ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 64, Вып. 1, 2000

УДК 531.36

© 2000 г. В.Н. Тхай

ЛЯПУНОВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЕ

Исследована задача о существовании локальных однопараметрических семейств периодических движений (ляпуновских семейств), примыкающих к положению равновесия обратимой системы. В наиболее общей ситуации получен аналог известной теоремы Ляпунова. Проанализирована бифуркация ляпуновских семейств при прохождении пары корней характеристического уравнения через нуль. В частности, показано, что при таком сценарии в невырожденном случае нулевые значения корней являются фатальными для ляпуновских семейств. Изучен эффект "неголономной связи". В приложении анализируются периодические движения, близкие к перманентным вращениям вокруг вертикали, тяжелого однородного эллипсоида на абсолютно шероховатой плоскости.

1. Ляпуновские семейства периодических движений. Обратимся к фазовому портрету для математического маятника $x^{\bullet\bullet} + \sin x = 0$. Наличие знакоопределенного в окрестности нулевого положения равновесия интеграла энергии $x^{\bullet 2}/2 - \cos x = h$ ($h = \text{const}$) позволяет установить существование в этой окрестности однопараметрического ляпуновского семейства замкнутых траекторий – периодических движений. При этом семейство можно параметризовать или постоянной энергии h, или амплитудой периодического движения в момент пересечения им оси x (оси $x^\bullet$), или периодом движения. Знакоопределенность интеграла устанавливается квадратичным членом в разложении потенциальной энергии $-\cos x$, что отвечает паре чисто мнимых корней уравнения первого приближения $x^{\bullet\bullet} + x = 0$.

Нетрудно видеть, что решения ляпуновского семейства симметричны как относительно оси x, так и оси $x^\bullet$. Более того, требование о наличии интеграла не является необходимым для существования ляпуновского семейства. При наличии пары чисто мнимых корней угол на траектории в достаточно малой окрестности равновесия меняется монотонно. Это обеспечивает двукратное пересечение траекторией оси x (оси $x^\bullet$). Поэтому при условии симметрии фазового портрета относительно оси x или оси $x^\bullet$, отсюда немедленно выводим существование ляпуновского семейства. В частности, такая ситуация имеет место в обратимой системе с одной степенью свободы

$$x^{\bullet\bullet} + \omega^2 x = F(x, x^\bullet), \quad \omega = \text{const}$$

с нелинейными членами $F(x, x^\bullet)$ в каждом из случаев: а) $F(x, -x^\bullet) = F(x, x^\bullet)$, б) $F(-x, x^\bullet) = -F(x, x^\bullet)$. В первом из них траектории ляпуновского семейства симметричны относительно оси x, во втором – относительно оси $x^\bullet$; симметричность относительно одновременно обеих осей теперь не гарантируется.

Таким образом, для существования ляпуновского семейства достаточно требовать или существования интеграла, или симметрии фазового портрета (наличие пары чисто мнимых корней в обоих случаях обязательно). Поэтому теория ляпуновских семейств периодических движений строится как для систем, допускающих первый интеграл (системы Ляпунова), так и для систем, обладающих симметрией фазового портрета (обратимые системы).

2. Теорема Ляпунова – Брюно – Девани. Рассмотрим задачу о локальных периодических движениях гладкой обратимой системы

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ (l \geqslant n) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}(\mathbf{u},-\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u},-\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

($\mathbf{A}, \mathbf{B}$ – постоянные матрицы, $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ – нелинейные члены) с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}.\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$.

Теорема 1 (*Ляпунова–Брюно–Девани*). Пусть: а) характеристическое уравнение линейной части системы (2.1) имеет пару $\pm i\omega$ чисто мнимых корней, б) среди других корней этого уравнения нет равных $\pm ip\omega$ ($p \in \mathbb{N}$), в) rank $\mathbf{B} = n$. Тогда система (2.1) имеет $(l-n)$-параметрическое многообразие положений равновесия, принадлежащее неподвижному множеству $\mathbf{M}$ и содержащее нулевое равновесие, и к каждой точке этого многообразия примыкает однопараметрическое семейство ляпуновских периодических движений.

Приведенная формулировка уточняет соответствующее более раннее утверждение [1]. При исследовании случая $l = n$ [2, 3] условие *в* заменялось более сильным условием отсутствия нулевых корней. Очевидно, при $l = n$ нулевые корни отсутствуют, если rank $\mathbf{A}$ = rank $\mathbf{B} = n$. Если же rank $\mathbf{A} = n-k$, rank $\mathbf{B} = n$, то имеется k пар нулевых корней. Однако теорема остается справедливой и в этом случае.

Согласно теореме 1, в случае $l = n = 1$ особая точка на плоскости (u, v) является центром. При $l > n = 1$ пространство (u, v) состоит из $(l-1)$-параметрического многообразия положений равновесия, к каждой точке которого примыкает ляпуновское семейство; других локальных решений нет.

Доказательство теоремы 1 предварим леммой.

Лемма 1. В случае rank $\mathbf{B} = n$ система (2.1) невырожденным линейным преобразованием приводится к виду

$$\boldsymbol{\xi}^{\cdot} = \mathbf{P}\mathbf{y} + \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{x} + \mathbf{Y}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

($\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – нелинейные члены) с действительной жордановой матрицей $\mathbf{J}$ с действительными собственными значениями $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ и неподвижным множеством $\mathbf{M}_* = \{\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}: \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$.

Доказательство. Запишем уравнения первого приближения в (2.1) в виде

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{v}, \ \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{v}, \ \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{l-n}, \ \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n, \ \det \mathbf{B}_2 \neq 0$$

и выберем вместо $\mathbf{u}_2$ новую переменную $\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1$. Тогда $\mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{u}_2$. Далее выполним преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}_2, \ \mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v} \ (\det \mathbf{C} \neq 0)$$

Имеем

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{C}\mathbf{y}, \ \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{C}\mathbf{y}, \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{x}$$

Видно, что характеристическое уравнение этой системы имеет $l-n$ простых нулевых корней. Остальные корни $\pm\lambda$ определяются из полинома порядка n относительно λ^2. При этом λ^2 – действительные числа и совпадают с собственными значениями $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ матрицы $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{C}$. Выбор матрицы C из условия $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{C} = \mathbf{J}$ завершает доказательство.

