ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 64. Вып. 1, 2000

УДК 531.36

© 2000 г. С.П. Сосницкий

О СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Приводятся критерии неустойчивости равновесия гироскопически связанных систем для случаев, когда гироскопические силы могут быть доминирующими. Показано, что явное преобладание гироскопических сил над потенциальными еще не обеспечивает устойчивости равновесия. Ключевой при этом остается структура потенциальных сил. В качестве примера рассматривается задача об устойчивости стационарных движений спутника.

1. Введение. Рассмотрим голономную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=\mathbf{0} \tag{1.1}$$

лагранжиан которой имеет вид

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=L_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+L_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+L_0(\mathbf{q})=\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^TA(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{f}(\mathbf{q})^T\dot{\mathbf{q}}+L_0(\mathbf{q}) \tag{1.2}$$

Будем считать, что $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^2(D_\mathbf{q}\times R^n)$, квадратичная форма $L_2(\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}})$ положительно определена, точка $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ соответствует положению равновесия системы (1.1), (1.2) и $\mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $L_0(\mathbf{0})=0$.

Как известно [1, 2], к уравнениям (1.1) с лагранжианом (1.2) сводится задача об устойчивости стационарных движений. Критерии неустойчивости последних – равновесий системы (1.1), (1.2) обычно упоминаются в литературе как обращения теоремы Рауса [1, 3].

Если в точке $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ функция $L_0(\mathbf{q})$ имеет строгий локальный максимум, то согласно теореме Рауса [4] стационарное движение (положение равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2)) устойчиво. Если же максимум отсутствует, то может иметь место как устойчивость, обусловленная, в частности, стабилизирующим действием гироскопических сил, так и неустойчивость [5, 6]. При этом остается не совсем ясным вопрос о гироскопической стабилизации равновесия системы (1.1), (1.2).

2. О неустойчивости равновесия в условиях действия гироскопических сил. Предположим, что выбор обобщенных координат осуществлен таким образом, что

$$L_0(\mathbf{q})=L_0^{(2)}(\mathbf{q})+L_0^{(m)}(\mathbf{q})+R(\mathbf{q}),\quad R(\mathbf{q})=o(\|\mathbf{q}\|^m) \tag{2.1}$$

$$L_0^{(2)}(\mathbf{q})=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\lambda_k q_k^2,\quad \mathrm{const}=\lambda_k<0 \tag{2.2}$$

где $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ – однородная форма степени $m>2$.

Обозначим ограничение произвольной функции $\Psi(\mathbf{q})$, в том числе и векторной, на множество нулей квадратичной формы $L_0^{(2)}(\mathbf{q})$ через $\hat{\Psi}(\mathbf{q})$.

Теорема 1. Пусть наряду с исходными предположениями относительно лагранжиана L имеют место равенства (2.1), (2.2) и, кроме того,

1) $\partial \widehat{L_0^{(m)}}/\partial\hat{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}, \quad \forall\hat{\mathbf{q}} \in R^2 \setminus \{0\}$;

2) функция $\widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q})$ не имеет экстремума в точке $q_1 = q_2 = 0$;

3) $\det G^2(\mathbf{0}) \neq 0$, где $G^2(\mathbf{q})$ – (2×2)-матрица, полученная из матрицы

$G(\mathbf{q}) = (g_{ij}(\mathbf{q})), \quad g_{ij}(\mathbf{q}) = (\partial f_i/\partial q_j - \partial f_j/\partial q_i), \quad i, j = 1, \dots, n$

вычеркиванием последних $n-2$ строк и последних $n-2$ столбцов;

4) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \|\partial R/\partial\mathbf{q}\| (\|\mathbf{q}\|)^{-m+1-\alpha} = 0, \quad \text{const} = \alpha > 0.$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство. Произведя в (1.1) замену

$$\partial L_2/\partial\dot{\mathbf{q}} = A\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$$

приходим к системе уравнений

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial\mathbf{q} - GA^{-1}\mathbf{p} \tag{2.3}$$

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{p}^T A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} - L_0(\mathbf{q}) = h = \text{const} \tag{2.4}$$

В соответствии с условием 2 теоремы 1 множество

$$\Omega\{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in s_\varepsilon = \{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in D_{\mathbf{q}} \times R^n, \ \|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\| < \varepsilon\} : H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = h \leqslant 0\}$$

непусто.

