УДК 531.01

© 2000 г. М.В. Дерябин

О ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ ДИРАКА И РЕАЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ МАЛЫМИ МАССАМИ

Рассматривается задача Дирака о гамильтоновом формализме систем со связями и реализации связей малыми массами [1, 2]. Показано, что при устремлении массы к нулю при определенных начальных условиях предельные движения существуют и совпадают с движениями гамильтоновой системы со связями. Полученные результаты используются в задаче о реализации односторонней голономной связи.

Известно, что для описания движения гамильтоновых систем со связями можно использовать так называемый "обобщенный гамильтонов формализм Дирака" [1, 2]. Проблема Дирака сводится к исследованию вариационной задачи Лагранжа [2, 3], при этом функция Лагранжа вырождена по скоростям. Было показано [2], что связь можно реализовывать малыми массами, а решения получающихся сингулярно возмущенных уравнений – искать в виде формальных разложений в ряд по степеням малого параметра.

Ниже показано, что при устремлении массы к нулю предельные движения существуют (при надлежащем выборе начальных условий), а указанные формальные ряды являются асимптотическими. Эти результаты применяются к задаче о реализации односторонней голономной связи упругими силами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, следуя известному подходу [2], гамильтонову систему на многообразии M размерности $2n$ с гамильтонианом

$$H = H_0(p,q,Q) + P^2/(2\varepsilon) + \varepsilon H_1(p,q,Q,\varepsilon) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, причем функция H_0 не вырождена по импульсам p. Здесь $\{p, q\} \in R^{2n-2}$. Предполагаем, что все функции – гладкие.

Связь задается равенством $P = 0$, и при этом должно выполняться условие совместности

$$\{P, H_0\} = -H_{0Q} = 0 \tag{1.2}$$

Пусть $Q = f(p, q)$ – решение уравнений (1.2). Было показано [2], что гамильтоновы уравнения Дирака со связью принимают вид

$$\dot{p} = -H^*_{0q}, \quad \dot{q} = H^*_{0p}, \quad P = 0, \quad Q = f \tag{1.3}$$

где $H^*_0(p,q) = H_0(p,q,Q)\big|_{Q=f}$. Будем предполагать, что

$$H_{0QQ}(p,q,Q)\big|_{Q=f} > 0 \tag{1.4}$$

Здесь и далее индексы Q, q, p и т.д. означают частные производные по соответствующим переменным.

2. Теорема о предельном переходе. Пусть p_0, q_0 – решения уравнений (1.3) – существуют на интервале времени $[0, T]$. Пусть p, q, P, Q – решение уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1.1). Предположим, что в начальный момент времени выполняются соотношения

$$|p(0)-p_0(0)|+|q(0)-q_0(0)|<\sqrt{\varepsilon},\quad |Q(0)-f(p_0(0),q_0(0))|<\sqrt{\varepsilon},\quad |P(0)|<\varepsilon \qquad (2.1)$$

Теорема. При достаточно малых ε на интервале $[0, T]$ выполняются оценки

$$Q-f(p_0,q_0)=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad P=O(\varepsilon),\quad |p-p_0|=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad |q-q_0|=O(\sqrt{\varepsilon})$$

Доказательство. Функцию H_0 гамильтониана (1.1) удобно разложить в ряд по степеням $(Q-f)$:

$$H_0=H_0^*(p,q)+\frac{1}{2}H_{0QQ}\Big|_{Q=f}(Q-f(p,q))^2+O(Q-f)^3+\ldots$$

$$H_0^*(p,q)=H_0(p,q,f(p,q))$$

Заметим, что $H_{0Q}\Big|_{Q=f}=0$, поскольку $Q=f(p,q)$ – решение уравнения (1.2).

