УДК 539.375

М.А. Греков, Н.Ф. Морозов

О ДИСКОВЫХ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ

Подход В.В. Новожилова [1, 2] в исследовании равновесных трещин в плоской задаче распространен на дисковую трещину. Рассмотрена круговая в плане трещина, находящаяся под действием либо двух нормальных и противоположно направленных сосредоточенных сил, приложенных в центре поверхностей, либо однородного одноосного растяжения. Учитывается узкая зона сцепления у края трещины. В каждом случае установлен возможный интервал диаметров равновесных трещин.

В развитие теории трещин Гриффитса – Ирвина в работах В.В. Новожилова [1, 2] был установлен возможный интервал длин равновесных трещин. Это исследование коррелирует с известной теорией Томсона о решетчатом захвате и интервале внешних сил, обеспечивающих равновесное состояние трещин [3, 4]. Подход Томсона – Новожилова позволил продвинуться в решении ряда прикладных задач [5, 6], что стимулирует дальнейшие исследования в этом направлении.

Рассмотрим неограниченное упругое изотропное тело с дисковой, круговой в плане трещиной $\Gamma=\{(x_1,x_2,x_3):\ x_3=0,\ x_1^2+x_2^2\leqslant a^2\}$ (фиг. 1). Предположим, что в общем случае к поверхности Γ приложены симметричные относительно оси x_3 усилия $\sigma_{33}=p(x_1,x_2)$, в узкой кольцевой области $\Gamma_0=\{(x_1,x_2,x_3):\ x_3=0,\ b^2\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant a^2\}$ у края трещины действуют постоянные силы сцепления σ_0, на бесконечности действует усилие $\sigma_{33}^{\infty}=\sigma$.

В зоне сцепления Γ_0 смещение точек поверхности трещины w^*в направлении оси x_3 удовлетворяет условию

$$w(\rho)\leqslant w_0,\quad b\leqslant\rho\leqslant a,\quad \rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \tag{1}$$

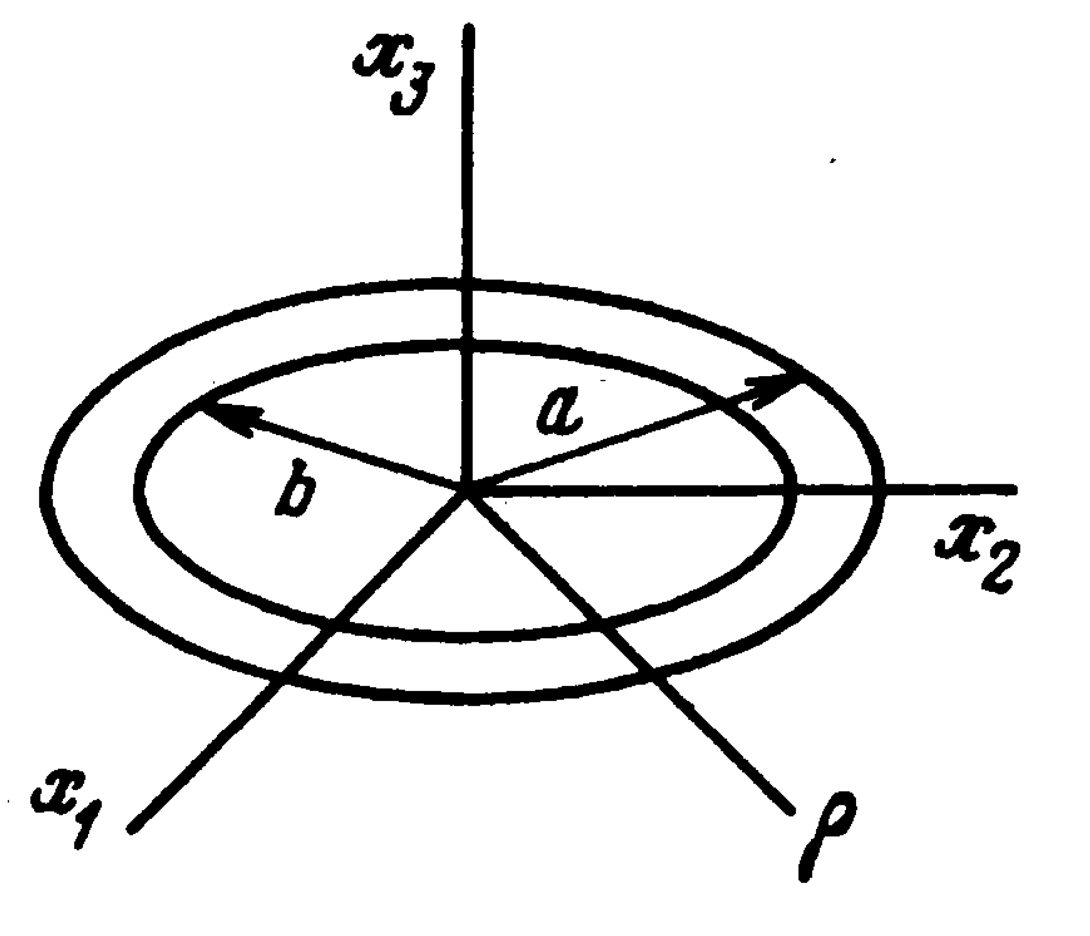
Следуя В.В. Новожилову [1, 2], примем условие распространения трещины в виде

