УДК 531.36:62–50

© 2000 г. Л.А. Манита

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРАМИ

В задаче управления m-звенным манипулятором, которая обладает особым режимом порядка $2m$, доказано, что оптимальные траектории выходят на особый режим за конечное время, причем оптимальное управление имеет бесконечное число переключений.

Для задач оптимального управления, афинно порожденных скалярным управлением, функция Понтрягина линейно зависит от u и может быть представлена в виде $H = H_0 + uH_1$, где H_0, H_1 – функции от фазовой и сопряженной переменных. Если вдоль траектории $H_1 \neq 0$, то управление, как функция времени, однозначно определяется из условия максимума и является кусочно-постоянной. Соответствующая траектория кусочно-гладкая. Траектория, на которой управление не определяется однозначно из условия максимума, называется *особой* траекторией [1]. Для задач, афинных по управлению, вдоль особой траектории $H_1 \equiv 0$. Чтобы определить управление на особой траектории, необходимо дифференцировать тождество $H_1 \equiv 0$. При этом впервые управление u появляется обязательно на четном шаге дифференцирования $2q$. Число q называется *порядком* особой траектории. Необходимым условием оптимальности особой траектории является выполнение на ней условия Келли [2]

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}H_1}{dt^{2q}} \leq 0$$

Изучение особых траекторий и их сопряжений с неособыми траекториями послужило развитию теории режимов с учащающимися переключениями. Траекторией с учащающимися переключениями или четтеринг-траекторией (ЧТ), называется траектория, на которой управление имеет бесконечное число переключений на конечном интервале времени. Была доказана [3, 4] типичность ЧТ, а именно, доказано, что для открытого множества гамильтоновых систем принципа максимума Понтрягина с одномерным управлением существует подмногообразие конечной коразмерности, через каждую точку которого проходит однопараметрическое семейство ЧТ.

Одна из причин возникновения четтеринга – сопряжение неособой и особой траекторий четного порядка. Известно [2], что если на особой траектории четного порядка выполнено условие Келли в строгой форме

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}H_1}{dt^{2q}} < 0$$

то сопряжение кусочно-гладкой неособой траектории с особой неоптимально (теорема Келли – Коппа – Мойера). Поэтому для оптимальных траекторий неособый участок имеет бесконечное число точек переключения управления при выходе на особый участок четного порядка. Была построена [4, 5] полная теория ЧТ в окрестности особых режимов второго порядка. Для задач с особыми режимами высокого порядка получены лишь отдельные результаты [4].

Ниже для некоторого класса задач оптимального управления показано существование оптимальных ЧТ в окрестности особых режимов произвольного четного порядка. Доказано, что задачи управления многозвенными манипуляторами с упругим соединением звеньев обладают особыми режимами высокого порядка и удовлетворяют условиям существования оптимальных ЧТ.

1. Особые режимы и четтеринг-траектории. Рассмотрим задачу

$$\int_0^\infty x_n^2(t)dt \to \inf \tag{1.1}$$

$$\dot{x}_1 = u + f_1(x), \quad \dot{x}_2 = x_1 + f_2(x), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = x_{n-1} + f_n(x) \tag{1.2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Начальное условие $x(0) = x^\circ$.

Управление одномерно и удовлетворяет ограничению $u_- \leqslant u \leqslant u_+$ для произвольных $u_- < 0$ и $u_+ > 0$.

Будем исследовать поведение решений задачи (1.1), (1.2) в окрестности особой траектории, совпадающей с началом координат.

Рассмотрим управляемую систему, являющуюся главной частью системы (1.2),

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n \tag{1.3}$$

Для задачи (1.1), (1.3) (т.е. при $f(x) \equiv 0$) было доказано [4, 5], что решения существуют и достигают начала координат за конечное время, найдена зависимость времени достижения от начальной точки. При этом была использована однородность задачи относительно действия однопараметрической группы $G = \{g_\lambda, \lambda > 0\}$ диффеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^n$: $g_\lambda(x) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda^n x_n)$. Эту группу будем называть группой Фуллера.

Потребуем, чтобы возмущение $f(x)$ было мало по сравнению с главной частью системы (1.2). А именно, пусть $f(x)$ мало в смысле действия группы Фуллера. Это означает, что равномерно по всем x из множества $\{x : |x_i| \leqslant 1, i = 1, \ldots, n\}$ имеют место оценки

$$\overline{\lim_{\lambda \to +0}} \frac{|f_i(g_\lambda(x))|}{\lambda^i} < C_0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

для некоторой постоянной $C_0 > 0$.