Доказательство теоремы 1. В силу нечетности функций $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ по переменной $\mathbf{y}$ имеем $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{0}) \equiv 0$. Поэтому система (2.2) допускает постоянное решение $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\boldsymbol{\xi}^0)$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, определяемое из уравнения

$$\mathbf{x}^0 + \mathbf{Y}(\boldsymbol{\xi}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

В результате имеем $(l-n)$-параметрическое от $\boldsymbol{\xi}^0$ многообразие положений равновесия, принадлежащее неподвижному $\mathbf{M}^*$ и содержащее нулевое равновесие $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Теперь заменой $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\xi}, \mu\mathbf{x}, \mu\mathbf{y})$ приведем систему (2.2) к виду

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\xi}^{\bullet} = \mu\mathbf{P}\mathbf{y} + \mu\boldsymbol{\Sigma}_*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mu\mathbf{X}_*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\mathbf{y}^{\bullet} = \mathbf{x} + \mu\mathbf{Y}_*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Отсюда при $\mu = 0$ получим линейную порождающую систему

$$\boldsymbol{\xi}^{\bullet} = \mathbf{0}, \ \mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{J}\mathbf{y}, \ \mathbf{y}^{\bullet} = \mathbf{x} \qquad (2.4)$$

Из последнего уравнения в (2.4) видно, что нулевой корень $\lambda = 0$ в подсистеме для $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, если таковой имеется, не приводит к периодическому решению. Поэтому при наличии пары чисто мнимых корней $\lambda_1 = \pm i\omega$ и остальных корнях $\lambda_s \neq \pm ip\omega$ $(p \in \mathbb{N})$ система (2.4) допускает единственное от $(\boldsymbol{\xi}^*, a_1)$ семейство $2\pi/\omega$-периодических решений

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*, \ x_1 = a_1\,\omega\cos\omega t, \ y_1 = a_1\sin\omega t, \ x_2 = \ldots = x_n = y_2 = \ldots = y_n = 0 \qquad (2.5)$$

При $a_1 \to 0$ имеем $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, и решение (2.5) стягивается к точке, принадлежащей многообразию положений равновесия. Поэтому семейство (2.5) зависит от одного существенного параметра a_1 и примыкает к равновесию $(\boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

На произвольном симметричном решении системы (2.4) имеем

$$y_1 = a_1\sin\omega t, \quad y_s = \sum_{j=2}^{n} a_j\psi_{sj}(t), \quad a_j = \mathrm{const}, \quad \psi_{sj}(-t) = -\psi_{sj}(t), \quad s, j = 2, \ldots, n$$

причем $\det\|\psi_{sj}(\pi/\omega)\| \neq 0$ в силу единственности семейства (2.5). Поэтому на основании теоремы о продолжении по параметру симметричного периодического решения автономной обратимой систмы [1, 4] выводим существование в (2.3) при достаточно малом $\mu \neq 0$ семейства от $(\boldsymbol{\xi}^*, a_1)$ симметричных, $T(\mu)$-периодических решений, $T(0) = 2\pi/\omega$, рождающихся из решений (2.5). Тогда, учитывая вид преобразования системы (2.2) к системе (2.3), устанавливаем при фиксированном значении a_1, например, при $a_1 = 1$, существование в (2.2) семейства от μ симметричных, $T(\mu)$-периодических решений

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^* + o(\mu), \ x_1 = \mu\omega\cos\omega t + o(\mu), \ y_1 = \mu\sin\omega t + o(\mu) \\ &x_2 = o(\mu), \ldots, x_n = o(\mu), \ y_2 = o(\mu), \ldots, y_n = o(\mu) \end{aligned}$$

примыкающих к равновесию $(\boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Примеры. 1°. Уравнения движения задачи трех тел [5]

$$x^{\bullet\bullet} - 2y^{\bullet} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad y^{\bullet\bullet} + 2x^{\bullet} = \frac{\partial W}{\partial y} \qquad (2.6)$$

$$W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2$$

описывают консервативную систему с двумя степенями свободы и одновременно обратимы с неподвижным множеством $\{x, y, x^{\bullet}, y^{\bullet} : y = 0, x^{\bullet} = 0\}$. Коллинеарные точки либрации – постоянные решения системы (2.6) – принадлежат неподвижному множеству; на этих решениях $y = x^{\bullet} = y^{\bullet} = 0$. Эти точки неустойчивы. Однако характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней [5]. Как из теоремы Ляпунова [6], так и теоремы 1 следует существование в окрестности коллинеарных точек либрации примыкающих к ним однопараметрических семейств симметричных периодических орбит. Впервые эти орбиты в окрестности одной из точек либрации построены Эйлером [7]. Здесь впервые ляпуновские семейства обнаружены в одной из фундаментальных задач механики.

2°. Уравнения Эйлера–Пуассона движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [8]

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=P(z_0\gamma_2-y_0\gamma_3),\quad \frac{d\gamma_1}{dt}+(q\gamma_3-r\gamma_2)=0 \tag{2.7}$$

$$(A, B, C),\ (p, q, r),\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

обратимы с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3: p = q = r = 0\}$. При $y_0 = 0$ эти уравнения имеют еще одно неподвижное множество, на котором $q = 0, \gamma_2 = 0$. Если $x_0 = L\cos\alpha_1, z_0 = L\cos\alpha_3$, то в нижнем положении равновесия имеем $p = q = r = 0$, $\gamma_1 = -\cos\alpha_1, \gamma_3 = -\cos\alpha_3$. Уравнения возмущенного движения в окрестности рассматриваемого равновесия имеют вид (2.1), где $l = 4$, $n = 2$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет пару простых нулевых корней. Остальные корни λ определяются из уравнения

$$\varkappa^2+\left(\frac{PL}{A}\cos^2\alpha_3+\frac{PL}{B}+\frac{PL}{C}\cos^2\alpha_1\right)\varkappa+\frac{P^2L^2}{AB}\cos^2\alpha_3+\frac{P^2L^2}{BC}\cos^2\alpha_1=0$$

($\varkappa = \lambda^2$). Можно видеть, что это уравнение при $L \neq 0$ имеет пару отрицательных корней. Значит, характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней. Кроме того, в уравнениях вида (2.1) имеем

$$\mathbf{B}=\left\|\begin{matrix}-Pz_0/B & Px_0/B & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_1\end{matrix}\right\|$$

и при $L \neq 0$ выводим rank $\mathbf{B} = 2$. Поэтому (теорема 1) в окрестности нижнего положения равновесия в нерезонансном случае имеется два семейства малых колебаний. В резонансном случае сохраняется, по крайней мере, одно из этих семейств.

Кроме того, ~~из~~ теоремы 1 следует существование двухпараметрического семейства постоянных решений, принадлежащих неподвижному множеству. Существование этого семейства видно также из исходных уравнений (2.7). На этом семействе имеем

$$(A-C)\,rp + P(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3) = 0,\quad r\gamma_1-p\gamma_3 = 0$$

Так как геометрический интеграл не содержит произвольной постоянной, то в отличие от общей ситуации, это семейство – однопараметрическое. Каждой точке этого семейства отвечает вращение твердого тела с постоянной угловой скоростью, к которому примыкают ляпуновские семейства периодических движений.