На основании равенства (2.4), принимая во внимание соотношения (2.1), (2.2), имеем

$$\|\mathbf{p}\|^2 < \lambda\|\mathbf{q}\|^m, \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega, \quad 0 < \lambda = \text{const} \tag{2.5}$$

Замечая, что на множестве Ω имеет место неравенство

$$-L_0^{(2)}(\mathbf{q}) \leqslant L_0^{(m)}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}) \tag{2.6}$$

как следствие получаем

$$\sum_{k=3}^{n} q_k^2 \leqslant \mu(q_1^2 + q_2^2)^{m/2}, \quad \text{const} = \mu > 0 \tag{2.7}$$

Перепишем первые два уравнения второго векторного уравнения системы (2.3), (2.4) в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -G_1\dot{\mathbf{q}} - \partial H/\partial\hat{\mathbf{q}}, \quad \hat{\mathbf{p}} = (p_1, p_2)^T \tag{2.8}$$

где $G_1 = (g_{rj})$ – $(2 \times n)$-матрица, $r = 1, 2$. Умножая соответственно левую и правую части равенства (2.8) сначала на матрицу $(G^2(\mathbf{q}))^{-1}$, затем на матрицу $G_0 = G^2(\mathbf{0})$, получаем

$$G_0(G^2)^{-1}\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -G_0\dot{\mathbf{x}} - G_2\dot{\mathbf{y}} - \partial H/\partial\mathbf{x} + O((\partial H/\partial\mathbf{x})\|\mathbf{q}\|) \tag{2.9}$$

где

$$G_0\dot{\mathbf{x}} + G_2\dot{\mathbf{y}} = G_0(G^2)^{-1}G_1\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{q}} = (q_1, q_2)^T, \quad \mathbf{y} = (q_3, \dots, q_n)^T$$

Сделаем в системе (2.9) замену переменных

$$G_0(G^2)^{-1}\hat{\mathbf{p}} + G_0\mathbf{x} + G_2\mathbf{y} = G_0\mathbf{z} \tag{2.10}$$

Замечая, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} - (G^2)^{-1}\hat{\mathbf{p}} - G_0^{-1}G_2\mathbf{y}$$

вместо (2.9), учитывая соотношение (2.5), имеем

$$G_0\dot{\mathbf{z}} = (G_0(G^2)^{-1})\dot{\hat{\mathbf{p}}} + \dot{G}_2\mathbf{y} + \partial L_0/\partial\mathbf{x}\Big|_{\mathbf{x}\to\mathbf{z}-(G^2)^{-1}\hat{\mathbf{p}}-G_0^{-1}G_2\mathbf{y}} + \mathbf{O}(\|\mathbf{q}\|^m)) \tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{O}(\|\mathbf{q}\|^m)$ означает вектор, каждая компонента которого в окрестности точки $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ имеет порядок малости $\|\mathbf{q}\|^m$.

Так как

$$(G_0(G^2)^{-1})^{\boldsymbol{\cdot}} = O(\|\mathbf{p}\|),\quad \dot{G}_2 = O(\|\mathbf{p}\|)$$

где $O(\|\mathbf{p}\|)$ означает матрицу соответствующей размерности с элементами порядка малости $\|\mathbf{p}\|$, то с учетом неравенств (2.5), (2.7) вместо (2.11) получаем

$$G_0\dot{\mathbf{z}} = \partial L_0^{(m)}(\mathbf{y},\mathbf{z})/\partial z\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} + \mathbf{O}(\|\mathbf{z}\|^{(m-1+\beta)}) \tag{2.12}$$

$$\forall(q,p)\in\Omega,\quad 0<\beta=\mathrm{const}$$

Здесь слагаемое $\mathbf{O}(\|z\|^{(m-1+\beta)})$, аналогично изложенному выше, является вектором, каждая компонента которого в окрестности точки $z = 0$ имеет порядок $\|z\|^{(m-1+\beta)}$; кроме того,

$$\left(\partial L_0^{(m)}(\mathbf{y},\mathbf{z})/\partial\mathbf{z}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}\right)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

$$\partial L_0^{(m)}(\mathbf{y},\mathbf{z})/\partial\mathbf{z}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \neq \mathbf{0},\quad \forall\mathbf{z}\in R^2\setminus\{0\}$$