Задача (1.1), (1.2) уже не является однородной относительно действия группы Фуллера. Однако удается показать, что качественное поведение траекторий остается таким же, как и в задаче (1.1), (1.3) (при $f(x) \equiv 0$).

Для каждого $r > 0$ определим множество

$$Q_r = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| \leqslant r^i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

Верна следующая теорема [6][1].

Теорема 1. Существует число $r^\circ \geqslant 0$, такое, что для всех $r \leqslant r^\circ$ справедливы следующие утверждения.

1°. Оптимальная траектория $\hat{x}(t)$ в задаче (1.1), (1.2), (1.4) с начальным условием $\hat{x}(0) = x^\circ \in Q_r$ существует.

2°. Оптимальная траектория $\hat{x}(t)$ достигает начала координат за конечное время, не превосходящее const r.

---

[1] См. также: *Манита Л.А.* Асимптотическое поведение экстремалей в окрестности особых траекторий высокого порядка. Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Москва, 1996. 131 с.

Замечание. Время достижения начала координат допускает равномерную по всем начальным точкам $x^{\circ} \in Q_r$ оценку сверху вида const r, причем постоянная в этой оценке не зависит от r.

Доказательство теоремы 1 основано на построении кусочно-гладкой функции Ляпунова для управляемой системы (1.2). При этом функция Ляпунова одна и та же для всех возмущений $f(x)$, удовлетворяющих условию (1.4).

Из полученных ранее результатов [5] следует, что для задачи (1.1), (1.3) при $f(x) \equiv 0$ и четном n оптимальными являются траектории с учащающимися переключениями. Используя результаты теоремы 1, докажем, что наличие четтеринг-решений устойчиво относительно некоторого класса возмущений.

Рассмотрим возмущение $f(x)$ специального вида

$$f_i(x) = \sum_{k=i}^{n} v_{ik} x_k + h_i(x_n) \tag{1.5}$$

где $h_i(x_n) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ – нелинейные функции, зависящие только от переменной x_n, причем $h_i(0) = 0$ и $h_i'(0) = 0$. Функции $f_i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$) вида (1.5) малы относительно действия группы Фуллера (1.4).

Теорема 2 [6]. Для задачи (1.1), (1.2), (1.5) справедливы следующие утверждения.

1°. Начало координат – особая траектория порядка n.

2°. Пусть размерность фазового пространства четная, то есть, $n = 2k$ для некоторого натурального k. Тогда существует такое $\delta > 0$, что оптимальные траектории $x(t)$ с начальными условиями $x^{\circ} \in Q_r$, $r \leqslant \delta$, достигают начала координат за конечное время с бесконечным числом переключений управления.

Доказательство. Применим принцип максимума Понтрягина. Запишем функцию Понтрягина (гамильтониан)

$$H = \psi_1(u + f_1(x)) + \sum_{i=2}^{n} \psi_i(x_{i-1} + f_i(x)) - x_n^2/2 = H_0 + uH_1, \qquad u = \begin{cases} u_-, & \psi_1 < 0 \\ u_+, & \psi_1 > 0 \end{cases}$$

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\psi_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} v_{ki}\psi_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$\dot{\psi}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n} = x_n - \sum_{k=1}^{n} v_{kn}\psi_k - \sum_{k=1}^{n} \psi_k h_k'(x_n)$$

Найдем особые траектории, т.е. траектории, на которых коэффициент при управлении u в гамильтониане равен нулю. Имеем

$$H_1 = \psi_1 \equiv 0 \Rightarrow \psi_2 \equiv 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \psi_n \equiv 0 \Rightarrow x_n \equiv 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 \equiv 0$$

Таким образом, начало координат – особая траектория. Вычислим ее порядок. Имеем

$$\frac{dH_1}{dt} = \dot{\psi}_1 = -\psi_2 - v_{11}\psi_1$$

$$\frac{d^2H_1}{dt^2} = -\dot{\psi}_2 - v_{11}\dot{\psi}_1 = \psi_3 + \sum_{k=1}^{2} v_{k2}\psi_k + v_{11}(\psi_2 + v_{11}\psi_1) \equiv \psi_3 + \sum_{k=1}^{2} \alpha_{k3}\psi_k$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{j-1}H_1}{dt^{j-1}} = \varepsilon_{j-1}\dot{\psi}_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-2} \alpha_{k,j-1}\dot{\psi}_k = \varepsilon_{j-1}\left(-\dot{\psi}_j - \sum_{k=1}^{j-1} v_{k,j-1}\psi_k\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{j-2}\alpha_{k,j-1}\left(-\psi_{k+1}-\sum_{l=1}^{k}\upsilon_{lk}\psi_l\right)\equiv\varepsilon_j\psi_j+\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_{mj}\psi_m$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nH_1}{dt^n}=\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_n\psi_n+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{kn}\psi_k\right)=\varepsilon_n\left(x_n-\sum_{k=1}^{n}\upsilon_{kn}\psi_k-\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k'(x_n)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{kn}\dot\psi_k=$$

