\ \mathbf{m})=0 \tag{2.1}$$

Дифференцируя равенство (1.3) в силу системы (1.1), получим условие

$$\langle\mathbf{p},\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda},K\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{p},\boldsymbol{\nu},C\boldsymbol{\nu}-F\mathbf{x}-\mathbf{s}\rangle+\langle\mathbf{q},\boldsymbol{\nu},K\mathbf{x}\rangle=0 \tag{2.2}$$

которое должно выполнятся для всех $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{x}$, представимых в виде (2.1).

*Предложение* 2. Вектор $\mathbf{p}$ в ЛИС (1.3) ортогонален круговому сечению гирационного эллипсоида.

*Доказательство.* Подставив выражение (2.1) в условие (2.2) и выделив члены с $m^2$, получим условие $\langle\mathbf{p},m,K\mathbf{m}\rangle=0\,\forall\mathbf{m}:(\mathbf{p},\mathbf{m})=0$, которое выполнено тогда и только тогда, когда

$$p^{(2)}=0,\quad a_1(p^{(1)})^2=a_3(p^{(3)})^2 \tag{2.3}$$

Здесь $p^{(i)}$ – координаты $\mathbf{p}$ в главном базисе; $a_i=A_i\Delta A_i$, $\Delta A_i=(A_j-A_k)\delta_{ijk}$, $(i,j,k)$ – перестановка (1, 2, 3).

Если ввести теперь ортобазис $\Gamma=\{\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_3\}$ так, что $\mathbf{m}_1=\mathbf{e}_2\times\mathbf{p}$, $\mathbf{m}_2=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{m}_3=\mathbf{p}$, то из (2.3) следует равенство $k_{11}=k_{22}$, что и доказывает предложение 2.

Из условия (2.3) для угла $\varphi$ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{e}_1$ получим $\mathrm{tg}^2\varphi=a_1/a_3$.

*Предложение* 3. Условия (1.5) необходимы для существования ЛИС.

*Доказательство*. Выделив, учитывая (2.1), линейные по $\mathbf{m}$ члены в (2.2), получим $\alpha\langle\mathbf{m}_3,\mathbf{m},K\mathbf{m}_3\rangle+\langle\mathbf{m}_3,\boldsymbol{\lambda},K\mathbf{m}\rangle=0$, $\mathbf{m}=m_1\mathbf{m}_1+m_2\mathbf{m}_2$, или $k_{11}\lambda_2m_1-(k_{22}\lambda_1-\alpha k_{13})m_2=0$, что, в силу произвольности $m_1$, $m_2$, дает равенства (1.5).

Отметим, что свободный член в условии (2.2) имеет вид $\alpha\langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\lambda}, K\mathbf{m}_3\rangle$; он обращается в нуль при $\lambda_2 = 0$. Остаются слагаемые с $\nu^2$, $\nu m$, $\nu$, что дает условия

$$\langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\nu}, C\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})F\mathbf{m}_3\rangle - (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_3\rangle \equiv 0 \tag{2.4}$$

$$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\langle \mathbf{m}_3, \mathbf{m}, K\mathbf{m}_3\rangle + \langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\nu}, F\mathbf{m}\rangle - \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}\rangle = 0\,\forall\, \boldsymbol{\nu},\ \ \mathbf{m} : m_3 = 0 \tag{2.5}$$

$$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\lambda}, K\mathbf{m}_3\rangle + \langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{s} + \alpha F\mathbf{m}_3\rangle - \alpha\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_3\rangle \equiv 0 \tag{2.6}$$

*Предложение* 4. Для существования ЛИС необходимо, чтобы вектор $\mathbf{e}_2$ был собственным вектором $B$, параметр $\mathbf{q}$ имел вид (1.9) и выполнялись условия (1.7).