$$\int_a^{a+D}\sigma_{33}(\rho)d\rho\geqslant D\sigma_f \tag{2}$$

В (1), (2) w_0, D, σ_f – постоянные материала, $2w_0$ – предельное расхождение точек поверхностей трещины, между которыми еще действуют силы сцепления, D – размер зоны разрушения у края трещины, σ_f – разрушающее напряжение при одноосном растяжении. При хрупком разрушении параметр D приближенно определяется равенством [7]

$$D=2K_{1c}^2/(\pi\sigma_f^2) \tag{3}$$

где K_{1c} – вязкость разрушения.



Фиг. 1

Знаку равенства в первом соотношении в (1) и в (2) отвечают трещины диаметра d_g и d_c соответственно. В зависимости от действующей нагрузки диапазон равновесных трещин определяется одним из следующих двойных неравенств:

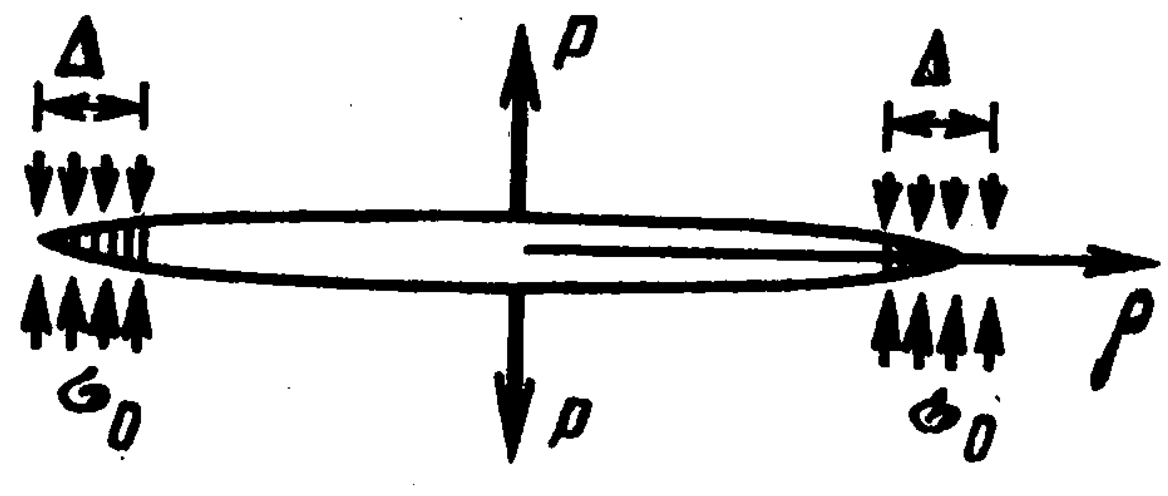
$$d_c\leqslant d\leqslant d_g,\quad d_g\leqslant d\leqslant d_c \tag{4}$$

Найдем выражения для величин d_g и d_c в двух модельных задачах, полагая при обозначении $\Delta = a-b$, что

$$\Delta/a \ll 1,\quad D/a \ll 1 \tag{5}$$

Трещина раскрывается парой сосредоточенных нормальных и противоположно направленных *сил P, приложенных в центре поверхностей Г, а напряжения на бесконечности отсутствуют* (*фиг.* 2). В этом случае $p(x_1, x_2) = -P\delta(\rho)$ и $\sigma = 0$.

Используя решение, построенное ранее [8, 9] для изучения поведения дисковой трещины в рамках модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, а также функцию Грина [10, 11] и метод суперпозиции, приходим к следующим зависимостям для величин w и σ_{33} при $x_3 = 0$:



Фиг. 2

$$w(\rho) = \frac{2PH}{\pi\rho}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} - F(\rho,c) \tag{6}$$

$$H = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad F(\rho,c) = 4H\sigma_0\int_c^a\sqrt{\frac{t^2-b^2}{t^2-\rho^2}}dt, \quad c = \begin{cases} b, & 0 \leqslant \rho \leqslant b \\ \rho, & b \leqslant \rho \leqslant a \end{cases}$$

$$\sigma_{33}(\rho) = \frac{P_a}{\pi^2\rho^2\sqrt{\rho^2-a^2}} - \frac{2\sigma_0}{\pi}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\rho^2-a^2}} - \arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\rho^2-a^2}}\right], \quad \rho > a \tag{7}$$

(ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга).

