УДК 531.36:62-50

© 2000 г. В.А. Вуйичич, А.М. Ковалев

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методом ориентированных многообразий [1] получен критерий управляемости нелинейных механических систем общего вида. Для систем, линейных по управлению, вопрос об управляемости сведен к анализу разрешимости системы уравнений в частных производных специального вида, типичного для метода инвариантных соотношений и метода функций Ляпунова. При совпадении числа управлений с числом степеней свободы на примере конкретных систем с двумя степенями свободы рассматривается случай вырождения матрицы коэффициентов при векторе управления в уравнениях движения. В связи с обсуждением свойства [2] полной управляемости классов механических систем предлагаются постановки задач, в которых ослабление свойства робастности управления (допускается лишь варьирование постоянных параметров) дает возможность получить новые классы управляемых систем. Исследуется важный для механики случай декомпозируемости уравнений движения на кинематические и динамические, и доказана теорема, устанавливающая связь между управляемостью линейной системы и ее динамической подсистемы. Приводятся примеры. Рассматривается задача управления угловой скоростью и ориентацией твердого тела при помощи одного реактивного двигателя, для решения которой применяется метод ориентированных многообразий и метод декомпозиции.

1. Управляемость голономных механических систем. Движение управляемой голономной склерономной механической системы с n степенями свободы будем описывать в канонических переменных Гамильтона p, q

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i, \quad i = 1,\dots,n \tag{1.1}$$

$$H = \frac{1}{2}a^{ij}(q)p_i p_j + \Pi(q), \quad Q_i = Q_i(q,p,u)$$

где $H = H(q, p)$ – функция Гамильтона, Q_i – обобщенные непотенциальные силы, зависящие от m-мерного вектора управления $u \in U$, канонические переменные (q, p) принадлежат области $D \subseteq T^*M$ кокасательного многообразия T^*M, время t изменяется на промежутке $T \subseteq [0, \infty)$. Функции Π, a^{ij}, Q_i считаем достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов. В ряде задач будут рассмотрены ограничивающие множества U, содержащие достаточно большие (по модулю) управления. В этих случаях будем говорить, что система обладает достаточно большими ресурсами управления. Отметим, что производная по времени от функции $V(q, p)$, заданной на решениях системы (1.1), определяется формулой

$$\frac{dV}{dt} = [V,H] + \left(\frac{\partial V}{\partial p}, Q\right)$$

Рассмотрим управляемость системы (1.1) в классической постановке как свойство системы, обеспечивающее существование допустимого управления, под действием которого система переходит из произвольно заданного начального в произвольно заданное конечное состояние движения. Для исследования применим метод [1], основанный на понятии ориентированного многообразия (ОМ).

Определение 1. Многообразие $K \subset D$ будем называть ориентированным относительно системы (1.1) в области D, если оно совпадает со своей положительной ($K = \mathrm{Or}^+K$) или отрицательной орбитой ($K = \mathrm{Or}^-K$). Положительной орбитой Or^+K множества K называется совокупность точек, достижимых из множества K по траекториям системы (1.1), отрицательной орбитой Or^-K – совокупность точек, из которых может быть достигнуто множество K.

Необходимые и достаточные условия управляемости системы (1.1) дает следующая теорема [1].

Теорема 1. Система (1.1) управляема в области D тогда и только тогда, когда отсутствуют ориентированные относительно системы многообразия N с гладкой границей, такие, что $N \neq \emptyset, D$.

Условие ориентированности означает, что для ОМ полной размерности $k = 2n$ вектор $\partial H/\partial p$ и ковектор $(-\partial H/\partial q + Q)$ системы (1.1) в точках его границы направлены в одну сторону от него (во внешность, либо во внутренность), а для ОМ неполной размерности $k < 2n$ координаты $\dot{q}, \dot{p}$ фазовой скорости принадлежат кокасательному многообразию в его внутренних точках и направлены в одну от него сторону в точках его границы. С использованием этого свойства теорема 1 позволяет свести исследование управляемости системы (1.1) к изучению разрешимости системы линейных уравнений в частных производных первого порядка.

Теорема 2. Механическая система (1.1) управляема в области D тогда и только тогда, когда система уравнений в частных производных

$$[V_0, H] + \left(Q, \frac{\partial V_0}{\partial p}\right) = \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda_{0j}(q,p,u)V_j + G(q,p,u) \tag{1.2}$$

$$[V_i, H] + \left(Q, \frac{\partial V_i}{\partial p}\right) = \sum_{j=1}^{2n-1} \lambda_{ij}(q,p,u)V_j, \quad i = 1,\dots,2n-1$$

где $G(q, p, u)$ – знакопостоянная в области $D \times U$ функция, а функция $\lambda_{ij}(q, p, u)$ не содержит особенностей в области $D \times U$, не имеет в области D обращающихся в нуль решений $V_j(q, p)$.