$$=\varepsilon_n x_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,n+1}\psi_k-\varepsilon_n\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k'(x_n)=\varepsilon_n x_n+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k'(x_n)+F_1(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n)$$

$$\frac{d^{n+1}H_1}{dt^{n+1}}=\varepsilon_n\dot x_n+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}(\dot\psi_k h_k'(x_n)+\psi_k h_k''(x_n)\dot x_n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial\psi_k}\dot\psi_k=$$

$$=\varepsilon_n x_{n-1}+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k''(x_n)x_{n-1}+F_2(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n,x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n+j-1}H_1}{dt^{n+j-1}}=\varepsilon_n x_{n-j+1}+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k''(x_n)x_{n-j+1}+F_j(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n,\ x_n,\ \dots,\ x_{n-j+2})$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{2n-1}H_1}{dt^{2n-1}}=\varepsilon_n x_1+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k''(x_n)x_1+F_n(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n,\ x_n,\ \dots,\ x_2)$$

$$\frac{d^{2n}H_1}{dt^{2n}}=\varepsilon_n u+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k''(x_n)u+F_{n+1}(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n,\ x_n,\ \dots,\ x_1)$$

Здесь $\varepsilon_j=(-1)^{j+1}(j\geqslant 2)$, а числа α_{mj} определяются рекуррентно по формуле

$$\alpha_{mj}=\varepsilon_j\upsilon_{m,j-1}-\alpha_{m-1,j-1}-\sum_{k=m}^{j-2}\upsilon_{mk},\quad 2\leqslant j\leqslant n,\quad 1\leqslant m\leqslant j-1,\quad \alpha_{mj}=0,\quad m\leqslant 0$$

Функции $F_j\,(j=1,\dots,n+1)$ зависят только от сопряженных переменных $\psi_1,\dots,\psi_n$ и от фазовых переменных $x_n,\dots,x_{n-j+2}$, причем $F_j(0)=0$ для любого j.

Главный член в $d^{n+j-1}H_1\,/\,dt^{n+j-1}$ есть

$$\varepsilon_n x_{n-j+1}+\varepsilon_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_k''(x_n)x_{n-j+1}$$