*Доказательство*. Полагая в условии (2.5) $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m} = \mathbf{m}_2$, получим $\langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\nu}, F\mathbf{e}_2\rangle - (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})k_{13} \equiv k_{11}\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_2\rangle$, $\langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\nu}, F\mathbf{m}_1\rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_1\rangle$. Эти тождества выполнены тогда и только тогда, когда

$$q_2 = 0,\ \ (\mathbf{e}_2,\ F\mathbf{m}_1) = 0,\ \ (\mathbf{m}_1,\ F\mathbf{e}_2) = 0$$

$$f_{11} = q_3k_{11} - q_1k_{13},\quad f_{22} = q_3k_{11} + q_1k_{13},\quad k_{11}q_1 = k_{13}q_3$$

Отсюда следует, что $q_1 = q_0k_{13}$, $q_3 = q_0k_{11}$. Это позволяет записать $\mathbf{q}$ в виде (1.9), а $f_{11}, f_{22}$ представить в виде (1.7). Из условия $(\mathbf{e}_2, F\mathbf{m}_1) = 0$ в силу симметрии оператора $B$ получаем $(B\mathbf{e}_2, K\mathbf{m}_1) = 0$, а из условия $(\mathbf{m}_1, F\mathbf{e}_2) = 0$ следует, что $(B\mathbf{m}_1, \mathbf{e}_2) = 0$, и тогда $(B\mathbf{e}_2, \mathbf{m}_1) = 0$. Так как векторы $\mathbf{m}_1$, $K\mathbf{m}_1$ образуют базис плоскости $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3)$, то $B\mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{e}_2$, и $\mathbf{e}_2$ – собственный вектор операторов $B$, $F$, $F^T$.

*Предложение* 5. Условия (1.6) необходимы для существования ЛИС.

*Доказательство*. Условие (2.6) записывается в виде $\mathbf{m}_3 \times (\mathbf{s} + \alpha F\mathbf{m}_3) = \alpha\mathbf{q} \times K\mathbf{m}_3$, что эквивалентно условиям (1.6) с $\delta$ в виде (1.10).

*Предложение* 6. Для существования ЛИС оператор $C$ должен иметь вид (1.4).

*Доказательство*. Полагая в тождестве (2.4) $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_1$, получим $(C\mathbf{e}_2, \mathbf{m}_1) = 0$, а при $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3$ получим $(C\mathbf{e}_2, \mathbf{m}_3) = 0$. Следовательно, $\mathbf{e}_2$ – собственный вектор $C$. Тождество (2.4) запишется в виде

$$\nu_2[c_{13}\nu_3 + (c_{11} - c_{22})\nu_1] \equiv \nu_2(\nu_1q_1 + \nu_3q_3)(q_3k_{13} - q_1k_{33} - f_{13})$$

откуда

$$c_{13} = q_3\delta,\quad c_{11} - c_{22} = q_1\delta,\quad \delta = q_3k_{13} - q_1k_{33} - f_{13}$$

Это позволяет представить оператор $C$ в виде (1.4).

Таким образом, доказано, что каждое из перечисленных в теореме 1 условий является необходимым для существования ЛИС. Совокупность этих условий достаточна для существования ЛИС, так как в силу предложений 2–5 в этом случае будет выполнено условие (2.2) – для всех $\boldsymbol{\nu}$ и всех $\mathbf{x}$, заданных условием (2.1). Само ЛИС (1.3) запишется в форме (1.8), если учесть выражение (1.9) и выразить из первого условия (1.5) $\alpha$ через $\lambda_1$.

**3. Доказательство теоремы 2.** Дифференцируя равенство (1.14) в силу системы (1.13), получим тождество

$$(\mathbf{z}^\bullet,\ H_1\mathbf{z} + H_3^T\boldsymbol{\nu} + \mathbf{h}_1) + (\boldsymbol{\nu}^\bullet,\ H_2\boldsymbol{\nu} + H_3\mathbf{z} + \mathbf{h}_2) \equiv 0 \tag{3.1}$$

$\mathbf{z}^\bullet, \boldsymbol{\nu}^\bullet$ заданы системой (1.13).

*Предложение* 7. Справедливы представления

$$H_1 = \chi E,\ \ \mathbf{h}_1 = \chi\lambda_1\mathbf{m}_1 \tag{3.2}$$

причем этих условий достаточно для обращения в нуль членов с $z^k\nu^0$ ($k$ = 1, 2, 3) в (3.1).