Отметим, что формально здесь теорема Ляпунова [6] не применима ($l > n$). Однако, используя интегралы – геометрический и кинетического момента, можно свести задачу к системе Ляпунова. В следующей задаче теорема Ляпунова уже не применима по существу.

3°. Рассмотрим дискретную модель упругого стержня, нагруженного следящей силой ([9], с. 105). Механическая система расположена в горизонтальной плоскости и состоит из двух одинаковых стержней массы m и длины l, соединенных друг с другом и неподвижным основанием при помощи идеальных шарниров и пружин жесткости соответственно c_1 и c_2. На свободный конец второго стержня действует постоянная по величине следящая сила F, направленная вдоль оси стержня. Недеформированному состоянию пружин отвечает прямолинейная конфигурация системы.

Имеем механическую систему с позиционными силами. Эта система обратима [10]. Если положения стержней определять углами их отклонения от равновесного состояния, то характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$7\lambda^4 + 6a/(ml^2)\lambda^2 + 36c_1c_2/(m^2l^4) = 0,\quad a = 2c_1 + 16c_2-5Fl$$

Из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенства

$$a - 2\sqrt{7c_1c_2} > 0$$

всегда имеется одно ляпуновское семейство периодических движений. При выполнении условия нерезонансности имеем два таких семейств. Очевидно, эти семейства описывают малые колебания стержней около положения равновесия.

3. Случай rank B = n–1. Исследуем задачу о существовании ляпуновских семейств периодических движений при нарушении одного из условий в теореме 1. Случай, когда в системе с $l = n$ есть еще одна пара чисто мнимых корней вида $\pm ip\omega (p \in \mathbb{N})$, рассмотрен [11, 12]. При этом предполагалось, что rank $\mathbf{B} = n$.

Пусть теперь в системе (2.1) имеем rank $\mathbf{B} = n-1$. Тогда при выполнении условия rank $\mathbf{A} = n$ система (2.1) невырожденным линейным преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} &\xi^\bullet = \Sigma\,(\boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n} \\ &x^\bullet = y, \ \ y^\bullet = Y_0(x) + Y_1(\boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\mathbf{p}^\bullet = \mathbf{A}_*\mathbf{q} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, x, y, p, \mathbf{q}) \\ &\mathbf{q}^\bullet = \mathbf{B}_*\mathbf{p} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}); \ \ \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

($\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ – постоянные квадратные (n–1)-матрицы, Σ, Y_0, Y_1, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – нелинейные члены). Система (3.1) обратима и имеет неподвижное множество $\mathbf{M}_* = \{\boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}\colon y = 0, \mathbf{q} = \mathbf{0}\}$.

В случае

$$Y_1\,(\boldsymbol{\xi}, 0, 0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv 0 \tag{3.2}$$

пространство ($\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) является инвариантным для системы (3.1). В этом пространстве движение описывается системой

$$\begin{aligned} &\xi^\bullet = \Xi\,(\boldsymbol{\xi}, 0, 0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\mathbf{p}^\bullet = \mathbf{A}_*\mathbf{q} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, 0, 0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\mathbf{q}^\bullet = \mathbf{B}_*\mathbf{p} + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}, 0, 0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

для которой справедлива теорема 1. Поэтому при выполнении условия *б* этой теоремы каждой паре чисто мнимых корней характеристического уравнения отвечает ляпуновское семейство периодических движений.

Предположим теперь, что условие (3.2) не выполнено. Тогда в невырожденном случае имеем

$$Y_1(\mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{p}, \mathbf{0}) = \sum_{s,j=1}^{n-1} c_{sj} p_s p_j + o(\|\mathbf{p}\|^2), \quad c_{sj} = \text{const} \tag{3.4}$$

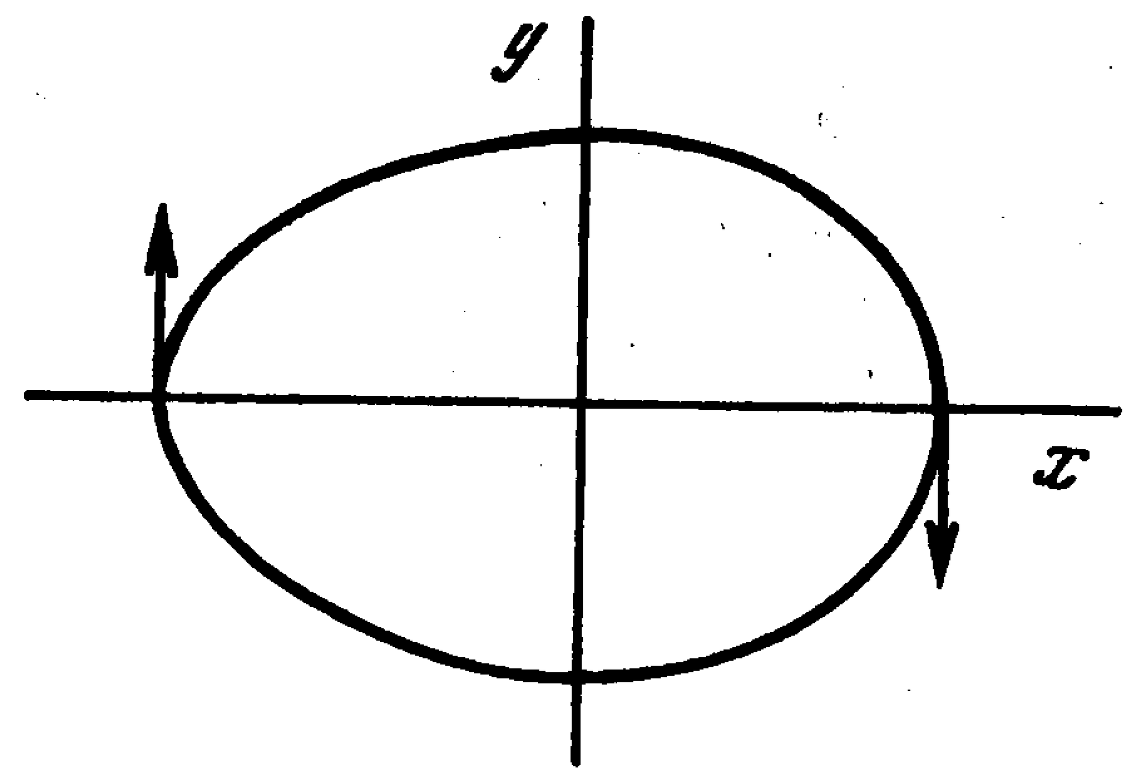
Введем малый параметр μ заменой: ($\boldsymbol{\xi}$, x, y, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) $\to$ ($\mu\boldsymbol{\xi}$, μx, μy, $\mu\mathbf{p}$, $\mu\mathbf{q}$). Тогда на ляпуновском семействе, обусловленном парой чисто мнимых корней $\pm i\omega$ и примыкающем к нулевому положению равновесия, если такое семейство существует, получим

$$p_s = a_s \cos\omega t + \ldots, \quad q_s = b_s \sin\omega t + \ldots \quad (a_s, b_s = \text{const})$$