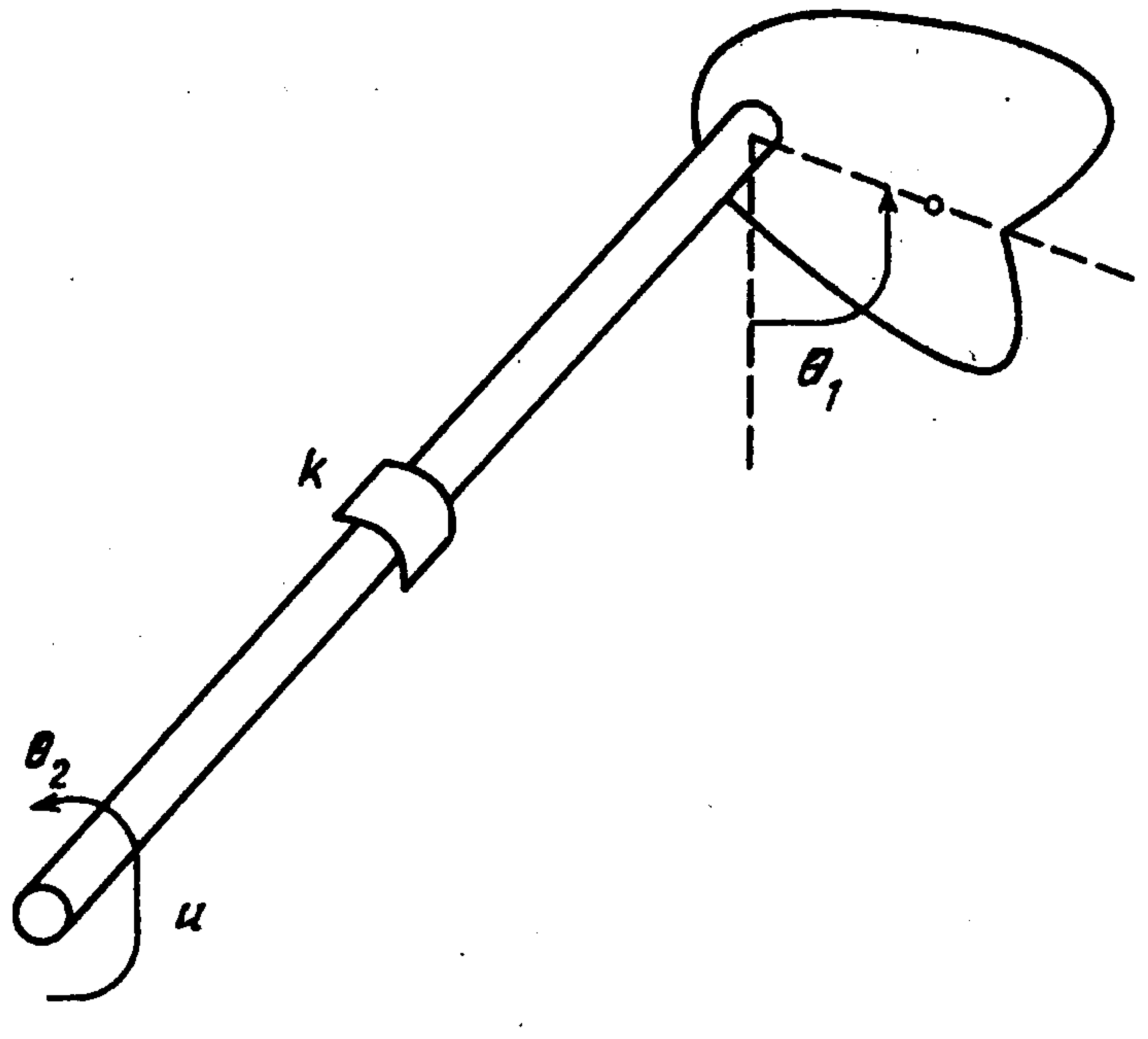
Дифференцирование этого члена даст управление быстрее, чем дифференцирование функции F_j. Поэтому для определения порядка особой траектории выделяем те члены, при дифференцировании которых управление появится быстрее всего. Другие члены, которые входят в функции F_j, не влияют на порядок особой траектории, и следовательно, на выполнение условия Келли. Таким образом, впервые управление появляется при $2n$-м дифференцировании. Поэтому начало координат – особая траектория порядка n, причем, если n четно, то на особой траектории выполнено необходимое условие оптимальности Келли в строгой форме

$$(-1)^q\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q}H_1}{dt^{2q}}=(-1)^n\varepsilon_n=-1<0$$

Задача (1.1), (1.2), (1.5) удовлетворяет условиям теоремы 1. По теореме 1 оптимальная траектория $x(t)$, выходящая из $x^\circ \in Q_r$, где r достаточно мало, достигает начала координат за конечное время

$$t_1 = t_1(x^\circ) \leqslant \text{const}\, r$$

и затем остается в нуле. Оценка времени равномерна по всем точкам $x^\circ \in Q_r$, и постоянная не зависит от r. Таким образом, $x(t) = 0$ при $t \geqslant t_1$. Тогда управление $u(t) = 0$ при $t \geqslant t_1$, и из принципа максимума Понтрягина следует, что $\psi_1(t) = 0$ при $t \geqslant t_1$. Из системы сопряженных уравнений получаем $\psi_i(t) = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$ при $t \geqslant t_1$. Следовательно, оптимальная траектория за конечное время t_1 выходит на особую траекторию.



Фиг. 1

Если n четно, то для особой траектории задачи (1.1), (1.2), (1.5) выполнены все условия теоремы Келли–Коппа–Мойера, из которой следует, что в таком случае управление на оптимальной траектории совершает бесконечное число переключений на конечном интервале времени. Теорема 2 доказана.

2. Задача управления многозвенным манипулятором с упругим соединением звеньев. Исследования задач управления манипуляторами (в том числе многозвенными) с привлечением методов из различных областей науки взаимно дополняют друг друга и дают более полное представление о функционировании объекта [7–9][2].

Методы оптимального управления позволяют выявить новые эффекты, которые необходимо учитывать при решении конкретных прикладных задач. Рассматривались задачи управления роботами-манипуляторами с особыми режимами второго порядка [8, 9]. Для задачи быстродействия двухзвенным манипулятором построен полный синтез, содержащий четтеринг-траектории [8]. Было показано[3], что в задаче наибыстрейшего перевода робота-машины из одного положения на плоскости в другое оптимальные траектории имеют бесконечное число точек переключения управления за конечное время.