*Доказательство*. Положив в тождестве (3.1) $\boldsymbol{\nu} = 0$, получим

$$\langle H_1\mathbf{z}+\mathbf{h}_1,\ \mathbf{z}+\alpha\mathbf{m}_3+\boldsymbol{\lambda},\ K\mathbf{z}+\alpha K\mathbf{m}_3\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{z}: z_3 = 0 \tag{3.3}$$

Так как при $z_3 = 0$ имеем $\mathbf{z}\times K\mathbf{z} = k_{13}z_1\mathbf{z}\times\mathbf{m}_3$ то, следующее из (3.4) условие $\langle H_1\mathbf{z}, \mathbf{z}, K\mathbf{z}\rangle = 0$ принимает вид $(H_1\mathbf{z}, z_1\mathbf{m}_2 - z_2\mathbf{m}_1) = 0$, откуда $\chi_{21}^{(1)} = 0$, $\chi_{22}^{(1)} = \chi_{11}^{(1)}$. Здесь $H_1 = \{\chi_{ij}^{(1)}\}$ в Г. Так как элементы $\chi_{3j}^{(1)}$ не влияют на форму интеграла (1.14), то их можно считать произвольными, и оператор $H_1$ записывается в форме (3.2).

Слагаемое с $z^2$ в равенстве (3.3) принимает вид $\langle \mathbf{h}_1 - \chi(\alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{z}, K\mathbf{z}\rangle$, что дает условие $z_1\langle \mathbf{h}_1 - \chi\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m}_3, \mathbf{z}\rangle = 0$. Это возможно, только если $\mathbf{h}_1 - \chi\boldsymbol{\lambda} \parallel \mathbf{m}_3$. В интеграле (1.14) $z_3 = 0$ и величина $(\mathbf{h}_1)_3$ произвольна. Положив $(\mathbf{h}_1, \mathbf{m}_3) = 0$, получим $\mathbf{h}_1 - \chi\boldsymbol{\lambda} = -\chi\lambda_3\mathbf{m}_3$, откуда следует представление (3.2) для $\mathbf{h}_1$.

Проверим, что условий (3.2) достаточно для выполнения условия (3.3). Слагаемое с $z^0$ имеет вид $\langle \mathbf{h}_1, \alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda}, \alpha K\mathbf{m}_3\rangle$ и обращается в нуль в силу компланарности сомножителей. Члены с $z^1$ могут быть записаны в виде $\chi(\mathbf{a}, \mathbf{z})$, где

$$\mathbf{a} = \alpha(\alpha\mathbf{m}_3+\lambda)\times K\mathbf{m}_3 + \alpha\lambda_1 K\mathbf{m}_3\times\mathbf{m}_1 + \lambda_1 K[\mathbf{m}_1\times(\alpha\mathbf{m}_3+\lambda)] =$$
$$= (\alpha+\lambda_3)(\alpha k_{13} - \lambda_1 k_{22})\mathbf{m}_2$$

Учитывая условие (1.5) и равенство $k_{11} = k_{22}$, получим $\mathbf{a} = 0$.

*Предложение* 8. Оператор $H_3$ можно представить в виде

$$H_3 = \chi n\mathbf{m}_3\mathbf{m}_1^T, \quad n = -f_{31}k_{11}^{-1} = -2q_0k_{13} \tag{3.4}$$

**При $\chi \neq 0$ должна существовать связь**

$$k_{13}f_{31} = k_{11}(f_{22} - f_{11}) \tag{3.5}$$

*Доказательство*. Выделим в (3.1) слагаемые с $z^2\nu$:

$$k_{13}z_1\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}_3, H_3^T\boldsymbol{\nu}\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, H_3\mathbf{z}\rangle + \chi\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{z}, F\mathbf{z}\rangle = 0 \tag{3.6}$$

Положив $\mathbf{z} = \mathbf{m}_2$, получим $\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{m}_2, H_3\mathbf{m}_2\rangle \equiv 0$, и $\mathbf{m}_2$ – собственный вектор оператора $H_3$.