Необходимость утверждения теоремы следует из того, что, задавая гладкую границу ОМ уравнениями $V_i(q, p) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, 2n - 1$), с использованием свойства ориентированности получаем, что функции V_i удовлетворяют уравнениям (1.2).

Доказательство достаточности сводится к тому, что существование решения $V_i(q, p)$ ($i = 0, 1, \dots, 2n - 1$) приводит к наличию ОМ, граница которого определяется уравнениями $V_i(q, p) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, 2n - 1$), что в силу теоремы 1 приводит к неуправляемости.

2. Системы, линейные по управлению. Теорема 2 сводит решение вопроса об управляемости системы (1.1) к изучению существования решения системы дифференциальных уравнений (1.2). Последняя задача осложняется тем, что данные уравнения содержат управляющий параметр u, который может принимать любые значения из множества U. В случае, когда система (1.1) линейно зависит от управления

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + f_i + \sum_{s=1}^{m} g_{is}u^s, \quad i = 1,\dots,n \tag{2.1}$$

вместо уравнений (1.2) удается получить систему дифференциальных уравнений, не содержащую управления. Здесь $f_i(q, p)$, $g_{is}(q, p)$ предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов. Кроме того, считаем, что множество U содержит нуль в качестве внутренней точки.

Теорема 3. Механическая система (2.1) при достаточно больших ресурсах управления управляема в области D тогда и только тогда, когда система уравнений в частных производных

$$[V_0, H] + \left(f, \frac{\partial V_0}{\partial p} \right) = \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda_{0j} V_j + G_0(q, p)$$

$$[V_i, H] + \left(f, \frac{\partial V_i}{\partial p} \right) = \sum_{j=1}^{2n-1} \lambda_{ij} V_j, \quad i = 1, \ldots, 2n-1 \tag{2.2}$$

$$\left(g_s, \frac{\partial V_l}{\partial p} \right) = \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda_{ljs} V_j, \quad l = 0, 1, \ldots, 2n-1, \quad s = 1, \ldots, m$$

$$f = (f_1, \ldots, f_n)^T, \quad g_s = (g_{1s}, \ldots, g_{ns})^T$$

где $G_0(q, p)$ – знакопостоянная в области D функция, а функции λ_{ij}, λ_{ljs} не содержат особенностей в области D, $\lambda_{l0s} = 0$ для $l > 0$, не имеет в области D обращающихся в нуль решений $V_j(q, p)$.

Доказательство. Необходимость докажем рассуждением от противного. Пусть вопреки утверждению теоремы система (2.2) имеет решение $V_i = V_i(q, p)$, $i = 0, \ldots$ $\ldots, 2n - 1$. Умножим последнюю группу уравнений (2.2) на u^s и просуммируем по s от 1 до m. Полученную сумму для $l = 0$ прибавим к первому уравнению, а для $l = 1, \ldots$ $\ldots, 2n - 1$ – к первой группе уравнений (2.2). В результате получим, что функции V_i определяют решения системы (1.2), в которой

$$Q_i = f_i + \sum_{s=1}^{m} g_{is} u^s, \quad \lambda_{ij}(q, p, u) = \lambda_{ij} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_{ijs} u^s, \quad G(q, p, u) = G_0(q, p)$$

На основании теоремы 2 заключаем, что система (2.1) неуправляема, что противоречит условию и доказывает необходимость.

Достаточность докажем также рассуждением от противного. Пусть вопреки утверждению теоремы система (2.2) неуправляема в области D. Тогда на основании теоремы 2 система (1.2) для

$$Q_i = f_i + \sum_{s=1}^{m} g_{is} u^s$$

имеет решение $V_j = V_j(q, p)$ ($j = 0, 1, \ldots, \alpha$, $\alpha \leqslant 2n - 1$), причем V_j, а также λ_{ij}, G – достаточное число раз дифференцируемые функции своих аргументов. Полагая в уравнениях (1.2) $u^s = 0$, получаем, что данные функции V_j удовлетворяют первому уравнению и первой группе уравнений (2.2), в которых $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(q, p, 0)$, $G_0(q, p) = G(q, p, 0)$. Поскольку область U может быть выбрана достаточно большой, то существует точка $u_0 \in U$, в которой знакопостоянная функция $G(q, p, u)$ принимает экстремум. В окрестности точки u_0 справедливы разложения

$$G(q, p, u) = G(q, p, u_0) + \sum_{ij=1}^{m} G_{ij}(q, p, u_0)(u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j + \ldots \lambda_{ij}(q, p, u)) = \lambda_{ij}(q, p, u_0) + \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \lambda_{ijs}(q, p, u_0)(u^s - u_0^s) + \ldots$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости.