Ниже будут рассмотрены задачи управления роботами-манипуляторами, в которых реализуются особые режимы любого четного порядка, при этом оптимальные траектории выходят на особый режим с четтерингом.

Система с одним упругим элементом. Рассмотрим двухзвенный манипулятор, звенья которого соединены пружиной с жесткостью k. Первое звено неподвижно соединено с рукой робота. К концу второго звена прикладывается вращательное усилие u, $-1 \leqslant u \leqslant 1$ (фиг. 1). Данная механическая система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -MgL\sin\theta_1 - k(\theta_1 - \theta_2), \quad J_2\ddot{\theta}_2 = k(\theta_1 - \theta_2) + u(t) \tag{2.1}$$

---

[2] См. также: *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Каплунов А.А.* Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами: Препринт № 218. М.: Ин-т проб. механики РАН, 1983. 72 с.

Boissonnat J.-D., Devillers O., Preparata F.P., Donati L. Motion planning of legged robots: the spider robot problem. Rapport de recherche N. 1767. INRIA, France, 1992.

[3] См.: *Boissonnat J.-D., Cerezo A., Leblond J.* A note on shortest paths in the plane subject to a constraint on the derivative of the curvature. Rapport de recherche N. 2160. INRIA, France, 1994.

Degtiariova-Kostova E., Kostov V. Irregularity of optimal trajectories in a control problem for a car-like robot. Rapport de Recherche N. 3411. INRIA, France, 1998.

Управление u одномерно и удовлетворяет ограничению $|u|\leqslant 1$. Начальные условия

$$\theta_1(0)=\theta_{10},\quad \dot\theta_1(0)=\theta'_{10},\quad \theta_2(0)=\theta_{20},\quad \dot\theta_2(0)=\theta'_{20}$$

Задача состоит в том, чтобы осуществить такое движение робота, которое обеспечивает наименьшее уклонение руки робота от некоторого заданного положения

$$\int\limits_0^\infty (\theta_1-\gamma)^2 dt \to \inf \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}=\left(\gamma,\ 0,\ \gamma+\frac{MgL}{k}\sin\gamma,\ 0\right)$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие $|MgL\sin\gamma|<1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. $(\theta_1(t),\ \dot\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \dot\theta_2(t))\equiv\mathcal{H}$ – особая траектория четвертого порядка.

2°. Для всех начальных положений $\theta^\circ=(\theta_1(0),\ \dot\theta_1(0),\ \theta_2(0),\ \dot\theta_2(0))$, достаточно близких к точке $\mathcal{H}$, оптимальное управление переводит руку робота в положение $\theta_1 = \gamma$ за конечное время $t^\circ = t^\circ(\theta^\circ)$. При этом оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключений на конечном интервале времени $(0, t^\circ)$.

Доказательство. Положим

$$a_1=-\frac{MgL}{J_1},\quad a_2=-\frac{k}{J_1},\quad a_3=\frac{k}{J_2},\quad a_4=\frac{1}{J_2}$$

$$x_4=\theta_1-\gamma,\quad x_3=\dot\theta_1,\quad x_2=-a_2(\theta_2-\gamma)+a_1\sin\gamma,\quad x_1=-a_2\dot\theta_2$$

Определим новое управление

$$\tilde u=-a_2a_4u+a_1a_3\sin\gamma$$

Обозначим $\alpha_\pm=k(1\mp MgL\sin\gamma)/(J_1J_2)$. Если $u=1$, то $\tilde u=\alpha_+$; если $u=-1$, то $\tilde u=-\alpha_-$. Из предположения $|MgL\sin\gamma|<1$ следует, что $\alpha_\pm>0$. Задачу (2.1), (2.2) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_0^\infty x_4^2(t)dt\to\inf \tag{2.3}$$

$$\dot x_1=\tilde u-a_2a_3x_4-a_3x_2,\quad \dot x_2=x_1 \tag{2.4}$$

$$\dot x_3=x_2+x_4(a_1\cos\gamma+a_2)+a_1A(x_4)\cos\gamma+a_1B(x_4)\sin\gamma,\quad \dot x_4=x_3$$

Здесь

$$A(x_4)=\sin x_4-x_4=O(x_4^3),\quad B(x_4)=\cos x_4-1=O(x_4^2)$$

Управление $\tilde u$ удовлетворяет ограничению $-\alpha_-\leqslant\tilde u\leqslant\alpha_+$. Начальные условия имеют вид

$$x_1(0)=-a_2\theta'_{20},\qquad x_2(0)=-a_2(\theta_{20}-\gamma)+a_1\sin\gamma \tag{2.5}$$

$$x_3(0)=\theta'_{10},\qquad x_4(0)=\theta_{10}-\gamma$$

Покажем, что задача (2.3), (2.4) удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим

$$f_1(x)=-a_3x_2-a_2a_3x_4$$

$$f_3(x)=x_4(a_1\cos\gamma+a_2)+a_1A(x_4)\cos\gamma+a_1B(x_4)\sin\gamma$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = \tilde{u} + f_1(x), \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 + f_3(x), \quad \dot{x}_4 = x_3$$