При этом $\xi^\bullet$, y, $x^{\bullet\bullet}$ имеют порядок не ниже первого относительно μ. Значит, на периодическом движении переменные $\boldsymbol{\xi}$ и x имеют такой же порядок по μ, и скорость изменения переменной y при пересечении неподвижного множества $\mathbf{M}_*$ равна

$$y^\bullet = \mu \sum_{s,j=1}^{n-1} c_{sj} a_s a_j + o(\mu)$$

и имеет один и тот же знак. Очевидно, на периодическом движении это невозможно (фиг. 1).



Фиг. 1

Теорема 2. Пусть в системе (2.1) имеем rank $\mathbf{A} = n$, rank $\mathbf{B} = n-1$. Тогда в системе (2.1) не существует ляпуновского семейства периодических движений, примыкающего к нулевому положению равновесия.

Замечание. Условие rank $\mathbf{A} = n$ гарантирует приведение системы (2.1) к виду (3.1), причем теорема 2 справедлива для системы (3.1) независимо от выполнения условия rank $\mathbf{A}_* = n-1$. Поэтому условия rank $\mathbf{A} = n$, rank $\mathbf{B} = n-1$ в теореме 2 можно заменить условием наличия пары нулевых корней с жордановой клеткой и равенством нулю переменной y на неподвижном множестве.

Таким образом, в общей ситуации (3.4), нарушение условия *в* в теореме 1, в отличие от условия *б* [11, 12], оказывается фатальным для ляпуновского семейства. Если система (2.1) содержит малый параметр ε, имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega(\varepsilon)$, $\omega(0) \neq 0$ и при $\varepsilon = 0$ два других корня проходят через нуль по сценарию нарушения условия *в*, то при $\varepsilon = 0$ ляпуновское семейство исчезает.

Возникает интересная задача о существовании периодических движений, обусловленных парой нулевых корней и близких к плоским периодическим движениям системы

$$x^\bullet = y, \quad y^\bullet = Y_0(x) + Y_1(\mathbf{0}, x, y, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \tag{3.5}$$

Положим

$$Y_0(x) = gx^m + o(x^m), \quad g = \text{const}$$

Тогда функция $V = xy$ является функцией Четаева для системы (3.5) в случае четного m, а в случае нечетного m – при $g > 0$ [13]. Отсюда следует, что в указанных случаях все решения системы (3.5) из области $xy > 0$ являются уходящими и поэтому периодических решений нет. В частности, такая ситуация имеет место в наиболее общем случае $m = 2$.

Пусть $m = 3$. Несмотря на вырожденность, этот случай, как правило, и имеет место в механических задачах. Предполагая $g < 0$, перейдем к переменным r, θ по формулам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r^2\sin\theta$$

В результате получим 2π-периодическую по θ систему

$$r^\cdot = r^2\frac{(1+g\cos^2\theta)}{1+\sin^2\theta}\sin\theta\cos\theta + r^3R(r,\theta) \tag{3.6}$$

$$\theta^\cdot = -r\frac{2\sin^2\theta - g\cos^4\theta}{1+\cos^2\theta} + r^2\Theta(r,\theta)$$

Из второго уравнения видно, что при достаточно малых r угол θ меняется на траекториях монотонно. Поэтому угол θ можно выбрать за новую независимую переменную и систему (3.6) записать в виде одного обратимого уравнения для r, описывающего движение на неподвижном множестве. Известно [14], что все решения полученного уравнения будут 2π-периодическими по θ. Значит, при $m = 3$, $g < 0$ нуль системы (3.5) будет центром.

При наличии присоединенной системы (для переменных $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$) доказать существование примыкающего к нулю семейства периодических движений не удалось.

4. Бифуркация ляпуновских семейств периодических движений. Предположим, что система (2.1) содержит параметр ε, при $\varepsilon \neq 0$ имеем $\mathrm{rank}\mathbf{B}(\varepsilon) = n$, а $\mathrm{rank}\mathbf{B}(0) = n - 1$. Тогда при выполнении условия $\mathrm{rank}\mathbf{A}(0) = n$ система (2.1) при $\varepsilon = 0$ приводится к виду (3.1). Из (3.1) также выводим преобразованную при $\varepsilon \neq 0$ систему, если рассматривать ε как локальную переменную, отвечающую уравнению $\varepsilon^\bullet = 0$. Тогда, вводя при необходимости новый параметр – функцию от ε, имеем систему

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\xi}^\bullet = \boldsymbol{\Xi}(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n} \\
x^\bullet = y, \quad y^\bullet = \varepsilon x + Y_0(\varepsilon, x) + Y_1(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
\mathbf{p}^\bullet = \mathbf{A}_*(\varepsilon)\mathbf{q} + \mathbf{P}(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
\mathbf{q}^\bullet = \mathbf{B}_*(\varepsilon)\mathbf{p} + \mathbf{Q}(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, y, \mathbf{p}, \mathbf{q}); \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-1}
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{A}_*(\varepsilon)$, $\mathbf{B}_*(\varepsilon)$ – постоянные матрицы, $\det\mathbf{B}_* \neq 0$, нелинейные функции $\boldsymbol{\Xi}$, Y_1, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ обращаются в нули при $\boldsymbol{\xi} = 0$, $x = y = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$. Кроме того, $Y_1(\varepsilon, \mathbf{0}, x, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0$.

Лемма 2. Пусть

$$Y_0(\varepsilon, x) = g(\varepsilon)x^m + o(x^m), \quad g(0) \neq 0$$

Тогда при $m = 2$ система (4.1) допускает два $(l - n)$-параметрических семейства положений равновесия, принадлежащих неподвижному множеству. При $m = 3$ и $\varepsilon g(0) < 0$ имеется три таких семейств, а при $m = 3$, $\varepsilon g(0) > 0$ существует только одно такое семейство. Во всех указанных случаях одно из семейств содержит нулевое равновесие.