Обозначив $H_3 = \{\chi_{ij}^{(3)}\}$ в Г, запишем

$$H_3\mathbf{z} = \chi_{22}^{(3)}\mathbf{z} + z_1\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = H_3\mathbf{m}_1 - \chi_{22}^{(3)}\mathbf{m}_1$$

Из интеграла (1.2) следует

$$(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) = \mathrm{const} - (\alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\nu_3$$

Слагаемое $(H_3\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu})$ в интеграле (1.14) можно теперь записать в виде

$$(H_3\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) = \chi_{22}^{(3)}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) + z_1(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) = z_1(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) + P_2(\boldsymbol{\nu})$$

где $P_2(\boldsymbol{\nu})$ – квадратный полином по $\nu_i$, который можно включить в слагаемые с $H_2$, $\mathbf{h}_2$ в КИ (1.14). Следовательно, можно считать $(H_3\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) = z_1(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu})$, откуда $H_3 = \mathbf{n}\mathbf{m}_1^T$. Условие (3.6) принимает вид

$$k_{13}z_1z_2(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) + z_1\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, \mathbf{n}\rangle + \chi\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{z}, F\mathbf{z}\rangle = 0$$

Это условие выполнено, только если

$$n_2 = 0, \quad k_{13}n_1 - k_{11}n_3 = \chi f_{31}, \quad k_{13}n_1 + k_{22}n_3 = -\chi f_{31}, \quad k_{13}n_3 - k_{22}n_1 = \chi(f_{11} - f_{22})$$

Отсюда следует, что $n_1 = 0$, $n_3 = -\chi k_{11}^{-1}f_{31}$, и при $\chi \neq 0$ имеем связь (3.5).

Следовательно, $H_3$ имеет вид (3.4). Используя условие (1.7) существования ЛИС, из (3.5) получим $\chi k_{11}^{-1}f_{31} = 2q_0k_{13}\chi$.

*Предложение* 9. При $\chi = 0$ система (1.13) имеет только тривиальный КИ $\nu^2 =$ $=$ const.

*Доказательство*. При $\chi = 0$ тождество (3.1) принимает вид

$$\langle \boldsymbol{\nu}, K[\mathbf{z} + \alpha\mathbf{m}_3 - (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3], H_2\boldsymbol{\nu} + \mathbf{h}_2\rangle = 0$$

Отсюда следует, что $\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, H_2\boldsymbol{\nu}\rangle = 0$. Это возможно, только если $H_2 = \chi_1 E$. Выделив из тождества члены с $\nu z$, получим $\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, \mathbf{h}_2\rangle = 0$, и $\mathbf{h}_2 = 0$. Интеграл (1.14) принимает вид $\nu^2 =$ const.

Считая далее $\chi \neq 0$, положим

$$H_2 = \chi H_2', \quad \mathbf{h}_2 = \chi \mathbf{h}_2'$$

Обозначив

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{z} + n\nu_3\mathbf{m}_1 + \lambda_1\mathbf{m}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{z} - (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{m}_3 + \alpha\mathbf{m}_3$$

тождество (3.1) запишем в виде

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, K\mathbf{f}_2\rangle + \langle \mathbf{f}_1, \boldsymbol{\nu}, C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s} - F\mathbf{f}_2\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{f}_2, H_2'\boldsymbol{\nu} + nz_1\mathbf{m}_3 + \mathbf{h}_2'\rangle = 0 \tag{3.7}$$

*Предложение* 10. Для существования отличного от (1.2) КИ системы (1.13) необходимо, чтобы операторы B, C были представимы в виде (1.16), выполнялись условия $q = n = 0$; оператор $F$ при этом имеет вид

$$F = \delta k_{13}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{m}_3^T \tag{3.8}$$

*Доказательство*. Выделив из левой части равенства (3.7) члены с $\nu^3$, получим, при учете представления (1.4), тождество

$$n\nu_3\nu_2[(c_{33} - c_{22})\nu_3 + \delta q_3\nu_1 + (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})f_{33}] \equiv (\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_3, H_2'\boldsymbol{\nu}\rangle$$

Предположим, что $n \neq 0$. Полагая $\nu_1 = q_3$, $\nu_3 = -q_1$, получим $(c_{33} - c_{22})q_1 = \delta q_3^2$, что позволяет представление (1.4) записать в виде $C = c_{22}E + \delta q_1^{-1}\mathbf{q}\mathbf{q}^T$. Тождество, полученное из сравнения членов с $\nu^3$, принимает вид

$$n\nu_3\nu_2(\delta q_3 q_1^{-1} + f_{33}) \equiv \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_3, H_2'\boldsymbol{\nu}\rangle$$