Подставляя выражения (2.3) в уравнения (1.2), получаем

$$[V_0, H] + \left(f + \sum_{s=1}^{m} g_s u_0^s, \frac{\partial V_0}{\partial p} \right) - \sum_{j=0}^{\alpha} \lambda_{0j}(q, p, u_0) V_j - G(q, p, u_0) + \tag{2.4}$$

$$+ \left(\sum_{s=1}^{m} g_s (u^s - u_0^s), \frac{\partial V_0}{\partial p} \right) - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{0js}(q, p, u_0)(u^s - u_0^s) V_j + \ldots = 0$$

$$[V_i, H] + \left(f + \sum_{s=1}^{m} g_s u_0^s, \frac{\partial V_i}{\partial p} \right) - \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_{ij}(q, p, u_0) V_j + \left(\sum_{s=1}^{m} g_s (u^s - u_0^s), \frac{\partial V_i}{\partial p} \right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{ijs}(q, p, u_0)(u^s - u_0^s) V_j + \ldots = 0$$

Поскольку уравнения (1.2) выполнены в точке $u = u_0$ и переменные u^s произвольны, из уравнений (2.4) следует

$$\left(g_s, \frac{\partial V_l}{\partial p} \right) = \sum_{j=0}^{\alpha} \lambda_{ljs}(q, p, u_0) V_j, \quad l = 0, 1, \ldots, \alpha$$

где $\lambda_{l0s} = 0$ для $l > 0$, т.е. функции V_j удовлетворяют и последней группе уравнений (2.2). Таким образом, установлено, что система (2.2) допускает решение $V_j = V_j(q, p)$, что противоречит условию и доказывает теорему.

Замечание 1. Условие теоремы 3 о возможности модуля управления принимать достаточно большие значения весьма существенно, и его нарушение может привести к неуправляемости системы. Так, для системы $\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u$ ($x \in R^n, u \in R^1$) при условии $\lambda_i \neq \lambda_j$ выполнен критерий Калмана, и данная система управляема. Однако при ограничениях

$$\lambda_i > 1, x \in D = \{x : \| x \| < R, R > 2\}, \quad u \in U = \{u : -1 < u < 1\}$$

рассматриваемая система неуправляема в области D (при $u \in U$) ввиду очевидной оценки $\dot{x}_i > 0$ для $x_i > 1$ и любых $u \in U$. С другой стороны, это условие не является необходимым: управляемая по Калману система $\dot{x} = Ax + Bu$ в случае, когда собственные числа матрицы A чисто мнимые, управляема в любом шаре $\|x\| < R$ при сколь угодно малых управлениях $\|u\| < \varepsilon$ [3].

3. Случай полного управления ($m = n$). Для случая полного управления, когда размерность управления совпадает с размерностью координатного пространства $m = n$, пользуясь теоремой 3 и кинематическими свойствами голономных систем, можно получить простые достаточные условия управляемости. В качестве иллюстрации приведем следующую теорему, вытекающую из результатов работы [2].

Теорема 4. Пусть $m = n$ и $\det\|g_{is}\| \neq 0$ в области D. Тогда система (2.1) при достаточно больших ресурсах управления управляема в области D.

Доказательство. На основании теоремы 3 достаточно показать, что при выполнении условий теоремы 4 система (2.2) не имеет обращающихся в нуль решений. Если такое решение существует, то из последней группы уравнений (2.2) следует [4, 5], что системы уравнений $\dot{q} = 0$, $\dot{p} = g_s(q, p)$ ($s = 1, \ldots, n$) имеют общее инвариантное многообразие M, определяемое уравнениями $V_j = 0$ ($j = 0, 1, \ldots, \alpha$, $\alpha \leqslant 2n - 1$). Поскольку в каждой точке многообразия M нормаль к нему ортогональна векторам скорости $(0, g_s(q, p))$ и выполнено условие $\det\|g_{is}\| \neq 0$, то получаем $\partial V_j / \partial p = 0$, т.е. $V_j = V_j(q)$. Оставшиеся уравнения (2.2) принимают вид

$$[V_0, H] = \sum_{j=0}^{\alpha} \lambda_{0j} V_j + G_0(q, p), \quad [V_i, H] = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_{ij} V_j, \quad i = 1, \ldots, \alpha \tag{3.1}$$

Из уравнений (3.1) следует, что многообразие M является ОМ для гамильтоновой системы с функцией $H(q, p)$. В силу свойства $V_j = V_j(q)$ многообразие M является цилиндрическим, образующая которого совпадает с пространством импульсов. Поэтому в точках $(g_0, p) \in M$ при любых p из области значений нормаль к многообразию M одна и та же. Из определения голономных механических систем следует, что в каждой точке q конфигурационного пространства векторы скорости $\dot{q}$ могут принимать любое направление. В силу взаимной однозначности отображения $\dot{q} \to p$ отсюда следует, что при изменении p в любой сколь угодно малой окрестности соответствующие скорости $\dot{q}$ могут принимать любое направление. Поэтому для нормали n к многообразию M в любой точке (q_0, p_0) существуют точки $(q_0, p) \in M'$ с той же нормалью n, в которых проекция скорости $\dot{q} = \partial H/\partial p$ на нормаль n принимает как положительные, так и отрицательные значения. Это означает, что многообразие M не может быть ориентированным и уравнения (3.1), а значит и уравнения (2.2), не имеют в области D обращающихся в нуль решений.