Доказательство. Так так на неподвижном множестве $\mathbf{M}_*$ функции $\boldsymbol{\Xi}$ и $\mathbf{P}$ обращаются в нуль, то задача сводится к совместности системы уравнений

$$\begin{gathered}
\varepsilon x + Y_0(\varepsilon, x) + Y_1(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, 0, \mathbf{p}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
\mathbf{B}_*(\varepsilon)\mathbf{p} + \mathbf{Q}(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, x, 0, \mathbf{p}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \ \det\mathbf{B}_*(\varepsilon) \neq 0
\end{gathered} \tag{4.2}$$

При $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ из второго уравнения системы (4.2) определим $\mathbf{p}(\varepsilon, x)$ как нелинейную функцию x, причем $\mathbf{p}(\varepsilon, 0) = \mathbf{0}$. Подставим в первое уравнение.

Получим уравнение

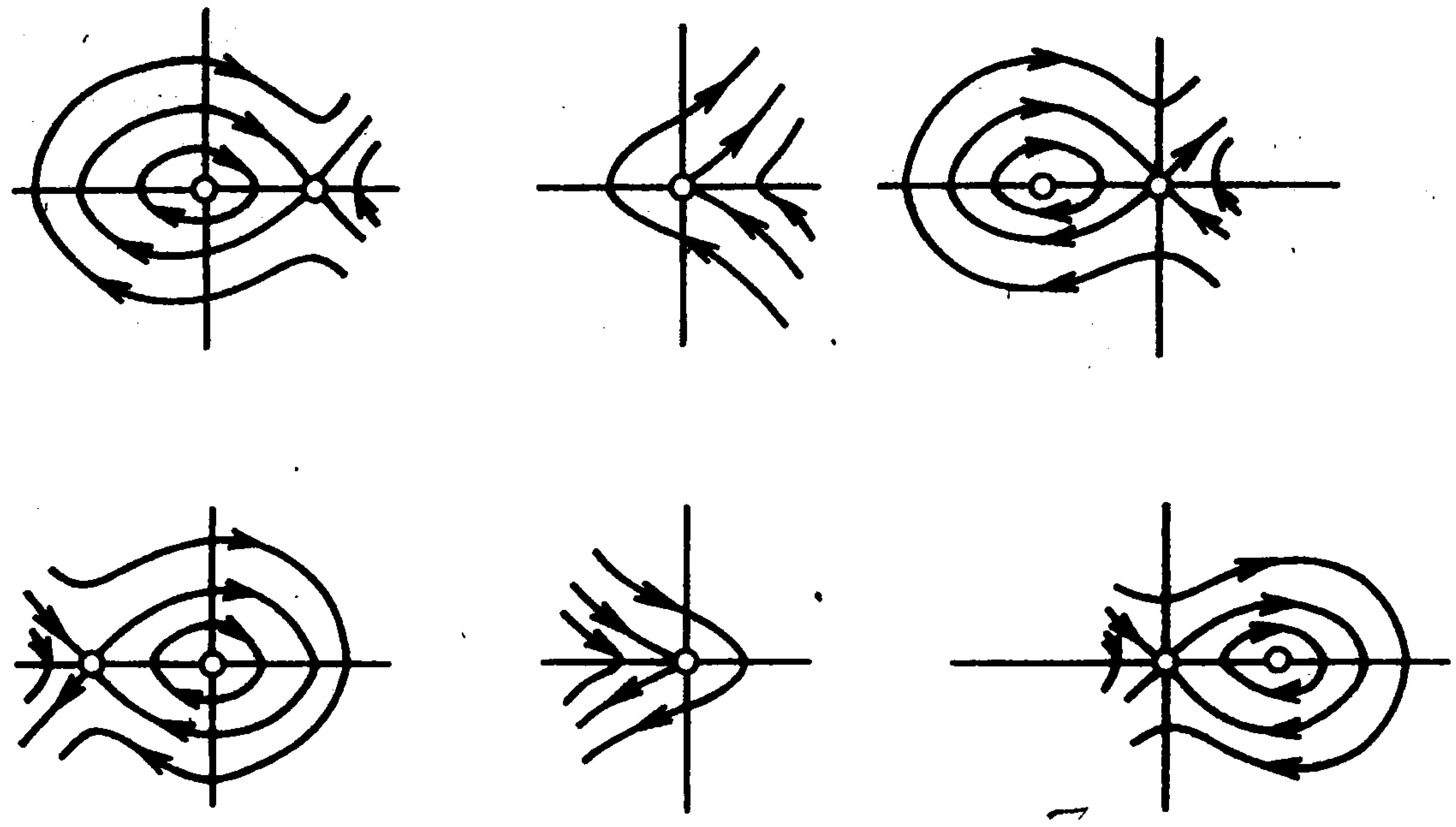
$$f(\varepsilon, x) \equiv \varepsilon x + g(0)x^m + o(x^m) + x^m o(\varepsilon) = 0 \quad (m = 2, 3)$$

которое имеет очевидный корень $x^0 = 0$, а также другие указанные в лемме 2 корни. При этом при подстановке любого из этих корней частная производная $\partial f/\partial x \neq 0$. Поэтому из теоремы о неявной функции следует, что при достаточно малых $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0$ система (4.2) имеет $(l - n)$-параметрическое от $\boldsymbol{\xi}^0$ семейство корней $x^0(\boldsymbol{\xi}^0)$, $x^*(\boldsymbol{\xi}^0)$.