что эквивалентно системе условий для элементов $\chi_{ij}'$ оператора $H_2'$ в $\Gamma$:

$$\chi_{32}' = \chi_{21}' = 0, \quad k_{13}\chi_{13}' = k_{33}(\chi_{11}' - \chi_{22}')$$

$$n(\delta q_3 q_1^{-1} + f_{33}) = k_{33}\chi_{13}' + k_{13}(\chi_{22}' - \chi_{33}')$$

Эти условия дают следующую форму записи оператора $H_2'$:

$$H_2' = \chi_{22}'E + \chi_1\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T + \chi_2(K\mathbf{m}_3)(K\mathbf{m}_3)^T$$

$$\chi_1 = -k_{13}^{-1}n(\delta q_3 q_1^{-1} + f_{33}), \quad \chi_2 = \chi_{13}'(k_{33}k_{11})^{-1}$$

Выделим в тождестве (3.7) слагаемые с $z\nu^2$ и учтем последнее представление для $C$. Тогда

$$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})[(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu})k_{13}z_2 - n(k_{33} - k_{22})z_2\nu_3 + nk_{13}z_1\nu_2 + \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, F\mathbf{m}_3\rangle + \delta q_1^{-1}\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}\rangle] - \tag{3.9}$$

$$-n\nu_3\langle \mathbf{m}_1, \boldsymbol{\nu}, F\mathbf{z}\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, H_2'\boldsymbol{\nu}\rangle = 0$$

Полагая $\mathbf{z} = \mathbf{m}_2$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_1$, получим, учитывая соотношение (3.4),

$$\chi_1 - 2k_{11}k_{33}\chi_2 = 2q_0^2k_{13}^2 \tag{3.10}$$

Полагая $\mathbf{z} = \mathbf{m}_2$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_3$ и учитывая равенства (1.7), (1.10), получим

$$k_{11}k_{33}\chi_2 + q_0^2(2k_{33}^2 + 2k_{13}^2 - k_{11}k_{33}) = 0 \tag{3.11}$$

Положив в соотношении (3.9) $\mathbf{z} = \mathbf{m}_1$, $\boldsymbol{\nu} = \nu_1\mathbf{m}_1 + \nu_2\mathbf{m}_2$, получим

$$-\chi_1 + 2\chi_2(k_{11}k_{33} - k_{13}^2) + 4q_0^2k_{13}^2 = 0 \tag{3.12}$$

Из равенств (3.10), (3.12) следует, что $\chi_2 = q_0^2$, но тогда равенство (3.11) выполняется, только если $k_{33}^2 + k_{13}^2 = 0$, что невозможно.

Таким образом, КИ с $n \neq 0$ не существует, но тогда в силу представления (3.4) $H_3 = 0$, $\mathbf{q} = 0$. Учитывая соотношения (1.7), (1.10), (3.5), получим

$$f_{11} = f_{22} = f_{31} = 0, \quad \delta = -f_{13} \tag{3.13}$$

Эти условия для $F = BK$ дают

$$\beta_{13} = -\delta k_{11}d^{-1} = -f_{33}k_{13}d^{-1}, \quad f_{33} = k_{11}k_{13}^{-1}\delta$$

($\beta_{ij}$ – элементы оператора $B$ в $\Gamma$).

Вместе с соотношениями (3.13) это дает представление оператора $F$ в виде (3.8). Так как $K\mathbf{b} = d\mathbf{m}_3$, то из (3.8) следует представление оператора $B$ в форме (1.16). Представление (1.16) для оператора $C$ при $\mathbf{q} = 0$ получаем из соотношения (1.4).