При $\rho = b$ из (6) при учете первого условия в (5) получаем равенство

$$\frac{4P}{\pi\delta_0 d^2}\left(\frac{d}{D}\right)^{1/2} = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\Delta}{D}, \quad \beta = \frac{w_0}{HD\sigma_0} \tag{8}$$

или

$$2\left(\frac{d_g}{d}\right)^{3/2} = U + \frac{1}{U}, \quad U^2 = \frac{\beta}{4\alpha}, \quad d_g = \left(\frac{4HP^2}{\pi^2 w_0\sigma_0}\right)^{1/3} \tag{9}$$

Из последнего равенства, очевидно, следует $d \leqslant d_g$.

Подставив выражение (7) в неравенство (2), при учете условий (5) приходим к следующему условию распространения трещины:

$$\frac{4P}{\pi\sigma_0 d^2}\left(\frac{d}{D}\right)^{1/2} - 2\sqrt{\alpha} + 2A(\alpha) \geqslant \frac{\pi\sigma_f}{\sigma_0} \tag{10}$$

$$A(\alpha) = \arcsin\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \alpha\arcsin\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}$$

Полагая в соотношениях (8) и (10) $d = d_c$, получим уравнение для нахождения ширины зоны сцепления Δ, отвечающей критической трещине диаметра d_c,

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi\sigma_f}{\sigma_0}\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha}A(\alpha) \tag{11}$$

После определения величины α из (11) критический диаметр трещины d_c находим из равенства (8) при фиксированном значении силы P. Диапазон равновесных трещин определяется первым двойным неравенством в (4).

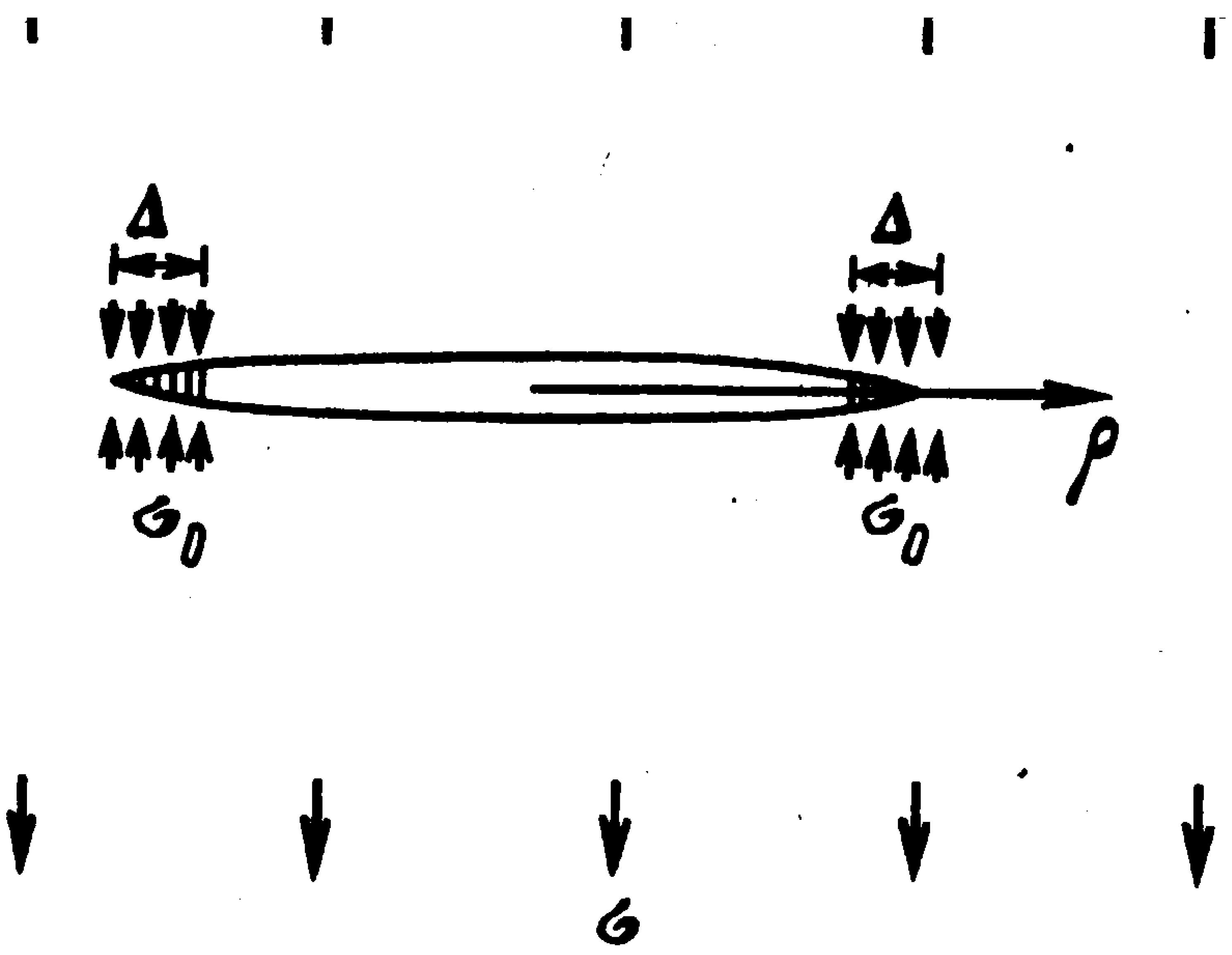
Трещина раскрывается усилиями на бесконечности σ. Поверхность трещины, за исключением зоны сцепления, свободна, т.е. $p(x_1, x_2) \equiv 0$ (фиг. 3).