Поскольку $\det G_0 \neq 0$, то в соответствии с имеющимися результатами [7] (см. в этой связи также [8]) векторное уравнение

$$\varkappa G^2(\mathbf{0})\hat{\mathbf{q}} = \partial L_0^{(m)}/\partial\hat{\mathbf{q}},\quad \varkappa = \mathrm{const}$$

имеет нетривиальное действительное решение $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{c}\in R^2(\|\mathbf{c}\|\neq 0)$. Таким образом, существует неособое линейное преобразование

$\mathbf{v} = B\mathbf{z}$, B – постоянная матрица

приводящее уравнения (2.12) к виду

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}^{(m-1)}(\mathbf{v}) + \mathbf{O}(\|\mathbf{v}\|^{m-1+\beta}) \tag{2.13}$$

где $\mathbf{V}^{(m-1)}(v_1,0) = (av_1^{m-1},0)^T$, $a\in\{1,-1\}$.

Далее, следуя В.И. Зубову [9], рассматриваем дополнительное уравнение

$$\dot{z} = -az^{m-1} \tag{2.14}$$

решение которого имеет вид

$$z = z_0[1 + z_0^{(m-2)}(m-2)at]^{-1/(m-2)} \tag{2.15}$$

Будем полагать, что $z_0 > 0$.

Без ограничения общности положим в (2.13) $a = 1$, так как в противном случае в качестве исходной можно было бы рассмотреть систему с лагранжианом $L(\mathbf{q},-\dot{\mathbf{q}})$. Произведя в (2.13) замену зависимых переменных

$$\mathbf{v} = z(-\mathbf{e}+\mathbf{w}),\quad \mathbf{e} = (1,0)^T \tag{2.16}$$

вместо (2.13) имеем

$$z\dot{\mathbf{w}} = -\dot{z}\mathbf{w} + z^{m-1}F\mathbf{w} + z^{(m-1+\beta)}\mathbf{f}(w_1 - 1, w_2) \tag{2.17}$$

где

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{Vmatrix}$$

является матрицей с постоянными элементами f_{rs} $(r, s = 1, 2)$, причем $f_{11} = -m + 1$.

Переходя с помощью (2.15) к новой независимой переменной, из (2.17) получаем

$$-zd\mathbf{w}/dz = \mathbf{w} + F\mathbf{w} + z^{\beta}\mathbf{f}(w_1 - 1, w_2) \tag{2.18}$$

Функция $\mathbf{f}(w_1 - 1, w_2)$ в точке $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ в общей ситуации в нуль не обращается; кроме того, число β также может быть меньше единицы. Полагая далее

$$\varphi = -\ln z \tag{2.19}$$

и делая замену $z_1 = z^{\beta}$, получаем

$$d\mathbf{w}/d\varphi = \mathbf{w} + F\mathbf{w} + \mathbf{b}z_1 + \mathbf{o}(\|(z_1, \mathbf{w})^T\|), \quad dz_1/d\varphi = -\beta z_1 \tag{2.20}$$

где $\mathbf{b}$ – постоянный вектор, а $\mathbf{o}(\|(z_1, \mathbf{w})^T\|)$ означает вектор с компонентами более высокого порядка малости в окрестности начала, чем $\|(z_1, \mathbf{w})^T\|$.

Соответствующее вековое уравнение линейного приближения системы (2.20)

$$\begin{vmatrix} -m+2-\lambda & f_{12} & b_1 \\ 0 & 1+f_{22}-\lambda & b_2 \\ 0 & 0 & -\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.21}$$

имеет, по крайней мере, два действительных отрицательных корня. В соответствии с соотношениями (2.15), (2.19) отсюда, учитывая равенство (2.16), заключаем о существовании решения системы (2.13), асимптотически стремящегося к точке $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при $t \to \infty$. Замечая, что система (2.13) является результатом преобразования системы (2.3), (2.4) и учитывая полученный ранее результат ([10], следствие из леммы 1), заключаем о существовании асимптотических движений к исследуемому положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ как при $t \to \infty$, так и при $t \to -\infty$. Тем самым неустойчивость исследуемого положения равновесия доказана.