Замечание 2. Доказательство этой теоремы можно провести различными методами. Так, в работе [2] оно выполнено с использованием разрывных управлений специального вида и основано на теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. При условии $m = n$ система (2.1) является системой "треугольного вида", и можно показать, что при выполнении условий теоремы для нее выполнены достаточные условия управляемости [4, 6]. Представляет интерес доказательство этой теоремы методом обратных задач. С учетом однозначности отображения $\dot{q} = a^T p$ достаточно получить выражение вектора управления через вектор координат и его производные. Дифференцируя по времени первую группу уравнений (2.1), находим

$$\ddot{q}_i - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} + f_j \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \dot{q}_j \right] = \sum_{s,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} g_{js} u^s, \quad i = 1,\dots,n \tag{3.2}$$

Здесь вместо импульсов p_i подставлены их выражения через q, $\dot{q}$ по формулам $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. В силу того, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\| = \left\| a^{ij} \right\| \neq 0$$

и по условию $\det\|g_{is}\| \neq 0$, с истема у равнений (3.2) однозначно р азрешима о тносительно управлений $u_s = u_s(q, \dot{q}, \ddot{q})$. Для заданных граничных значений (q_0, p_0), (q_1, p_1) из первой группы уравнений (2.1) находим $\dot{q}_0$, $\dot{q}_1$. Выбирая произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{q}(t)$, удовлетворяющую условиям $\tilde{q}(t_0) = q_0$, $\tilde{q}(t_1) = q_1$, $\dot{\tilde{q}}(t_0) = \dot{q}_0$, $\dot{\tilde{q}}(t_1) = \dot{q}_1$, определяем функции $\tilde{u}_s(t) = u_s(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \ddot{\tilde{q}}(t))$, которые дают решение поставленной граничной задачи. Отметим, что кроме доказательства управляемости отсюда следует и доказательство функциональной управляемости по $q \in C^2$, т.е. возможности реализации для системы (2.1) любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $q(t)$ (выбором соответствующего управления $u(t)$).

Условие $\det\|g_{ij}\| \neq 0$ не является необходимым, при его нарушении система может быть как управляемой, так и неуправляемой, что показывают следующие два примера, при решении которых использованы безразмерные переменные.

Пример 1. Рассмотрим управляемость системы

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = q_1 p_2 + q_1 u_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = q_2 p_1 + u_2 \tag{3.3}$$

при ограничениях

$$q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 < r^2, \quad u_1^2 + u_2^2 < r_u^2 \tag{3.4}$$

Достаточное условие теоремы 4 не выполнено, так как определитель $\det\|g_{ij}\| = q_1$ может обращаться в нуль в области D. Однако можно проверить, что система (3.3) имеет инвариантное многообразие, определенное соотношениями $q_1 = 0, p_1 = 0$, т.е. функции $V_0 = q_1$, $V_1 = p_1$ – решения системы (2.2) с $G_0 = 0$. Отсюда на основании теорем 2, 3 следует неуправляемость системы (3.3) в рассматриваемой области.

Пример 2. Рассмотрим управляемость системы

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = q_1 p_2 + u_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = q_2 p_1 + q_1 u_2 \tag{3.5}$$

при ограничениях (3.4).

Запишем для системы (3.5) уравнения (2.2), приняв $g_1 = (0, 0, 1, 0)$, $g_2 = (0, 0, 0, q_1)$. Получим

$$FV_i = \sum_{j=0}^{3} \lambda_{0j} V_j + G_0, \quad FV_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} V_j, \quad i = 1,2,3 \tag{3.6}$$

$$\left(F = p_1 \frac{\partial V_i}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial V_i}{\partial q_2} + q_1 p_2 \frac{\partial V_i}{\partial p_1} + q_2 p_1 \frac{\partial V_i}{\partial p_2} \right)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial p_1} = \sum_{j=0}^{3} \lambda_{ij1} V_j, \quad q_1 \frac{\partial V_i}{\partial p_2} = \sum_{j=0}^{3} \lambda_{ij2} V_j, \quad i = 0,1,2,3$$