Сделаем замену переменных с производящей функцией

$$S=p_1q+P_1(Q-f(p_1,q))$$

В новых переменных уравнения движения примут вид

$$\dot p_1=-H_{0q}^*(p_1,q_1)+O(P_1)+O(\varepsilon),\quad \dot q=H_{0p}^*+O(P_1)+O(\varepsilon)$$

$$\dot P_1=-H_{0QQ}Q_1+Q_1^2F_1(p_1,q_1,Q_1,\varepsilon)+P_1G_1(p_1,q_1,P_1,Q_1,\varepsilon)+O(\varepsilon) \qquad (2.2)$$

$$\dot Q_1=P_1/\varepsilon+g(p_1,q_1)+Q_1F_2(p_1,q_1,Q_1,\varepsilon)+P_1G_2(p_1,q_1,P_1,Q_1,\varepsilon)+O(\varepsilon)$$

где F, G, g – гладкие функции, которые определяются из замены переменных.

Обозначим $P^{(1)}=P_1/\sqrt{\varepsilon}$ и сделаем замену времени $\tau=t/\sqrt{\varepsilon}$:

$$p_1'=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad q_1'=O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$P^{(1)\prime}=-H_{0QQ}Q_1+Q_1^2F_1+O(\sqrt{\varepsilon}),\quad Q_1'=P^{(1)}+O(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (2.3)$$

Штрих означает производную по τ.

Система (2.3) – классическая система с быстрыми и медленными переменными, $\sqrt{\varepsilon}$ играет роль малого параметра. Вследствие неравенства (1.4) нулевое решение невозмущенной системы устойчиво. Можно воспользоваться общими результатами об эволюции возмущенных гамильтоновых систем [4]: существует постоянная K, такая, что на интервале $0\leqslant\tau\leqslant T/\sqrt{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$|P_1/\sqrt{\varepsilon}|+|Q_1|+|p_1-p_0|+|q_1-q_0|<K\sqrt{\varepsilon}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

3. Поиск решения в виде ряда по степеням малого параметра. Величины порядка единицы в правой части последнего уравнения системы (2.2) – это сумма двух слагаемых, одно из которых обращается в нуль при $P_1, Q_1=0$. Будем искать такую замену переменных, которая ликвидирует свободный член в правых частях последних двух уравнений системы (2.2). Начнем со свободного члена $g(p, q)$ порядка единицы

$$S=p_2q_1+(P_2-\varepsilon g(p_2,q_1))Q_1 \qquad (3.1)$$

В новых переменных уравнения (2.2) примут вид

$$\dot{p}_2 = -H^*_{0q}(p_2, q_2) + O(P_2) + O(\varepsilon), \quad \dot{q}_2 = H^*_{0p}(p_2, q_2) + O(P) + O(\varepsilon) \tag{3.2}$$

$$\dot{P}_2 = -H_{0QQ}Q_2 + Q_2^2\hat{F} + O(P_2) + O(\varepsilon), \quad \dot{Q}_2 = P_2/\varepsilon + O(Q_2) + O(P_2) + O(\varepsilon)$$

Здесь $\hat{F}$, как и в разд. 2, – гладкая функция переменных p_2, q_2, Q_2 и параметра ε. Теперь свободный член в двух последних уравнениях – величина порядка ε.

Сделаем те же замены, что и при доказательстве теоремы. Тогда система (3.2) примет вид

$$p_2' = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad q_2' = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad P^{(2)\prime} = -H_{0QQ}Q_2 + Q_2^2\hat{F} + \sqrt{\varepsilon}O(P^{(2)}) + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$Q_2' = P^{(2)} + \sqrt{\varepsilon}O(Q_2) + \varepsilon O(P^{(2)}) + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{3.3}$$

Будем считать, что начальные условия удовлетворяют равенствам (2.1), поэтому переменные p, q ограничены, а P, Q – малы. Сделаем следующие оценки (ср. с [4]): введем функцию

$$Z = \frac{1}{2}({P^{(2)}}^2 + H_{0QQ}Q_2^2) - \int_0^{Q_2} \tilde{Q}^2\hat{F}(\tilde{Q})d\tilde{Q}$$

В силу сказанного в разд. 2, $Z = O(\varepsilon)$ на временах порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$.