Следствие. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ гамильтоновой системы с гамильтонианом вида

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (q_k^2 + p_k^2) + H^{(m)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{2.22}$$

где $H^{(m)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – однородная форма порядка $m > 2$, $R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = o(\|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\|^m)$, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C^2(D^{2n}_{\mathbf{qp}})$, неустойчиво, если числа λ_k отличны от нуля и одного знака, а также выполняются условия:

1) $\widehat{(\partial H^{(m)}/\partial \mathbf{z})} \neq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{z} \in R^2 \backslash \{0\}$

где $\widehat{(\ldots)}$ и $\mathbf{z}$ соответственно означают ограничение величины в круглых скобках и вектора $\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}$ на множество нулей квадратичной формы $H^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$;

2) функция $\widehat{H^{(m)}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ не имеет экстремума в точке $q_1 = p_1 = 0$; $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

3) $\lim\limits_{\|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\| \to 0} \|\partial R/\partial(\mathbf{q} \oplus \mathbf{p})\| (\|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\|)^{-m+1-\alpha} = 0, \quad \mathrm{const} = \alpha > 0.$

В условиях теоремы 1 предполагается, что все коэффициенты квадратичной формы $L_0^{(2)}(\mathbf{q})$, за исключением $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, отрицательны. Естественно задать вопрос: а если среди λ_i нулевых чисел больше, чем два, то можно ли в рамках данного подхода прийти к какому-либо конструктивному утверждению? Оказывается, ответ на данный вопрос положительный.

Видоизменим в соответствии со сказанным структуру функции $L_0^{(2)}(\mathbf{q})$, полагая

$$L_0^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{n}\lambda_k q_k^2, \quad l \geqslant 3, \quad \text{const} = \lambda_k < 0 \tag{2.23}$$

Теорема 2. Пусть имеют место равенства (2.1), (2.23) и, кроме того,

1) $\partial L_0^{(m)} / \partial q_r \Big|_{\mathbf{q}=(q_1,q_2,0,\ldots,0)^T} \neq 0, \quad \forall r = 1,2, \quad (q_1,q_2) \in R^2 \setminus \{0\}$;

2) $\partial L_0^{(m)} / \partial q_r \Big|_{\mathbf{q}=(q_1,q_2,0,\ldots,0)^T} = 0, \quad \forall r = 3,4,\ldots,l$;

3) функция $L_0^{(m)}(q_1,q_2,0,\ldots,0)$ не имеет экстремума в точке $q_1 = q_2 = 0$;

4) $\det G^l(\mathbf{0}) \neq 0$, где $G^l(\mathbf{q})$ – $(l \times l)$-матрица, полученная из матрицы $G(\mathbf{q})$ вычеркиванием последних $n - l$ строк и последних $n - l$ столбцов;

5) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \| \partial R / \partial \mathbf{q} \| (\| \mathbf{q} \|)^{-m+1-\alpha} = 0, \quad \text{const} = \alpha > 0$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство. Перепишем первые l уравнений второго векторного уравнения системы (2.3), (2.4) в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -G_1\dot{\mathbf{q}} - \partial H / \partial \hat{\mathbf{q}} \tag{2.24}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = (p_1, \ldots, p_l)^T$, $G_1 = (g_{rj})$ – $(l \times n)$-матрица; $r = 1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, n$.

Следуя далее схеме рассуждений, применяемых в процессе доказательства теоремы 1, приходим к системе уравнений вида (2.12), в которой $G_0 = G^l(\mathbf{0})$, $\mathbf{y} = (q_{l+1}, \ldots, q_n)^T$. На основании условий 1–3 теоремы 2 заключаем о существовании неособого линейного преобразования, которое приводит уравнения типа (2.12) к системе l уравнений

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}^{(m-1)}(\mathbf{v}) + \mathbf{O}(\| \mathbf{v} \|^{m-1+\beta}) \tag{2.25}$$

где $\mathbf{V}^{(m-1)}(v_1, 0, \ldots, 0) = (av_1^{m-1}, 0, \ldots, 0)^T, \quad a \in \{1,-1\}$.

Применяя затем схему доказательства теоремы 1, получаем систему типа (2.20), соответствующее вековое уравнение линейного приближения которой имеет вид

$$\begin{vmatrix} -m+2-\lambda & f_{12} & \ldots & f_{1l} & b_1 \\ 0 & 1+f_{22}-\lambda & \ldots & f_{2l} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & f_{l2} & \ldots & 1+f_{ll}-\lambda & b_l \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Как и прежде, данное вековое уравнение имеет, по крайней мере, два действительных отрицательных корня, что позволяет заключить о справедливости теоремы 2.