Как и в предыдущем примере, имеем $\det \| q_{ij} \| = q_1$. Если $\det \| q_{ij} \| \neq 0$, система (3.6) не имеет обращающихся в нуль решений. Остается проверить, допускает ли система (3.6) решение V_0, V_1, V_2, V_3, содержащее функцию $V_1 = q_1$. Подставляя функцию V_1 во вторую группу уравнений (3.6), находим

$$p_1 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{1j} V_j$$

Отсюда следует, что существует еще одна функция $V_2 = p_1$ и $\lambda_{12} = 1$, а остальные $\lambda_{1j} = 0$. Подставляя функцию V_2 в третью группу уравнений (3.6), получаем

$$1 = \sum_{j=0}^{3} \lambda_{2j1} V_j$$

Отсюда следует, что система (3.6) обращающихся в ноль решений не имеет, и система (3.5) управляема.

4. Об управляемости классов механических систем. С целью упрощения решения проблемы управляемости конкретной механической системы в условиях неполной информации о действующих силах и параметрах было введено [2] понятие управляемости классов механических систем. Условие управляемости класса гарантирует сохранение этого свойства при вариациях параметров и сил, т.е. имеет робастный характер, что позволяет выявить общие закономерности, свободные от индивидуальных особенностей конкретной системы. Класс систем в [2] задается множествами U, D_0 значений управлений и обобщенных сил и числами $b_0, \lambda_0, \lambda_1$, характеризующими кинетическую энергию и матрицу при векторе управления в управлениях движения. Выделен простейший класс, описываемый уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = u_i(t), \quad |u_i| \leq h_i, \quad i = 1,\ldots,n \tag{4.1}$$

для которого установлено, что он является полностью управляемым тогда и только тогда, когда

$$h_0 = \min_{1 \leq i \leq n} h_i > 0$$

Анализируя свойства систем этого класса, укажем два наиболее замечательных: 1) системы этого класса управляемы сколь угодно малыми управлениями, 2) свойство управляемости не зависит от свойств системы (от выражения кинетической энергии), т.е. ограничения на класс минимальны.

Далее, были рассмотрены [2] обобщения этого класса, когда правые части уравнений (4.1) имеют вид

а) $Q_i(q,\dot{q},t)+u_i$

б) $Q_i(q,\dot{q},t)+\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}(q,\dot{q},t)u_k(t)$

Условия управляемости этих классов включают условие, обеспечивающее выбор такого управления, которое не только компенсирует обобщенные силы, но и гарантирует наличие ресурса, обеспечивающего полную управляемость, а для классов *б* – еще условие

$$\det \| b_{ij}(q,\dot{q},t) \| \neq 0,\ (q,\dot{q}) \in R^{2n},\ \ t \geqslant t_0 \tag{4.2}$$

Сравнивая эти классы с простейшим, отметим, что они уже не обладают свойством управляемости малыми управлениями, а для класса *б* возникает дополнительное условие (4.2). Потеря первого свойства представляется весьма существенной с точки зрения приложений, в то же время условие (4.2) не является столь уж ограничительным, если задачу описания классов рассматривать в некоторых пространствах, в простейшем случае – в пространстве параметров, задающих кинетическую энергию и обобщенные силы. Тогда простейший класс описывается многообразием $Q(q,\dot{q},t)=0$, а условие (4.2) выделяет некоторую область (полной меры), в которой параметры могут изменяться произвольно.

Рассмотрение классов *а, б* совместно с простейшим классом приводит к постановке задачи нахождения классов управляемых механических систем, для которых гарантируется сохранение свойства управляемости при вариациях параметров на некоторых многообразиях (для простейшего класса это многообразие $Q = 0$, для класса *б* – область, выделяемая условием (4.2)). Решение этой задачи может быть получено методами теории управления систем с ограничениями на управление. При этом условия управляемости дают описание классов (в соответствующих пространствах). Так, для линейных механических систем и, более общих, линейных динамических систем описание класса систем, управляемых сколь угодно малыми управлениями, дает следующая теорема [3].

Теорема 5. Система

$$\dot{x}=Ax+bu,\ \ x\in R^n,\ \ u\in R^1,\ \ |u|<u_0$$

управляема тогда и только тогда, когда det $(b, Ab,\ldots, A^{n-1}b) \neq 0$ и все собственные значения матрицы A чисто мнимые (в том числе и нулевые), при этом значение u_0 может быть принято сколь угодно малым.

Для систем, линейных по управлению, такая задача может быть решена с использованием теоремы 3, а для нелинейных систем общего вида – теоремы 2. Заметим, что в такой постановке задачи об управляемости классов механических систем условие совпадения размерности управления с размерностью координатного пространства ($m = n$) перестает быть необходимым условием управляемости, а решающее значение приобретают свойства "собственно" управляемости, позволяющие воздействовать желаемым образом на многомерную систему управлением меньшей размерности, даже одномерным, как в теореме 5.