Функции $f_1(x)$ и $f_3(x)$ принадлежат классу (1.5), который рассматривается в теореме 2. Действительно, надо положить $v_{12} = -a_3$, $v_{14} = -a_2a_3$, $v_{34} = a_1\cos\gamma + a_2$, остальные v_{ik} – равными нулю, а в качестве функций h_i взять

$$h_3(x_4) = a_1A(x_4)\cos\gamma + a_1B(x_4)\sin\gamma, \quad h_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, 4$$

Из определения функций $A(x_4)$ и $B(x_4)$ следует, что $h_3(0) = h_3'(0) = 0$.

Поэтому к задаче (2.3), (2.4) применима теорема 2. Следовательно, начало координат – особая траектория порядка 4. Из теоремы 2 следует, что для начальных условий (2.5) из достаточно малой окрестности начала координат оптимальное решение существует и достигает начала координат за конечное время t^0, причем управление $u(t)$ на оптимальной траектории имеет бесконечное число переключений на конечном интервале времени $(0, t^0)$.

Так как задачи (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) эквивалентны, то доказанное выше означает в терминах задачи (2.1), (2.2), что $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_2(t)) \equiv \mathcal{H}$ – особая траектория порядка 4, на которую оптимальные траектории задачи (2.1), (2.2) выходят с бесконечным числом переключений управления на конечном интервале времени. Таким образом, если начальное положение θ^0 взято из достаточно малой окрестности точки $\mathcal{H}$, то для обеспечения наименьшего уклонения (в смысле функционала (2.2)) от положения $\theta_1 = \gamma$ необходимо за конечное время с бесконечным числом переключений управляющей силы u перевести руку робота в положение

$$\theta_1 = \gamma, \quad \theta_2 = \gamma + \frac{MgL}{k}\sin\gamma$$

Теорема 3 доказана.

Система с несколькими упругими элементами. На основе модели манипулятора (2.1), (2.2) можно предложить примеры управляемых механических систем, обладающих особыми траекториями любого четного порядка, на которые оптимальные решения выходят за конечное время с бесконечным числом переключений управления.