Следствие 1. Если все числа λ_k в выражении (2.23) обращаются в нуль, то условия 2, 4 теоремы 2 переходят в такие:

2*) $\partial L_0^{(m)} / \partial q_r \Big|_{\mathbf{q}=(q_1,q_2,0,\ldots,0)^T} = 0, \quad \forall r = 3,4,\ldots,n$;

4*) $\det G(\mathbf{0}) \neq 0$.

Следствие 2. Пусть функция $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ является однородной формой нечетной степени $m \geqslant 3$. Тогда условия 1–3 теоремы 2 можно заменить одним:

$$\widehat{\partial L_0^{(m)}/\partial \hat{\mathbf{q}}} \neq \mathbf{0}, \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in R^l \setminus \{0\}$$

где символ "$\widehat{\ldots}$" означает ограничение величин $\mathbf{q}$ и $\partial L_0^{(m)} / \partial \hat{\mathbf{q}}$ на множество нулей функции $L_0^{(2)}(\mathbf{q})$, определяемой равенством (2.23).

Доказательство. Условия следствия 2 всегда обеспечивают существование нетривиального действительного решения $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{c} \in R^l(\|\mathbf{c}\| \neq 0)$ векторного уравнения

$$\varkappa G^l(\mathbf{0})\hat{\mathbf{q}} = \widehat{\partial L_0^{(m)}/\partial \hat{\mathbf{q}}}, \quad \varkappa = \text{const}$$

что позволяет затем воспользоваться схемой доказательства теоремы 1.

Следствие 3. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ гамильтоновой системы с гамильтонианом вида

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sum_{k=l+1}^{n} \lambda_k(q_k^2 + p_k^2) + H^{(m)}(\mathbf{q},\mathbf{p}) + R(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

$$R(\mathbf{q},\mathbf{p}) = o(\| \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \|^m); \quad H(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in C^2(D_{\mathbf{qp}}^{2n})$$

где $H^{(m)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – однородная форма нечетного порядка $m \geqslant 3$, неустойчиво, если числа $\lambda_k \neq 0$ одного знака и выполняются условия:

1) $\widehat{(\partial H^{(m)}/\partial\widehat{(\mathbf{q}\oplus\mathbf{p})})} \neq \mathbf{0}, \ \forall \widehat{(\mathbf{q}\oplus\mathbf{p})} \in R^{2l}\setminus\{0\}$

где символ "$\widehat{\ldots}$" означает ограничение величин $\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}$ и $\partial H^{(m)}/\partial\widehat{(\mathbf{q}\oplus\mathbf{p})}$ на множество нулей квадратичной формы $H^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$;

2) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\oplus\mathbf{p}\|\to 0} \| \partial R / \partial(\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}) \| (\| \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \|)^{-m+1-\alpha} = 0, \quad \text{const} = \alpha > 0.$

3. О неустойчивости систем с двумя степенями свободы. Теоремы 1, 2 предполагают весьма специальную структуру лагранжиана L, имеющую место далеко не во всех случаях гироскопических систем. В частности, при доказательстве теорем 1, 2 (если только не требовать нечетности числа m) является существенной возможность выделения в исходной системе некоторой подсистемы с двумя степенями свободы, позволяющей затем свести исследование устойчивости к некоторой стандартной ситуации. В этой связи представляет интерес рассмотреть более подробно именно системы с двумя степенями свободы, рассчитывая на получение в данном случае более сильных результатов.

Применим для исследования устойчивости функцию действия по Гамильтону [10–12] (штрих означает производную по τ)

$$S = \int_0^t L(\mathbf{q},\mathbf{q}')d\tau \tag{3.1}$$

Предполагая, что решения системы (1.1), (1.2) с началом в $D_\mathbf{q} \times R^n$ продолжаемы на всю ось $t \in R$, функцию действия представим в виде

$$S = S^*(\tau, \mathbf{q}(\tau), \mathbf{q}'(\tau))\Big|_0^t \tag{3.2}$$

Допущение о продолжаемости, если учесть, что ниже речь пойдет о неустойчивости равновесия, не нарушает общности рассмотрения.