Можно проверить, что для производной функции Z по времени τ в силу системы (3.3) справедлива оценка

$$Z' \leqslant M\sqrt{\varepsilon}Z + N\varepsilon^{3/2}\sqrt{Z} \tag{3.4}$$

где M, N – положительные постоянные. Действительно, так как $Z = O(\varepsilon)$, то $Z^{1+\alpha} \leqslant Z$, $\alpha \geqslant 0$, а следовательно, все высшие степени P, Q мажорируются функцией Z (домноженной, быть может, на какую-нибудь постоянную). Решая неравенство (3.4), получим

$$\int_0^{T/\sqrt{\varepsilon}} \frac{dZ}{MZ + N\varepsilon\sqrt{Z}} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\sqrt{\varepsilon}} d\tau$$

$$M\sqrt{Z\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + N\varepsilon \leqslant \left(M\sqrt{Z(0)} + N\varepsilon\right)\exp\frac{T}{2}$$

Поэтому, если в начальный момент функция Z была порядка ε^2, то и на всем интервале времени $\tau \in [0, T/\sqrt{\varepsilon}]$ она будет того же порядка. Возвращаясь к переменным $P^{(2)}$, Q_2, получаем, что они – величины порядка ε. Это означает, что для исходной системы (1.1) $P = -\varepsilon g(p, q) + O(\varepsilon^{3/2})$, $Q = f(p, q) + O(\varepsilon)$ – решение. Но выписанные члены – первые члены степенного ряда [2], что можно проверить непосредственной подстановкой.

Делая далее замены, аналогичные замене (3.1), последовательно устраняем свободные члены. Пусть в предпоследнем уравнении системы (3.2) свободный член порядка ε равен $\varepsilon g_1\ (p, q)$. Замена с производящей функцией

$$S = p_3q_2 + P_3(Q_2 - \varepsilon g_1(p_3, q_2)/H_{0QQ}(p_3, q_2))$$

устраняет свободный член порядка ε в предпоследнем уравнении системы (3.2). В последнем уравнении (3.2) свободный член по-прежнему имеет порядок ε. Пусть он равен $\varepsilon g_2\ (p, q)$, тогда его устраняет замена

$$S = p_4q_3 + \left(P_4 - \varepsilon^2 g_2(p_4, q_3)\right)Q_3$$

и так далее. При этом будем получать оценки, аналогичные (3.4), только степень ε во втором слагаемом (3.4) будет расти: на k-м шаге эта степень будет равна $(2k + 1)/2$, а следовательно, $P^{(k)}$, Q_k – величины порядка ε^k. В исходных переменных получаем требуемый степенной ряд.

Замечание. Полученный ряд, как правило расходится, так как в общем случае нельзя избавиться от свободного члена [5]. В случае, когда все функции – аналитические, заменами координат свободный член можно сделать величиной порядка $\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$. Необходимо отметить, что в описанной выше процедуре, для того чтобы избавиться от очередного свободного члена порядка ε^k, делаем две последовательные замены (ср. с [5]).

4. Реализация односторонней связи. Рассмотрим задачу о реализации односторонней голономной связи упругими силами с большим коэффициентом упругости [6, 7]. Пусть "свободная" система задается гамильтонианом

$$H = H_0(p,q,Q) + a(q,Q)P^2/2 + NV(Q) \tag{4.1}$$

$$V(Q) = \begin{cases} Q^2/2, & Q \leqslant 0 \\ 0, & Q > 0 \end{cases}, \quad N \gg 1$$

Здесь p, P, q, Q – полугеодезические координаты, в которых односторонняя связь задается условием $Q \geqslant 0$, а квадратичная форма кинетической энергии не содержит произведений p и P. Известно [8], что такие координаты локально всегда существуют. Для простоты будем полагать, что они введены глобально (ср. с [9, 10]).