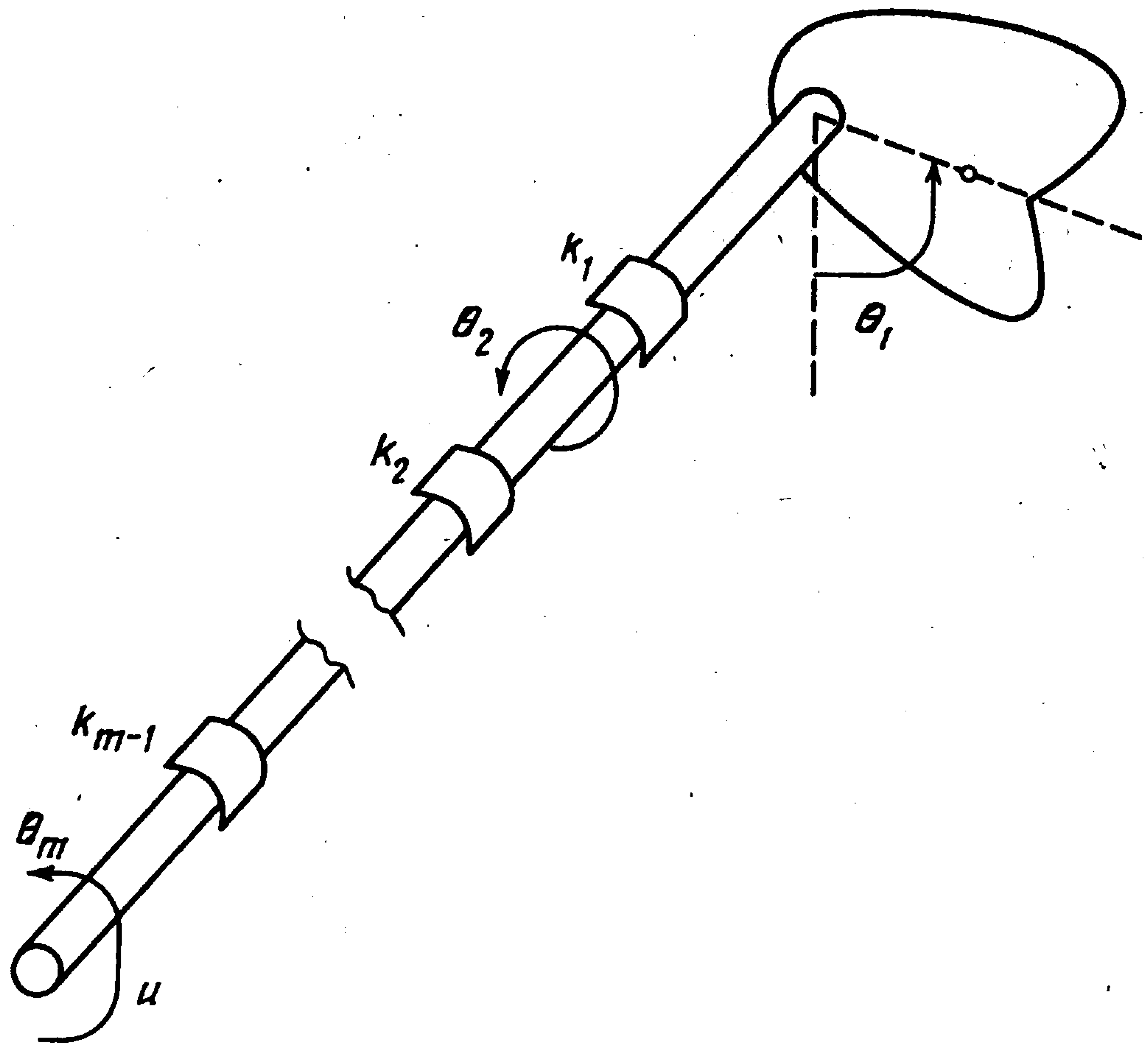
Рассмотрим робот-манипулятор, состоящий из m звеньев, последовательно соединенных между собой пружинами, жесткости которых $k_1, \ldots, k_{m-1}$. Первое звено неподвижно соединено с рукой робота. К m-му звену прикладывается вращательное усилие u, $-1 \leq u \leq 1$ (фиг. 2). Эта механическая система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\theta}_1 = -MgL\sin\theta_1 - k_1(\theta_1 - \theta_2)\\
&J_2\ddot{\theta}_2 = -k_1(\theta_2 - \theta_1) - k_2(\theta_2 - \theta_3)\\
&\ldots\\
&J_i\ddot{\theta}_i = -k_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) - k_i(\theta_i - \theta_{i+1})\\
&\ldots\\
&J_m\ddot{\theta}_m = -k_{m-1}(\theta_m - \theta_{m-1}) + u(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Управление u одномерно и удовлетворяет ограничению $|u| \leq 1$. Начальные условия

$$\theta_i(0) = \theta_{i0}, \quad \dot{\theta}_i(0) = \theta_{i0}', \quad i = 1, \ldots, m$$

Как и в случае $m = 2$, задача состоит в том, чтобы осуществить движение робота,



Фиг. 2

обеспечивающее минимальное значение следующего функционала:

$$\int_0^\infty (\theta_1-\gamma)^2 dt \to \inf \tag{2.7}$$

Обозначим

$$\mathcal{H}_m = \left(\gamma,\ 0,\ \gamma+\frac{MgL}{k_1}\sin\gamma,\ 0,\dots,\gamma+MgL\sin\gamma\sum_{i=1}^{m-1}(k_i)^{-1},\ 0\right)$$

Основной результат для задачи (2.6), (2.7) состоит в следующем.

Теорема 4. Пусть выполнено условие $|MgL\sin\gamma|<1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. $(\theta_1(t),\ \dot\theta_1(t),\dots,\theta_m(t),\ \dot\theta_m(t))\equiv\mathcal{H}_m$ – особая траектория порядка $2m$.

2°. Для начальных положений $\theta^\circ=(\theta_1(0),\ \dot\theta_1(0),\dots,\theta_m(0),\ \dot\theta_m(0))$, достаточно близких к точке $\mathcal{H}_m$, оптимальная траектория приходит в положение $\mathcal{H}_m$ за конечное время с бесконечным числом переключений управления.