Теорема 3. Пусть $n = 2$ и существует такое число $\varepsilon > 0$ ($D_\mathbf{q} \supset \overline{s_\varepsilon}$), при котором выполняются условия:

1) $\omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in D_\mathbf{q}, \|\mathbf{q}\| < \varepsilon\} : L_0(\mathbf{q}) > 0\} \neq \emptyset, \quad 0 \in \partial\omega$;

2) множество ω не содержит цикл, окружающий точку $\mathbf{q} = \mathbf{0}$;

3) $\det G(\mathbf{0}) \neq 0$;

4) $\partial L_0 / \partial \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in s_\varepsilon \setminus 0$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Доказательство. В условиях теоремы 3, учитывая теорему Дарбу (см. [7, 13]), обобщенные координаты всегда можно выбрать таким образом, что

$$L_1 = (-q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2)$$

Представим уравнения (1.1) в гамильтоновой форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{3.3}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{p}^T A^{-1}\mathbf{f} - L_0 + \frac{1}{2}\mathbf{f}^T A^{-1}\mathbf{f} = h = \mathrm{const}$$

С учетом (3.3) функцию действия S, определяемую равенством (3.2), перепишем в виде

$$S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = S^*(\tau, \mathbf{q}(\tau), \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau))\Big|_0^t = S_1^*(\tau, \mathbf{q}(\tau), \mathbf{p}(\tau))\Big|_0^t$$

В соответствии с исходными предположениями и условиями теоремы 3 $S_1^* \in C^1(R \times s_\varepsilon^*)$.

Рассмотрим множество

$$\Omega^* = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\varepsilon^* = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in D_\mathbf{q} \times R^n, \quad \|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\| < \varepsilon\} : H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = 0\}$$

На основании условия 1 теоремы 3 множество Ω^* непусто.

Предположим, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ системы (3.3) устойчиво. Обозначим через Λ^+ множество положительных предельных точек ее траекторий. В соответствии с предположением об устойчивости $\Lambda^+ \cap \Omega^* \setminus \{0, 0\} = \Lambda_0^+ \neq \emptyset$. Множество Λ_0^+ как состоящее из положительных предельных точек траекторий, принадлежащих Ω^*, компактно и, таким образом, содержит минимальное множество $\Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \subset \Lambda_0^+$ ([14], с. 401). Последнее отлично от состояния равновесия согласно условию 4 теоремы 3. Множество Γ также компактно, поскольку является замкнутым подмножеством множества Λ_0^+. Поэтому в соответствии с теоремой Биркгофа ([14], с. 402) делаем вывод, что любая траектория $\gamma \subset \Gamma$ рекуррентна и тем самым устойчива по Пуассону ([14], с. 363), т.е. существует такая последовательность $\{t_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$), что

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{q}(t_k, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \oplus \mathbf{p}(t_k, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)\| = \|\mathbf{q}_0 \oplus \mathbf{p}_0\|, \quad \forall(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \gamma$$

Наряду с (3.3) рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mathbf{q}^2}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{\mathbf{q}^2}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}; \quad \mathbf{q}^2 = q_1^2 + q_2^2 \tag{3.4}$$

Так как $\Gamma \subset \Omega^*\backslash\{0, 0\}$, то на любой траектории $\gamma \subset \Gamma$ выражение $\mathbf{q}^2$ не обращается в нуль. Таким образом, если ограничиться лишь рассмотрением множества траекторий Γ, пренебрегая скоростями движения вдоль них соответствующих изображающих точек, то при учете условия 2 теоремы заключаем, что вспомогательная система (3.4) эквивалентна системе (3.3).

Расcмотрим производную по t функции $S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ по векторному полю, определяемому уравнениями (3.4). В результате получаем

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{q}^2}\left[\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right] \tag{3.5}$$

Поскольку согласно лемме 2 из [10]

$$\partial S_1 / \partial t = 0, \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega^* \tag{3.6}$$

то равенство (3.5) можно переписать в виде

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{\mathbf{q}^2} L\left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right) = \frac{L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\mathbf{q}^2} = \frac{(L_2 + L_0)}{\mathbf{q}^2} + \frac{(-q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2)}{\mathbf{q}^2} \tag{3.7}$$