В этом случае решение задачи в плоскости $x_3 = 0$ имеет вид [8, 9]

$$w(\rho) = 4H\sigma\sqrt{a^2-\rho^2} - F(\rho,c) \tag{12}$$

$$\sigma_{33}(\rho) = \frac{2\sigma_0}{\pi}\left[\frac{as-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\rho^2-a^2}} + \frac{\pi s}{2} - s\arcsin\frac{a}{\rho} + \arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\rho^2-b^2}}\right] \tag{13}$$

$\rho > a, \quad s = \sigma/\sigma_0$



Фиг. 3

Как и в предыдущем случае, из равенства (12) при $\rho = b$ получаем соотношение, аналогичное (8),

$$\frac{2\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{d}{D}\right)^{1/2} = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{\alpha} \tag{14}$$

или

$$2\left(\frac{d}{d_g}\right)^{1/2} = U + \frac{1}{U}, \quad d_g = \frac{w_0\sigma_0}{H\sigma^2} \tag{15}$$

В этом случае из равенства (15) следует, что $d \geqslant d_g$. Подставив выражение (13) в критерий (2), при учете соотношения (5) получим условие, аналогичное (10),

$$\frac{2\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{d}{D}\right)^{1/2} - 2\sqrt{\alpha} + 2A(\alpha) \geqslant \frac{\pi\sigma_f}{\sigma_0} \tag{16}$$

Отсюда и из соотношения (14) при $d = d_c$ приходим к тому же уравнению (11) для нахождения величины Δ. Диапазон равновесных трещин определяется в этой задаче вторым двойным неравенством в (4).

Заметим, что аналогично указанному ранее [2] можно ввести параметр $\varkappa = d_-/d_+$, не зависящий от внешней нагрузки и являющийся некоторым параметром материала (см. также [4]). Здесь d_+, d_- – соответственно верхняя и нижняя границы значений диаметра равновесных трещин.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-01164, 99-01-00673).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В.В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Dsg. 2. С. 212–222.
2. *Новожилов В.В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
3. *Thomson R., Hsieh C., Rana V.* Lattice trapping of fracture cracks // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 8. P. 3154–3160.

4. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* К вопросу о "решетчатом захвате" // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 323–325.
5. *Morozov N., Paukshto M.* On the crack simulation and solutions in the lattice // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58. № 3. P. 290–292.
6. *Morozov N., Paukshto M., Ponikarov N.* On the problem of equilibrium length of bridged crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1997. V. 64. № 2. P. 427–430.
7. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
8. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
9. *Болотин В.В., Лебедев В.Л., Мурзаханов Г.Х., Нефедов С.В.* Модель роста дисковой трещины малоцикловой усталости // Изв. АН. МТТ. 1966. № 3. С. 54–61.
10. *Fabrikant V.I.* Complete solutions to some mixed boundary value problems in elasticity // Advances in Applied Mechanics / Eds. J. Hutchinson and T. Wu. Boston. Acad. Press, 1990. V. 27. P. 153–223.
11. *Karapetyan E., Kachanov M.* Green's functions for the isotropic or transversely isotropic space containing a circular crack // Acta Mech. 1998. V. 126. № 1–4. P. 169–187.

Санкт-Петербург
e-mail: mikhail@ mg2307.spb. edu
morozov@ mnf. usr. pu.ru

Поступила в редакцию
1.VI.1999