Доказательство аналогично анализу в случае двухзвенного робота. Оно основано на приведении задачи к виду, для которого выполнены условия теоремы 2. Положим

$$x_1=\theta_1-\gamma,\quad x_2=\dot\theta_1,$$

$$x_{2l+1}=\left(\theta_{l+1}-\gamma-MgL\sin\gamma\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{k_i}\right)\prod_{i=1}^{l}\frac{k_i}{J_i}$$

$$x_{2l+2}=\dot\theta_{l+1}\prod_{i=1}^{l}\frac{k_i}{J_i},\quad 1\le l\le m-1$$

Точке $\mathcal{H}_m$ в координатах $(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ соответствует начало координат. Определим новое управление

$$\tilde{u} = \frac{k_1 \dots k_{m-1}}{J_1 \dots J_m}(u - MgL\sin\gamma)$$

Положим

$$f_2(x) = -\frac{MgL\cos\gamma}{J_1}\sin x_1 + \frac{MgL\sin\gamma}{J_1}(1 - \cos x_1)$$

$$f_{2l}(x) = \frac{k_{l-1}^2}{J_{l-1}J_l}x_{2l-3} - \frac{k_{l-1} + k_l}{J_l}x_{2l-1}, \quad 2 \leqslant l \leqslant m-1$$

$$f_{2m}(x) = \frac{k_{m-1}^2}{J_{m-1}J_m}x_{2m-3} - \frac{k_{m-1}}{J_m}x_{2m-1}$$

$$f_{2l+1}(x) = 0, \quad 0 \leqslant l \leqslant m-1$$

Запишем систему (2.6) в координатах $(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$

$$\dot{x}_{2l-1} = x_{2l}, \quad \dot{x}_{2l} = x_{2l+1} + f_{2l}(x), \quad 1 \leqslant l \leqslant m-1$$

$$\dot{x}_{2m-1} = x_{2m}, \quad \dot{x}_{2m} = \tilde{u} + f_{2m}(x)$$

Изменим нумерацию индексов на обратную, т.е. положим

$$z_l = x_{2m-l+1}, \quad \tilde{f}_l(z) = f_{2m-l+1}(x), \quad 1 \leqslant l \leqslant 2m$$

Тогда задача (2.6), (2.7) в координатах $(z_1, z_2, \dots, z_{2m})$ имеет вид

$$\int_0^\infty z_{2m}^2(t)dt \to \inf \tag{2.8}$$

$$\dot{z}_1 = \tilde{u} + \tilde{f}_1(z), \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dot{z}_{2l-1} = z_{2l-2} + \tilde{f}_{2l-1}(z), \quad \dot{z}_{2l} = z_{2l-1}, \quad 2 \leqslant l \leqslant m$$

Возмущение $\tilde{f}(z) = (\tilde{f}_1(z), \ \tilde{f}_2(z), \ \dots, \ \tilde{f}_{2m}(z))$ принадлежит классу (1.5). Поэтому к задаче (2.8) применима теорема 2. Для задачи (2.6), (2.7) это означает, что точка $\mathcal{H}_m$ – особая траектория порядка $2m$, на которую оптимальные траектории задачи выходят с бесконечным числом переключений управления $u(t)$ на конечном интервале времени. Таким образом, если начальное положение θ° взято из достаточно малой окрестности точки $\mathcal{H}_m$, то для обеспечения наименьшего уклонения (в смысле функционала (2.7)) от положения $\theta_1 = \gamma$ необходимо за конечное время с бесконечным числом переключений управляющей силы u перевести руку робота в положение

$$\theta_1 = \gamma, \quad \theta_2 = \gamma + \frac{MgL}{k_1}\sin\gamma, \quad \dots, \quad \theta_m = \gamma + MgL\sin\gamma\sum_{i=1}^{m-1} k_i^{-1}$$

Теорема 4 доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00535) и "Государственная поддержка ведущих научных школ" (96-15-96072).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. *Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G.* Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. N.Y.: Acad. Press, 1967. P. 63–103.
3. *Kupka I.* The ubiquity of Fuller's phenomenon // Nonlinear Controllability and Optimal Control. Monograph Textbook Pure Appl. Math // Ed. A.V. Sarychev. N.Y.: Dekker, 1990. V. 133. P. 313–350.
4. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Boston et al.: Birkhäuser, 1994. 242 p.
5. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. Мат. ин-та АН им. В.А. Стеклова. 1991. Т. 197. С. 85–166.
6. *Манита Л.А.* Поведение экстремалей в окрестности особых режимов и негладкие функции Ляпунова в задачах оптимального управления // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2. № 2. С. 411–447.
7. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с.
8. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И.* Режимы с учащающимися переключениями в задаче управления роботом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 939–946.
9. *Осипов С.Н., Формальский А.М.* Задача о быстрейшем повороте манипулятора // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 929–938.

Москва
e-mail: manita@mech. math. msu. su

Поступила в редакцию
8.VII.1999