Проинтегрируем равенство (3.7) вдоль отрезка устойчивой по Пуассону положительной полутраектории $\gamma^+_{0,k} \subset \Gamma(\gamma^+_{0,k} = \{\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) : t \in [0, t_k] \subset R^+,\ t_k \in \ \{t_k\}\})$ системы (3.4). В результате получаем

$$\int\limits_{\gamma^+_{0,k}} dS_1 = \int\limits_0^{t_k} \frac{2}{\mathbf{q}^2} L_2 dt + \varphi\,|_0^{t_k}, \quad \varphi = \arccos\frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|} \tag{3.8}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (3.8) согласно условию 2 теоремы ограничено. Что касается первого слагаемого, то замечая, что выражение для L_2 неотрицательно, причем $L_2 \not\equiv 0$ на любой траектории, проходящей через $\Omega^*\backslash\{0, 0\}$, на основании схемы рассуждений, приведенной в [10], приходим к заключению, что при $t_k \to \infty$ оно не ограничено сверху на $\gamma^+_{0,k}$. Вместе с тем, поскольку функция S_1 не имеет особенностей в s^*_ε, результат интегрирования левой части равенства (3.8) можно представить в виде

$$\int\limits_{\gamma^+_{0,k}} dS_1 = S_1^*(t_k, \mathbf{q}(t_k), \mathbf{p}(t_k)) - S_1^*(0, \mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \tag{3.9}$$

Так как точке $(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{p}(t_k))$, возвращающейся к начальной $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ при $t_k \to \infty$, соответствуют при учете (3.6) ограниченные сверху значения функции S_1^*, то на основании соотношения (3.9) заключаем, что равенство (3.8) противоречиво. Следовательно, предположение об устойчивости исследуемого положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2) неверно. Теорема 3 доказана.

Следствие. В условиях теоремы 3 существуют решения системы (1.1), (1.2), которые асимптотически стремятся к положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$.

Доказательство. Как вытекает из схемы доказательства теоремы 3, множество $\Omega^* \setminus \{0, 0\}$ не содержит целых траекторий. Поэтому следуя описанному ранее подходу ([10], с. 92), приходим к заключению о справедливости следствия.

Теорема 3 обобщает результаты, касающиеся систем с двумя степенями свободы, полученные ранее [7, 15].

Замечание. Условие 2 в теореме 3 существенно, что видно на примере системы

$$\ddot{q}_1 - 2\lambda\dot{q}_2 = \frac{\partial L_0}{\partial q_1}, \quad \ddot{q}_2 + 2\lambda\dot{q}_1 = \frac{\partial L_0}{\partial q_2}; \quad \text{const} = \lambda \neq 0 \tag{3.10}$$

$$L_0(\mathbf{q}) = L_0(\mathbf{q}^2) \in C^2$$

где точка $q_1 = q_2 = 0$, как и выше, соответствует положению равновесия.

В результате замены переменных

$$x = \cos\lambda t q_1 - \sin\lambda t q_2, \quad y = \sin\lambda t q_1 + \cos\lambda t q_2 \tag{3.11}$$

удовлетворяющей равенству: $\mathbf{q}^2 = x^2 + y^2$, вместо (3.10) получаем

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \frac{\partial L_0}{\partial x}, \quad \ddot{y} + \lambda^2 y = \frac{\partial L_0}{\partial y} \tag{3.12}$$

$$L_0(x^2 + y^2) = L_0(q_1^2 + q_2^2)$$

Таким образом, вследствие преобразования (3.11) система (3.10) переходит в натуральную систему (3.12), интеграл энергии которой принимает вид

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\lambda^2(x^2 + y^2) - L_0(x^2 + y^2) = h = \text{const} \tag{3.13}$$

Поскольку $L_0 \in C^2$, то в окрестности точки $x = y = 0$, как положения равновесия системы, $L_0(x^2 + y^2) = O(x^2 + y^2)$. Таким образом, за счет выбора постоянной λ всегда можно достичь того, чтобы потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}\lambda^2(x^2 + y^2) - L_0(x^2 + y^2)$$

полученной натуральной системы в точке $x = y = 0$ принимала строгий локальный минимум, независимо от значения $L_0(x^2 + y^2)$, и тем самым положение равновесия $x = y = 0$ было устойчивым. Очевидно, что структурой функции $L_0(x^2 + y^2)$ исключается возможность выполнения условия 2 теоремы 3.

Пример. Рассмотрим задачу об устойчивости стационарных движений спутника, представляющего собой динамически симметричное твердое тело, центральный эллипсоид инерции которого – эллипсоид вращения ([2], с. 92). Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}A[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta + 2\omega_0(\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\theta\cos\psi) - \omega_0^2\sin^2\theta\cos^2\psi] +$$

$$+\frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta - \omega_0\sin\theta\cos\psi)^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2(C - A)\cos^2\theta$$

Здесь A, C – главные центральные моменты инерции спутника; θ, ψ, φ – углы Эйлера, которыми определяется положение спутника в орбитальной системе координат, ω_0 – угловая скорость центра масс спутника в его движении по орбите.