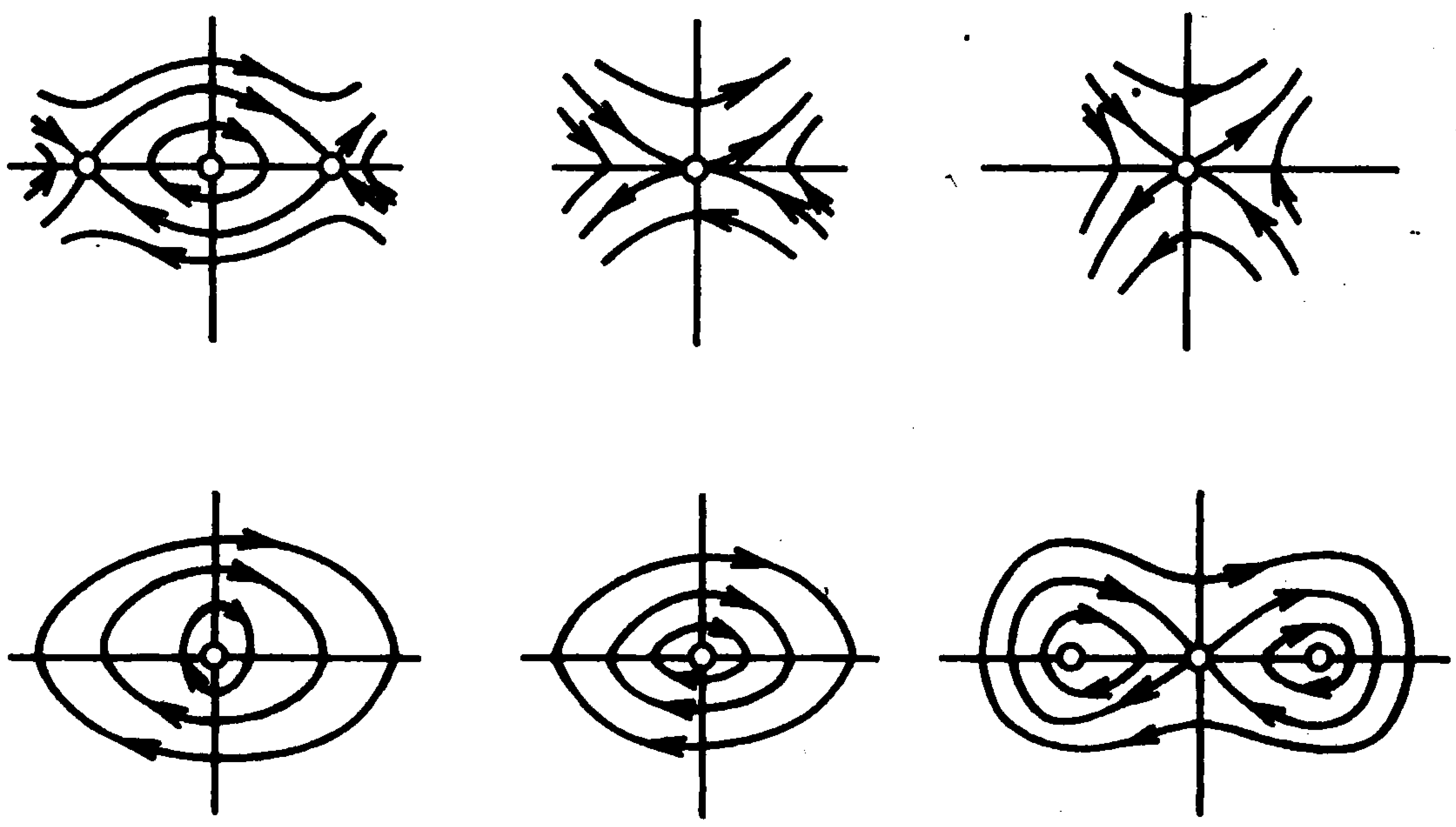
Замечание. Из доказательства следует, что $\boldsymbol{\xi}^0$ имеет порядок $o(x^0)$ при $m = 2$ и $o((x^0)^{3/2})$ при $m = 3$.

На плоскости (x, y) указанные семейства положений равновесия изображаются точками. Характер этих особых точек показан на фиг. 2 ($m = 2$) и фиг. 3 ($m = 3$). При этом слева направо изображены случаи соответственно $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$, а на верхних (нижних) рисунках фиг. 2, 3 имеем $g > 0 (g < 0)$. Отметим, что фиг. 3 возникает также [15] при исследовании гамильтоновой системы.

Теорема 3. Пусть матрицы $\mathbf{A}_*(0)$ и $\mathbf{B}_*(0)$ в системе (4.1) удовлетворяют условиям теоремы 1, наложенным на матрицы соответственно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ к каждой точке $(l - n)$-многообразия положений равновесия, изображенных на фиг. 2, 3, примыкают ляпуновские семейства периодических движений, причем семейства для равнове-



Фиг. 2



Фиг. 3

сий типа "седло" орбитально неустойчивы. Кроме того, к положениям равновесия типа "центр" примыкают ляпуновские семейства периодических движений, близкие к изображенным на фиг. 2, 3, с частотой, близкой к числу $k\sqrt{|\varepsilon|}$ (k = const).

Доказательство. Если матрицы $\mathbf{A}_*(0)$ и $\mathbf{B}_*(0)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, наложенным на матрицы соответственно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то при фиксированном $\varepsilon \neq 0$ система линейного приближения в (4.1) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Отсюда следует справедливость первого утверждения теоремы 3. Неустойчивость ляпуновских движений, примыкающих к равновесиям типа "седло", следует из неустойчивости по первому приближению по переменным x и y. При этом уход решений происходит экспоненциально с показателем $k\sqrt{|\varepsilon|}$. Существование еще одного ляпуновского семейства, примыкающего к равновесию типа "центр", также выводится из теоремы 1. Это семейство отвечает паре чисто мнимых корней $\pm ik\sqrt{|\varepsilon|}$, для которой при достаточно малом ε условие *б* теоремы 1 выполнено.

Из фиг. 2, 3 при учете теорем 2, 3 становится вполне ясным сценарий бифуркаций ляпуновских семейств периодических движений при переходе пары корней через нуль.

5. Эффект "неголономной связи". Выше исследование проводилось при произвольных l и n, удовлетворяющих условию $l \geqslant n$. Иначе, теоремы 1–3 содержат утверждения, справедливые при $l = n$ и обобщаемые на случай $l > n$. Однако при решении прикладных задач, в частности, в неголономной механике всегда имеем $l \geqslant n$. Поэтому интересен вопрос об "активном вкладе" переменной ξ в ляпуновские семейства периодических движений.

Рассмотрим систему (3.1) и, предполагая сначала $m = 2$, выделим в функции Y_1 квадратичные по x и ξ члены

$$Y_*(\xi, x) \equiv gx^2 + x\Sigma\alpha_s\xi_s + \Sigma\beta_{sj}\xi_s\xi_j \quad (\alpha_s, \beta_{sj} = \text{const})$$

Все принадлежащие неподвижному множеству положения равновесия рассматриваемой системы определяются из системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &gx^2 + x\Sigma\alpha_s\xi_s + \Sigma\beta_{sj}\xi_s\xi_j + Y_{**}(\xi, x, 0, \mathbf{p}, 0) = 0 \\ &\mathbf{B}_*\mathbf{p} + \mathbf{Q}(\xi, x, 0, \mathbf{p}, 0) = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

($Y_{**}(\xi, x, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ – первая часть уравнения для y без функции $Y_*(\xi, x)$).

Определим из второго уравнения системы (5.1) нелинейную функцию $\mathbf{p}(\xi, x)$ и подставим в первое уравнение. Тогда после введения, заменой $(\xi, x) \to (\mu\xi, \mu x)$, малого параметра μ получим уравнение для определения x

$$gx^2 + x\Sigma\alpha_s\xi_s + \Sigma\beta_{sj}\xi_s\xi_j + \mu F(\mu, \xi, x) = 0 \tag{5.2}$$

При $\mu = 0$ уравнение (5.2) при надлежащем выборе величин $\xi_1, \ldots, \xi_{l-n}$ всегда имеет простые корни, если только все постоянные α_s, β_{sj} не равны одновременно нулю или не выполнены условия: $\alpha_s = 0$ ($s = 1, \ldots, l - n$) и квадратичная форма от ξ не является знакоопределенной со знаком числа g. При этом, если все $\beta_{sj} = 0$, то один из корней совпадает с нулем. Следовательно, за исключением указанных случаев, система (5.1) допускает $(l - n)$-параметрическое от ξ, принадлежащее неподвижному множеству многообразие положений равновесия. При этом область допустимых значений ξ задается условием разрешимости уравнения (5.2).