Отметим, что в силу равенства $\mathbf{b} = dA\mathbf{m}_3$ из первого выражения (1.16) получим

$$B = \delta d k_{13}^{-1} A\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T A$$

В тождестве (3.7) суммы членов с $z^3$, $z^2\nu$, $\nu^3$, $z^2$ обращаются в нуль. Сумма членов с $z^1$: $\lambda_1 \langle \mathbf{m}_1, \alpha\mathbf{m}_3 + \lambda, K\mathbf{z}\rangle + \lambda_1\alpha\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{z}, K\mathbf{m}_3\rangle + \alpha\langle \mathbf{z}, \alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda}, K\mathbf{m}_3\rangle$ равна $z_2(\alpha + \lambda_3)(k_{11}\lambda_1 - \alpha k_{13})$ и обращается в нуль в силу условия (1.5). Выпишем оставшиеся слагаемые с $z\nu^2$, $z\nu$, $\nu^2$, $\nu$:

$$c\nu_3\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{m}_3\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, H_2'\boldsymbol{\nu}\rangle = 0, \quad c = c_{33} - c_{22} \tag{3.14}$$

$$\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}\rangle + \alpha\delta k_{13}^{-1}\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}\rangle - \langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, \mathbf{h}_2'\rangle = 0 \tag{3.15}$$

$$c\lambda_1\nu_2\nu_3 + \alpha\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{p}, H_2'\boldsymbol{\nu}\rangle \equiv 0 \tag{3.16}$$

$$\lambda_1\langle \mathbf{m}_1, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}\rangle + \alpha\lambda_1\delta k_{13}^{-1}\langle \mathbf{m}_1, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{m}_3, \mathbf{h}_2'\rangle = 0 \tag{3.17}$$

*Предложение* 11. В КИ, отличном от (1.2), оператор $H_2$ имеет вид

$$H_2 = \chi_3 E + \chi c k_{11}^{-1}\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3^T \tag{3.18}$$

*Доказательство*. Анализ условия (3.14) показывает, что оно выполнено, только если $H_2' = H_2/\chi$, где $H_2$ имеет вид (3.18).

Нетрудно проверить, учитывая условия (1.5), что, если $H_2$ имеет вид (3.18), то условие (3.16) выполнено.

*Предложение* 12. В КИ, отличном от (1.2), параметр $\mathbf{h}_2$ имеет вид

$$\mathbf{h}_2 = -\chi(k_{11}k_{13})^{-1}(\mathbf{s}, K\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_3 \tag{3.19}$$

*Доказательство*. Полагая в условии (3.15) $\mathbf{z} = \mathbf{m}_1$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_3$, получим $(\mathbf{h}_2', \mathbf{m}_2) = 0$. Полагая в этом же условии $\mathbf{z} = \mathbf{m}_2$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}_3$ и учитывая условие (1.6), получим $(\mathbf{h}_2', \mathbf{m}_1) = 0$. Следовательно, $\mathbf{h}_2' = h\mathbf{m}_3$ и условие (3.15) принимает вид

$$\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}\rangle + \alpha\delta k_{13}^{-1}\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}\rangle = h\langle \boldsymbol{\nu}, K\mathbf{z}, \mathbf{m}_3\rangle$$

Полагая здесь $\mathbf{z} = \mathbf{m}_1$ и $\mathbf{z} = \mathbf{m}_2$, получим, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$h = -(k_{11}k_{13})^{-1}(k_{13}s_3 + k_{11}s_1)$$

Это позволяет записать $\mathbf{h}_2$ в виде (3.19).

Условие (3.17) при учете соотношений (3.19), (1.5), (1.6) выполнено.

Совокупность полученных необходимых условий существования КИ достаточна для выполнения тождества (3.1). Найденные представления операторов $H_1, H_2, H_3$, параметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ позволяют записать КИ (1.14) в виде (1.5).

**4. Понижение порядка системы.** Система (1.13) при наличии КИ (1.14) записывается в виде

$$\mathbf{z}^{\bullet} = (\mathbf{z} + \alpha\mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\lambda}) \times K(\mathbf{z} + \alpha\mathbf{m}_3) + (c\nu_3 - c_2)\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{m}_3 \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\bullet} = \boldsymbol{\nu} \times K(z + \alpha\mathbf{m}_3), \quad c_2 = k_{13}^{-1}(\mathbf{s}, K\mathbf{m}_1)$$