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{p} = -H_{0q} - a_q P^2/2, \quad \dot{q} = H_{0p}, \quad \dot{Q} = aP \tag{4.2}$$

$$\dot{P} = -H_{0Q} - a_Q P^2/2 - NQ, \quad Q \leqslant 0; \quad \dot{P} = -H_{0Q} - a_Q P^2/2, \quad Q > 0.$$

Пусть на интервале времени $[0, T]$ система с односторонней связью двигалась по связи, причем при $t \in [0, T)$ реакция связи положительна, а в момент времени $t = T$ происходит сход со связи, причем реакция соответствующей системы с двусторонней связью имеет простой нуль [7, 10].

Решение системы (4.2) на интервале времени $[0, T]$, как правило, колеблется с амплитудой $1/N$ [7]. При исследовании реальной системы приходится отдельно решать уравнения движения в полупространствах $Q < 0$ и $Q > 0$, а затем склеивать решения. Покажем, что при надлежащем выборе начальных условий "свободной" системы (4.2) из $(1/N)$ – окрестности начальных условий соответствующей системы с односторонней связью на любом интервале времени $[0, T_1] \in [0, T)$ движение происходит в области $Q < 0$, а амплитуда осцилляций при этом – величина $O(N^{-3/2})$ при достаточно больших значениях параметра N.

Рассмотрим вначале реализацию двусторонней связи, т.е. положим потенциальную энергию упругой силы $V(Q)$ всюду равной $Q^2/2$. При $t \in [0, T)$ реакция положительна, а следовательно, $H_{0Q} > 0$.

Положим $\varepsilon = 1/N$ и сделаем каноническую замену переменных с производящей функцией

$$S = \hat{p}q + \hat{P}(Q + \varepsilon H_{0Q}(\hat{p}, q, Q))$$

В новых переменных уравнения движения примут вид, аналогичный (2.2) с точностью до замены P на Q, поэтому можно применять метод, аналогичный изложенному в разд. 3 (ср. с [9]). В частности, получаем, что при надлежащем выборе начальных условий

$$Q=-\varepsilon H_{0Q}+O(\varepsilon^{3/2})$$

а сопряженный импульс будет величиной порядка ε.

Замечание. Ясно, что полученные здесь оценки не противоречат теореме [9], в которой начальные условия для P и Q, вообще говоря, могли быть любыми из ε-окрестности нуля. "Уточненные" начальные условия физически соответствуют тому, что точку положили на упругую поверхность, подождали, пока поверхность прогнулась, а только затем толкнули точку.

Координата Q обращается в нуль, когда $H_{0Q}=O(\sqrt{\varepsilon})$. Таким образом, получили, что на интервале времени $\left[0,T+O(\sqrt{\varepsilon})\right)$ движение происходит в полупространстве $Q<0$. Необходимо заметить, что здесь величины порядка $\sqrt{\varepsilon}$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Вернемся к задаче о реализации односторонней связи. Пусть в начальный момент времени реакция положительна, т.е. $H_{0Q}>0$. Для любого наперед заданного $0<T_1<$ $<T$ существует такое ε, что $[0,T_1]\in\left[0,T+O(\sqrt{\varepsilon})\right)$. Но на интервале $\left[0,T+O(\sqrt{\varepsilon})\right)$ движение "свободной" системы (4.2) также будет происходить в полупространстве $Q<0$, и амплитуда колебаний около "равновесия" $Q=-\varepsilon H_{0Q}$ будет не более чем $O(\varepsilon^{3/2})$. Далее на интервале времени порядка $\sqrt{\varepsilon}$ величина Q может осциллировать, а потом становится положительной.

Автор благодарит А.И. Нейштадта за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01096).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dirac, P.A.M.* On generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. 1950. V. 2. № 2. P. 129–148.
2. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундамент. направл. Динам. сист. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
3. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
4. *Lebovitz N.R., Naishtadt A.* Slow evolution in perturbed Hamiltonian systems // Stud. Appl. Math. 1994. V. 92. № 2. P. 127–144.
5. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067.
6. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
7. *Дерябин М.В.* О реализации неудерживающих связей // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 136–140.
8. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
9. *Дерябин М.В.* Общие принципы динамики и теория односторонних связей // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1998. № 1. С. 53–59.
10. *Козлов В.В., Нейштадт А.И.* О реализации голономных связей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 858–861.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.1999