5. Управляемость декомпозируемых систем. Нелинейность, большая размерность, взаимосвязь между различными степенями свободы, характерные для механических систем, описывающих современные технические объекты, существенно затрудняют исследование их динамических свойств, в том числе управляемости. При разработке методов управляемости весьма эффективными оказались идеи декомпозиции, основное содержание которых состоит в сведении исследования системы высокого порядка к исследованию нескольких систем меньшего порядка путем разделения исходной системы на независимые подсистемы, либо введением некоторой иерархической структуры.

Одной из реализаций первого подхода для механических систем является принцип декомпозиции [7]. В теории управления динамических систем задача декомпозиции хорошо изучена в общей постановке, достаточно полное представление о которой дает работа [8]. Анализируя с этих позиций управляемые механические системы, можно отметить их исходную декомпозированность относительно управлений. Уравнения движения механических систем естественным образом делятся на кинематические или кинетические (не содержащие управления) и динамические уравнения, зависящие от управлений. Для канонических переменных это, соответственно, первая и вторая группа уравнений (1.1). Еще более простую структуру имеют уравнения в лагранжевых переменных

$$\dot{q}^i = v^i,\ \dot{v}^i = F^i(t, q, v, u),\ i = 1, \dots, n \tag{5.1}$$

С целью упрощения исследования в механике часто вводят и другие группы переменных, сохраняя при этом деление уравнений на динамические и кинематические. Классическим примером являются уравнения Эйлера – Пуассона движения твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести, когда в качестве динамических переменных приняты проекции на подвижные оси вектора угловой скорости тела, а в качестве кинематических переменных можно принять либо направляющие косинусы вертикали, либо углы Эйлера.

Более глубокая декомпозиция возникает в случае, когда динамические уравнения не зависят от кинематических переменных, и возникает иерархическая структура. Исследование управляемости полной системы начинается с решения более простой задачи управляемости ее динамической подсистемы, которая, зачастую, имеет важное самостоятельное значение. Теоретический и практический интерес представляет вопрос о связи свойств управляемости полной системы и ее динамической подсистемы. Полное решение этого вопроса можно получить для линейных склерономных систем типа (5.1), основываясь на следующей теореме.

Теорема 6. Механическая система

$$\dot{q} = v,\ \dot{v} = Av + Bu\ (q, v) \in R^{2n}, u \in R^m \tag{5.2}$$

управляема тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\det B \neq 0$.

Доказательство. Необходимость докажем рассуждением от противного. Пусть, вопреки утверждению, либо $m < n$, либо $\det B = 0$. Тогда существует ненулевой вектор c, ортогональный векторам $b_1, \dots, b_m$, где $B = (b_1, \dots, b_m)$. Для линейной функции $V = (v - Aq)^T c$ выполнено равенство $\dot{V} = 0$. Это означает, что функция V является интегралом системы (5.2) и, значит, система (5.2) неуправляема, что противоречит условию и доказывает необходимость.

Достаточность следует из того, что при выполнении условий теоремы система (5.2) имеет "треугольный вид" и для нее выполнены достаточные условия управляемости [4, 6]. Можно также воспользоваться критерием Калмана, который применительно к системе (5.2) приводит к условию

$$\det \begin{Vmatrix} 0 & B \\ B & AB \end{Vmatrix} = (-1)^n (\det B)^2 \neq 0$$

При выполнении условий теоремы 6 ее динамическая подсистема управляема. Однако только управляемости динамической подсистемы недостаточно для управляемости полной системы: должны быть выполнены условия теоремы 6. Требование полноты управления $m = n$ является очень жестким и необязательно для линейных подсистем с общими кинематическими уравнениями, возникающими в теории возмущений механических систем при изучении колебаний, вопросов устойчивости и др., т.е. для подсистем вида

$$\dot{q} = Cq + Dp, \quad \dot{p} = Ap + Bu, \quad (q, p) \in R^{2n}, \quad u \in R^m \tag{5.3}$$

В качестве примера рассмотрим две механических системы с двумя степенями свободы, используя безразмерные переменные.

Пример 3. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы с обобщенными координатами q_1, q_2, обобщенными скоростями v_1, v_2, кинетической энергией $T = (v_1^2 + v_2^2)/2$ и обобщенными силами $Q_1 = v_2$, $Q_2 = u$, где u – управление. Уравнения движения запишем в виде

$$\dot{q}_1 = v_1, \; \dot{q}_2 = v_2, \; \dot{v}_1 = v_2, \; \dot{v}_2 = u \tag{5.4}$$

Динамическая подсистема управляема. Полная система неуправляема, так как $m = 1 < 2 = n$. Причиной неуправляемости является наличие интеграла $V = v_1 - q_2 = \mathrm{const}$. Отметим, что ранг матрицы управляемости полной системы равен трем, и на интегральных многообразиях полная система управляема.