Поскольку угол собственного вращения φ является циклической координатой, то

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta - \omega_0\sin\theta\cos\psi) = C\omega_3^0 = \text{const} \tag{3.14}$$

Интеграл (3.14) отражает постоянство проекции мгновенной угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии.

Исключая циклическую координату, получаем функцию Рауса

$$R = \frac{1}{2}A[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta + 2\omega_0(\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\theta\cos\psi)] + C\omega_3^0\dot{\psi}\cos\theta - W$$

$$W = \frac{3}{2}\omega_0^2(C - A)\cos^2\theta + \frac{1}{2}A\omega_0^2\sin^2\theta\cos^2\psi + C\omega_3^0\omega_0\sin\theta\cos\psi + \frac{1}{2}C\omega_3^{02}$$

(W – приведенная потенциальная энергия).

Относительные стационарные движения спутника, центр масс которого движется равномерно по круговой орбите, определяются из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \theta}=\frac{\partial W}{\partial \psi}=0 \tag{3.15}$$

Ограничимся рассмотрением одного из серии решений системы (3.15) ([2], с. 94)

$$\theta_0=\frac{\pi}{2},\ \cos\psi_0=-\frac{C\omega_3^0}{A\omega_0} \tag{3.16}$$

Полагая в возмущенном движении

$\theta=\theta_0+x,\ \psi=\psi_0+y$

в малой окрестности решения (3.16) имеем

$$W(\theta,\psi)-W\left(\frac{\pi}{2},\psi_0\right)=\frac{3}{2}\omega_0^2(C-A)\sin^2 x+\frac{1}{2}A\omega_0^2(1-\cos^2\psi_0)\sin^2 y+$$

$$+\frac{1}{2}A\omega_0^2\cos\psi_0\sin\psi_0\sin y(\sin^2 x+\sin^2 y)+\frac{1}{8}\ \frac{C^2}{A}\omega_3^{02}(\sin^4 x+\sin^4 y)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[-A\omega_0^2(1-\cos^2\psi_0)+\frac{1}{2}\ \frac{C^2}{A}\omega_3^{02}\right]\sin^2 x\sin^2 y+o[(\sin^2 x+\sin^2 y)^2] \tag{3.17}$$

$$R_1(\dot\theta,\ \dot\psi,\ \theta,\ \psi)-R_1(0,\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \psi_0)=A\omega_0\cos\psi_0 y\dot x-$$

$$-(A\omega_0\cos\psi_0+C\omega_3^0)x\dot y+O(x^2+y^2)(|\dot x|+|\dot y|)$$

В дополнение к полученному ранее результату ([2], с. 97) рассмотрим случай, когда коэффициенты устойчивости Пуанкаре могут обращаться в нуль. На основании теоремы 3, учитывая равенство (3.17), а также то, что в рассматриваемой задаче $g_{12}(0,0)=-g_{21}(0,0)=-C\omega_3^0$, заключаем, что стационарное движение (3.16) неустойчиво в следующих случаях:

1) $A>C$, $|\cos\psi_0|=1$

2) $A=C$, $0<|\cos\psi_0|<1$

Наоборот, в соответствии с теоремой Рауса стационарное движение (3.16) устойчиво, если имеет место какое-либо из условий:

1) $A<C$, $|\cos\psi_0|\le 1$

2) $A=C$, $|\cos\psi_0|=1$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
3. *Румянцев В.В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 6. С. 113–121.
4. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion. V. 2. London: McMilland, 1892. 224 p.

5. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1867. 727 p.
6. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
7. *Болотин С.В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993. № 6. С. 66–75.
8. *Козлов В.В.* Об асимптотических движениях систем с диссипацией // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 31–36.
9. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
10. *Сосницкий С.П.* О грубой неустойчивости равновесия систем с гироскопическими силами // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. С. 85–100.
11. *Румянцев В.В., Сосницкий С.П.* О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 144–166.
12. *Сосницкий С.П.* О действии по Гамильтону как функции фазовых переменных // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 144–150.
13. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
14. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 550 с.
15. *Фурта С.Д.* О неустойчивости равновесия одной гироскопической системы с двумя степенями свободы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 5. С. 100–101.

Киев
e-mail: sosn@imath. kiev. ua

Поступила в редакцию
15.V.1996