Теперь рассмотрим одно из равновесий рассматриваемого многообразия и перейдем в его окрестность. Тогда, в силу принадлежности равновесия к неподвижному множеству, получим обратимую автономную систему. К этой системе применима теорема 1. В результате получим ляпуновские семейства периодических движений, установленные в теореме 3.

Аналогичная ситуация имеет место при $m = 3$. Только в этом случае функция $Y_*(\xi, x)$ имеет вид

$$Y_*(\xi, x) = gx^3 + x\Sigma\alpha_s\xi_s$$

и уравнение равновесий (5.1) имеет одно или три семейства решений, если только не все α_s одновременно равны нулю. В случае, когда $\alpha_s = 0$ ($s = 1, \ldots, l - n$), необходимо выбрать

$$Y_*(\xi, x) = gx^3 + \Sigma\beta_{sj}\xi_s\xi_j$$

Отметим, что как при $m = 2$, так и при $m = 3$ можно выписывать новые выражения для функции $Y_*(\xi, x)$, если все α_s и β_{sj} равны нулю.

Теорема 4. К каждой точке многообразия положений равновесия системы (3.1), исключая нулевое равновесие, определяемой простым корнем уравнения $Y_*(\xi, x) = 0$, примыкает ляпуновское семейство, отвечающее паре чисто мнимых корней подсистемы для $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. При этом для матриц $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{B}_*$ должны быть выполнены условия теоремы 1, сформулированные для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Семейства, примыкающие к равновесию типа "седло", орбитально неустойчивы, а к равновесиям типа "центр" примыкает еще одно ляпуновское семейство, близкое к плоским движениям на (x, y).

Замечание. Из теоремы 4 следует, что эффект "неголономной связи" при нарушении условия *в* в теореме 1, т.е. при наличии пары нулевых корней с жордановой клеткой с условием $\mathrm{rank}\mathbf{B} = n-1$, заключается в "отдалении" этих корней от нуля. Ляпуновские семейства ведут себя так же, как и в случае пары корней, близких к нулю с жордановой клеткой.

6. Тяжелый однородный эллипсоид на абсолютно шероховатой плоскости. Периодические движения, близкие к перманентным вращениям вокруг вертикали. Динамика тяжелого однородного эллипсоида на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot} = \frac{a^2}{b^2}y\omega_3 - \frac{a^2}{c^2}z\omega_2 + \frac{a^2-c^2}{a^2c^2}x^2z\omega_2 + \frac{b^2-a^2}{b^2a^2}x^2y\omega_3 + \frac{c^2-b^2}{c^2b^2}xyz\omega_1 \equiv X \\
&[A+m(y^2+z^2)]\omega_1^{\bullet} - mxy\omega_2^{\bullet} - mxz\omega_3^{\bullet} = \\
&= (B-C)\omega_2\omega_3 + (X - y\omega_3 + z\omega_2)(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \\
&-m\omega_1(xx^{\bullet} + yy^{\bullet} + zz^{\bullet}) - mg\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}xyz\delta \\
&\delta = (x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^{-1/2}, \quad A = m(b^2+c^2)/5, \quad B = m(c^2+a^2)/5, \\
&C = m(a^2+b^2)/5 \\
&(x,y,z), \ (\omega_1,\omega_2,\omega_3), \ (A,B,C), \ (a,b,c)
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

Здесь m – масса эллипсоида, a, b, c – его полуоси, A, B, C – главные центральные моменты инерции, x, y, z – координаты точки контакта эллипсоида и плоскости в подвижной системе координат с осями, направленными по осям эллипсоида, ω_1, ω_2, ω_3 – проекции вектора мгновенной угловой скорости в этой же системе, δ – расстояние от центра масс до точки контакта.

Система (6.1) обратима с тремя неподвижными множествами, на каждом из которых одна из пар переменных (x, ω_1), (y, ω_2), (z, ω_3) равна нулю. Кроме того, как всегда для тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости, есть неподвижное множество $\{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 \doteq 0\}$.

Перейдем к безразмерной форме уравнений, вводя новые переменные, параметры и время τ по формулам

$$
\begin{aligned}
&x = ax_1, \quad y = by_1, \quad z = cz_1, \quad \omega_1 = \omega p, \quad \omega_2 = \omega q, \quad \omega_3 = \omega r, \quad \tau = \omega t \\
&\alpha = a/c, \quad \beta = b/c, \quad \gamma = g/(\omega^2 c), \quad A_1 = (\beta^2+1)/5, \quad B_1 = (1+\alpha^2)/5, \\
&C_1 = (\alpha^2+\beta^2)/5
\end{aligned}
$$

(ω – некоторая постоянная, имеющая размерность угловой скорости). Тогда полученная система имеет частное решение

$$
x_1 = y_1 = 0, \quad z_1 = -1, \quad p = q = 0, \quad r = \omega_0(\mathrm{const}) \tag{6.2}
$$

отвечающее перманентному вращению вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega\omega_0$. Предполагая $\omega_0 \neq 0$, всегда достаточно рассматривать случай $\omega_0 = 1$. Для этого при переходе к новому времени τ положим угловую скорость в перманентном вращении, равной ω.

Система (6.1) допускает два интеграла – энергии и геометрический. В безразмерной форме эти интегралы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&(\beta y_1 r - z_1 q)^2 + (z_1 p - \alpha x_1 r)^2 + (\alpha x_1 q - \beta y_1 p)^2 + A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 + \\
&+2\gamma\left(\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} + z_1^2\right)^{-1/2} = 2\frac{h}{m\omega^2 c^2} = 2h_1(\mathrm{const})
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$$

(h – постоянная энергии).

Составим уравнения возмущенного движения в окрестности частного решения (6.2). Тогда в полученной обратимой системе вида (2.1) имеем $l=4$, $n=2$. Следовательно, имеется двухпараметрическое семейство положений равновесия, принадлежащее неподвижному множеству. Однако в данной задаче геометрический интеграл не содержит произвольной постоянной. Поэтому размерность многообразия равновесий равна единице.