Пример 4. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы с обобщенными координатами q_1, q_2, кинетической энергией $T = \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)/2 + 2q_2\dot{q}_2$ и обобщенными силами $Q_1 = \dot{q}_2 + q_2$, $Q_2 = -q_2 + u$, где u – управление. В лангранжевых переменных динамическая подсистема зависит от обобщенной координаты q_2 и не имеет вида (5.2). В канонических переменных

$$q_1, q_2, p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1 = \dot{q}_1, p_2 = \partial L / \partial \dot{q}_2 = \dot{q}_2 + q_2$$

уравнения движения

$$\dot{q}_1 = p_1, \; \dot{q}_2 = p_2 - q_2, \; \dot{p}_1 = p_2, \; \dot{p}_2 = u \tag{5.5}$$

имеют вид (5.3), отличаясь от уравнений (5.2) структурой кинематических уравнений. Применяя к системе (5.5) критерий Калмана, убеждаемся, что она управляема. Динамические подсистемы систем (5.4), (5.5) совпадают и являются управляемыми, к управляемости полной системы (5.5), в отличие от неуправляемой системы (5.4), привело изменение ее кинематических уравнений.

Рассмотренные примеры указывают на актуальность постановки задачи о связи свойств управляемости механической системы и ее динамической подсистемы. Для линейных систем в лагранжевых переменных этот вопрос полностью решается на основе теоремы 6. Для исследования линейных систем в произвольных переменных необходимо изучить уравнения (5.3). Представляет интерес постановка этой задачи для систем, линейных по управлению, и нелинейных систем общего вида. Содержательный пример нелинейной механической системы, линейной по управлению, с декомпозированной динамической подсистемой дает задача управления ориентацией твердого тела с помощью реактивной силы, рассмотренная в следующем разделе.

6. Управление ориентацией твердого тела. Многие вопросы движения твердого тела относительно центра масс под действием реактивной силы изучаются на основе модели абсолютно твердого тела без учета изменения массы. Уравнения движения относительно некоторой инерциальной системы координат имеют вид

$$\dot{\varphi} = -(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \omega_3$$

$$\dot{\psi} = (\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi)/\sin\theta, \quad \dot{\theta} = \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi \tag{6.1}$$

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + \alpha_1 u \;\; (123) \;\; \left(a_1 = (A_2 - A_3)/A_1 \;\; (123)\right)$$

где φ, ψ, θ – углы Эйлера; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции вектора угловой скорости тела на главные центральные оси; A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции тела; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор направления момента реактивной силы; u – управление, характеризующее величину момента реактивной силы; символ (123) означает, что невыписанные соотношения остальные величины получаются из выписанного круговой перестановкой индексов.

Уравнения (6.1) разделены на кинематические уравнения для углов Эйлера и динамические – с моментами сил. Динамические уравнения представляют собой независимую подсистему. Поэтому изучение системы (6.1) естественно начать с анализа динамических уравнений, а затем исследовать полную систему и проанализировать вопрос о связи свойств управляемости полной системы и ее динамической подсистемы. Управляемость динамической подсистемы изучена в работах [1, 4, 9], где установлена ее управляемость, если параметры не удовлетворяют условиям одной из следующих групп:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0;\ \ \alpha_1 = 0,\ a_1 = 0;\ \ a_1\alpha_3^2 - a_3\alpha_1^2 = 0\ (123) \tag{6.2}$$

Получим необходимые условия управляемости полной системы (6.1), применив теорему 3 для одной функции $V_0 = V$ и $G_0 = 0$. Уравнения (2.2) для системы (6.1) имеют вид

$$\begin{gathered} G_1 = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + [\omega_3 - (\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta]q_1 + \\ + \frac{\omega_1 \sin\varphi + \omega_2\cos\varphi}{\sin\theta} q_2 + (\omega_1\cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi)q_3 - \lambda_1 V = 0 \\ G_2 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 - \lambda_2 V = 0 \\ \left(p_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i},\ i = 1,2,3;\ q_1 = \frac{\partial V}{\partial \varphi},\ q_2 = \frac{\partial V}{\partial \psi},\ q_3 = \frac{\partial V}{\partial \theta};\ \beta_1 = a_1\omega_2\omega_3 \quad (123)\right) \end{gathered} \tag{6.3}$$