Положив $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}$, запишем систему в базисе Г

$$y_1^{\bullet} = y_2(k_{13}y_1 + c_3) + (c\nu_3 - c_2)\nu_2$$

$$y_2^{\bullet} = -y_2(k_{13}y_1 + c_3) - (c\nu_3 - c_2)\nu_1$$

$$\nu_1^{\bullet} = \nu_2(k_{13}y_1 + c_4) - k_{11}\nu_3 y_2 \tag{4.2}$$

$$\nu_2^{\bullet} = -\nu_2(k_{13}y_1 + c_4) + k_{11}\nu_3 y_1$$

$$\nu_3^{\bullet} = k_{11}(\nu_1 y_2 - \nu_2 y_1), \quad c_3 = c_4 - k_{11}(\alpha + \lambda_3), \quad c_4 = k_{11}^{-1}\alpha d$$

Интегралы (1.2), (1.15) принимают вид

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad y_1\nu_1 + y_2\nu_2 + (\alpha + \lambda_3)\nu_3 = h, \quad c\nu_3^2 - 2c_2\nu_3 + k_{11}y^2 = g \tag{4.3}$$

Положим

$$y_1 = y\cos\xi, \quad y_2 = y\sin\xi \tag{4.4}$$

Из первых двух интегралов (4.3) получим

$$\nu_1 = b_2\cos\xi + b_3\sin\xi, \quad \nu_2 = b_2\sin\xi - b_3\cos\xi \tag{4.5}$$

$$b_1 = (1 - \nu_3^2)^{1/2}, \quad b_2 = [h - (\alpha + \lambda_3)\nu_3]y^{-1}, \quad b_3 = \pm(b_1^2 - b_2^2)^{1/2}$$

Из системы (4.2) следует

$$(y^2)^{\bullet} = 2(c\nu_3 - c_2)(\nu_2 y_1 - \nu_1 y_2)$$

что дает $(y^2)^{\bullet} = -2(c\nu_3 - c_2)b_3 y$, и, если $c\nu_3 \neq c_2$, то, учитывая третий из интегралов (4.3), получим интегрируемое в эллиптических функциях уравнение для $\nu_3$

$$\nu_3^{\bullet} = \pm\{k_{11}(g - c\nu_3^2 + 2c_2\nu_3)(1 - \nu_3^2) - k_{11}^2[h - (\alpha + \lambda_3)\nu_3]^2\}^{1/2} \tag{4.6}$$

Решение системы (4.2) сводится к интегрированию уравнения

$$\xi^{\bullet} = f_1(t)\cos\xi + f_2(t) \tag{4.7}$$

$$f_1(t) = -k_{13}y, \quad f_2(t) = -c_2 - (c\nu_3 - c_2)[h - (\alpha + \lambda_3)\nu_3]y^{-2}$$

Задача определения, например, эйлеровых углов базиса Г также сводится к решению уравнения первого порядка.

Если же $c\nu_3 \equiv c_2$, то $y = \text{const}$ и $y_1, y_2$ выражаются через элементарные функции.

При $k_{13}y \geqslant |c_3|$ $\xi(t)$ стремится при $t \to +\infty$ к предельному значению $\xi^*$, задаваемому условием

$$\cos\xi^* = -c_3(k_{13}y)^{-1}$$

При $k_{13}y < |c_3|$ получаем периодическое решение, которое при $c \neq 0$ задается формулами (4.4), (4.5), где, в соответствии с уравнением (4.7),

$$\cos\xi = (b - a\cos\tau)(b\cos\tau - a)^{-1}$$

$$\sin\xi = (a^2 - b^2)^{1/2}\sin\tau(b\cos\tau - a)^{-1}$$

$$a = c_3, \quad b = k_{13}y, \quad \tau = (a^2 - b^2)^{1/2}t + c_5$$

Поскольку $\nu_3 = c_2c^{-1} = \text{const}$, то связанная с телом ось $\mathbf{m}_3$ совершает прецессию вокруг вертикали.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neune partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. B. 37. H. 2. S. 153–181.
2. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
3. *Ольшанский В.Ю.* Линейный и квадратичный интегралы сложной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 37–46.
4. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
5. *Самсонов В.А.* О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
6. *Горр Г.В.* О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 566–569.



Саратов
e-mail: techn @ engels.san.ru



Поступила в редакцию
12.V.1999