Исключим с помощью интегралов (6.3) переменные z_1 и r и будем рассматривать только изоэнергетические движения, на которых значение интеграла энергии равно значению на перманентном вращении. В результате для описания таких движений в переменных x_1, y_1, p, q получим обратимую систему вида (2.1) с $l=n=2$ и матрицами

$$\mathbf{A}=\left\| \begin{matrix} \alpha/\beta & \alpha \\ \dfrac{5[\beta^2-\alpha^2+\gamma(\beta^2-1)]}{\beta(6+\beta^2)} & \dfrac{6-5\alpha^2-\beta^2}{6+\beta^2} \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{B}=\left\| \begin{matrix} -\beta/\alpha & -\beta \\ -\dfrac{5[\alpha^2-\beta^2+\gamma(\alpha^2-1)]}{\alpha(6+\alpha^2)} & -\dfrac{6-\alpha^2-5\beta^2}{6+\alpha^2} \end{matrix} \right\|$$

причем в общем случае $\operatorname{rank}\mathbf{A}=\operatorname{rank}\mathbf{B}=2$.

Характеристическое уравнение

$$\xi \geqslant 2,\quad \lambda'(1)=0$$

$$S\lambda^4+G\lambda^2+F=0$$

$$S=(6+\alpha^2)(6+\beta^2)$$

$$G=S+36(1-\alpha^2)(1-\beta^2)-5\gamma[(6+\alpha^2)(1-\beta^2)+(6+\beta^2)(1-\alpha^2)]$$

$$F=(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(6+5\gamma)^2$$

имеет две пары чисто мнимых корней

$$\lambda_1=\pm\left[\frac{-G-\sqrt{G^2-4SF}}{2S}\right]^{1/2},\quad \lambda_2=\pm\left[\frac{-G+\sqrt{G^2-4SF}}{2S}\right]^{1/2}$$

если

$$G>2\sqrt{SF} \tag{6.4}$$

Последнее условие (6.4) выполняется тождественно, если вращение происходит вокруг наименьшей оси ($\alpha>1$, $\beta>1$), а при вращении вокруг наибольшей оси, если угловая скорость достаточно велика [16]

$$\gamma<\frac{1}{5}\left[\frac{\sqrt{(6+\alpha^2)(6+\beta^2)}-6\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}}{\sqrt{(6+\alpha^2)(1-\beta^2)}+\sqrt{(6+\beta^2)(1-\alpha^2)}}\right]^2$$

Из теоремы 1 следует, что в этих случаях всегда существует одно ляпуновское семейство периодических движений, примыкающее к перманентному вращению и отвечающее паре корней λ_1. В случае, когда $\lambda_1^2\neq\varkappa^2\lambda_2^2$ ($k\in\mathbb{N}$) существует также и второе семейство, отвечающее паре корней λ_2.

При вращении вокруг средней оси ($\alpha<1$, $\beta>1$) имеем $F\leqslant 0$, и характеристическое уравнение содержит пару чисто мнимых корней λ_1. Этим корням также отвечает примыкающее к перманентному вращению семейство ляпуновских периодических движений (теорема 1).

Предположим теперь, что эллипсоид вращения совершает перманентные вращения вокруг оси эллипсоида, не являющейся осью симметрии ($\alpha = 1$). В этом случае матрицы **A** и **B** примут вид

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix} 1/\beta & 1 \\ \dfrac{5(\beta^2-1)(1+\gamma)}{\beta(6+\beta)^2} & \dfrac{1-\beta^2}{6+\beta^2}\end{matrix}\right\|, \quad \mathbf{B}=\left\|\begin{matrix} -\beta & -\beta \\ \dfrac{5(\beta^2-1)}{7} & \dfrac{5(\beta^2-1)}{7}\end{matrix}\right\|$$

и при $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$ получим $\mathrm{rank}\mathbf{A} = 2$, $\mathrm{rank}\mathbf{B} = 1$. Значит, характеристическое уравнение имеет пару нулевых корней с одной группой решений и пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_*$[16].

$$\omega_*^2 = 1-5\gamma(1-\beta^2)/(6+\beta^2)$$

если

$$5\gamma(1-\beta^2)<(6+\beta^2) \tag{6.5}$$

Условие (6.5) выполняется при любой угловой скорости, если ось симметрии является наибольшей осью, в противном случае – при достаточно большой величине угловой скорости.

Уравнения возмущенного движения не содержат членов второго порядка относительно возмущений. Поэтому теорема 2 неприменима, и вопрос о существовании ляпуновского семейства в случае (6.5) остается открытым. Отметим, что здесь возникает интересная задача о существовании ляпуновского семейства в вырожденном, но достаточно типичном для механических систем случае.

В рассматриваемом случае уравнения возмущенного движения приводятся к виду (3.1). При этом в функции $Y_0(x)$ имеем $m = 3$, а коэффициент $g = 0$. Здесь лемма 2 неприменима, и установить существование постоянных вращений, в которых ось эллипсоида образует ненулевой угол с вертикалью, не удается. На самом деле таких вращений нет [17].

Суммируем полученные выводы.

Теорема 5. Пусть тяжелый однородный эллипсоид совершает на абсолютно шероховатой плоскости перманентные вращения вокруг одной из осей (с полуосью c), совпадающей с вертикалью, причем угловая скорость удовлетворяет условию $\omega^2 \neq 5g/(6c)$. Тогда при вращении вокруг наименьшей или средней оси или наибольшей оси, но с достаточно большой угловой скоростью $\omega > \omega^*$, к такому вращению всегда примыкает ляпуновское семейство периодических движений. При вращении вокруг наименьшей оси или наибольшей оси с $\omega > \omega^*$ имеем два таких семейства, если только выполнено условие нерезонансности.

Автор благодарит рецензента за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051, 97-01-00538) и программы "Университеты России – фундаментальные исследования" (1217).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
2. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 199–262; 1972. Т. 26. С. 199–239.
3. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
4. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
7. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны // Крылов А.Н. Собр. тр. Доп. к тт. V и VI. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. 248 с.
8. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
9. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
10. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
11. *Arnol'd V.I., Sevryuk M.B.* Oscillations and bifurcations in reversible systems // Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics. Moscow: Mir Publ., 1986. P. 31–64.
12. *Sevryuk M.B.* Reversible systems // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1986. V. 1211. 319 с.
13. *Тхай В.Н.* О поведении обратимой механической системы на границе области устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 707–712.
14. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова – Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 355–371.
15. *Маркеев А.П.* О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 372–382.
16. *Маркеев А.П.* К геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1982. С. 123–131.
17. *Тхай В.Н.* О неустойчивости перманентных вращений тяжелого однородного эллипсоида вращения на абсолютно шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 25–30.
18. *Карапетян А.В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19–24.

Москва

Поступила в редакцию
19.III.1999