Для получения условий разрешимости этой системы дополняем ее скобками Якоби и приходим к следующей системе:

$$G_i = 0,\ i = 1, \ldots, 6 \tag{6.4}$$

Здесь

$$G_3 = [G_2, G_1] = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + [\alpha_3 - (\alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta]q_1 +$$
$$+ \frac{\alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi}{\sin\theta} q_2 + (\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)q_3 - \lambda_3 V$$
$$G_4 = [G_2, G_3] = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \eta_3 p_3 - \lambda_4 V$$
$$G_5 = [G_4, G_1] = \zeta_1 p_1 + \zeta_2 p_2 + \zeta_3 p_3 +$$
$$+ 2[a_3\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3(a_1\alpha_2\sin\varphi + a_2\alpha_1\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta]q_1 +$$
$$+ 2\alpha_3\frac{a_1\alpha_2\sin\varphi + a_2\alpha_1\cos\varphi}{\sin\theta}q_2 + 2\alpha_3(a_1\alpha_2\cos\varphi - a_2\alpha_1\sin\varphi)q_3 - \lambda_5 V$$
$$G_6 = [G_4, G_3] = \varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2 + \varkappa_3 p_3 - \lambda_6 V$$
$$\xi_1 = a_1(\alpha_2\omega_3 + \alpha_3\omega_2),\quad \eta_1 = 2a_1\alpha_2\alpha_3\ (123)$$
$$\zeta_1 = 2a_1\alpha_1(a_2\alpha_3\omega_3 + a_3\alpha_2\omega_2),\quad \varkappa_1 = 2a_1\alpha_1(a_2\alpha_3^2 + a_3\alpha_2^2)\ (123)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ – некоторые функции переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi, \psi, \theta$. Опеределитель системы (6.4), рассматриваемой как система линейных алгебраических уравнений относительно p_i, q_i (i = 1, 2, 3), равен

$$\Delta = 8\,\delta_1\delta_2\delta_3 W/\sin\theta,\quad W = \alpha_1\delta_1\omega_1 + \alpha_2\delta_2\omega_2 + \alpha_3\delta_3\omega_3 \tag{6.5}$$

$$\delta_1 = a_2\alpha_3^2 - a_3\alpha_2^2 \ (123)$$

Если $\Delta \neq 0$, то, как было показано [4], система (6.4), а вместе с ней и система (6.3), либо не имеют решения, либо имеют решение экспоненциального вида, которое в нуль не обращается. Остается изучить случай $\Delta = 0$. Определитель (6.5) равен нулю, когда параметры a_i, α_i (1 = 1, 2, 3) удовлетворяют условиям (6.2), и на линейном многообразии

$$W = 0 \tag{6.6}$$

При выполнении условий (6.2) система (6.3), очевидно, имеет решение, так как при этом динамическая подсистема системы (6.1) неуправляема. Для выполнения равенства (6.6) необходимо, чтобы функция W была решением системы (6.3). При подстановке ее в уравнения (6.3) убеждаемся, что второе уравнение удовлетворяется тождественно для $\lambda_2 = 0$, а первое уравнение принимает вид

$$a_1\omega_2\omega_3 \frac{\partial W}{\partial \omega_1} + a_2\omega_3\omega_1 \frac{\partial W}{\partial \omega_2} + a_3\omega_1\omega_2 \frac{\partial W}{\partial \omega_3} = \lambda_1 W \tag{6.7}$$

На основании теоремы Леви-Чивиты [5] уравнение (6.7) указывает на то, что линейное многообразие (6.6) – инвариантное многообразие системы уравнений

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 \ (123) \tag{6.8}$$

описывающей движение твердого тела по инерции. Из динамики твердого тела известно, что уравнения (6.8) допускают линейные инвариантные многообразия только следующего вида:

$$\omega_1\sqrt{a_2} \pm \omega_2\sqrt{a_1} = 0 \ (123)$$

Требование совпадения уравнений (6.9) и (6.6) приводит к условиям, налагаемым на параметры

$$a_1\alpha_2^2 - a_2\alpha_1^2 = 0 \ (123)$$

уже выделенным равенствами (6.2).

Таким образом, необходимые условия управляемости полной системы (6.1) совпадают с необходимыми (и достаточными) условиями управляемости ее динамической подсистемы, т.е. они выполнены для всех значений параметров a_i, α_i, кроме удовлетворяющих условиям (6.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А.М.* Критерий управляемости и достаточные условия стабилизируемости динамических систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 401–409.
2. *Пятницкий Е.С.* Критерий полной управляемости классов механических систем с ограниченными управлениями // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 707–718.
2. *Ковалев А.М.* Ориентированные многообразия и управляемость динамических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 639–636.
4. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
5. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Bologna: Zanichelli, 1927. = *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.; Л.: ОНТИ, 1951. 555 с.

6. *Коробов В.И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 4. С. 614–619.
7. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
8. *Павловский Ю.Н.* Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем и ее приложения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 2. С. 45–57.
9. *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* Управление вращением асимметричного твердого тела // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12. № 5. С. 335–347.

Белград, Донецк

Поступила в редакцию
11.VI.1999