

УДК 539.3

© 1999 г. И.В. Панферов

**ТЕМПЕРАТУРНАЯ СМЕШАННАЯ СИММЕТРИЧНАЯ  
ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО  
УПРУГОГО СЛОЯ**

Решается задача о равномерном нагреве симметричной трехслойной пластины с абсолютно жесткими внешними слоями, деформируемыми только за счет теплового расширения. Обобщенно плоская температурная задача сводится к определению симметричного по двум координатам напряженно-деформированного состояния внутреннего слоя (мягкого заполнителя) из трансверсально изотропного материала на основе уравнений смешанной задачи теории упругости. Слои находятся в идеальном взаимном контакте. На концах пограничного слоя заполнителя (контактный слой малой толщины) условия не ставятся. На остальной части концов заполнителя граничные условия соответствуют свободной границе. Сформулированная задача имеет ограниченное гладкое решение. Для построения точного решения предлагается модификация метода Матье [1], которая заключается в том, что кроме ординарных рядов Фурье используются решения в полиномах. Показано, что наличие этих решений в полиномах позволяет существенным образом усилить сходимость рядов Фурье.

Задача теории упругости для прямоугольной полосы рассматривалась ранее [2], причем детально исследован случай первой основной симметричной задачи для полосы.

**1. Метод решения.** Решается задача о равномерном нагреве симметричной трехслойной пластины с абсолютно жесткими внешними слоями, испытывающими тепловое расширение. Подразумевается, что внутренний слой (заполнитель) из трансверсально изотропного материала практически не влияет на внешние слои в силу своей относительно малой жесткости. Слои находятся в идеальном взаимном контакте.

Обобщенно плоская температурная задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния заполнителя, занимающего область в форме прямоугольной пластины  $|x| \leq L$ ,  $|y| \leq H$  ( $2L$  – длина пластины,  $2H$  – толщина) на основе уравнений смешанной задачи теории упругости.

Пластина, вообще говоря, ограничена вдоль оси  $v$ , перпендикулярной к плоскости  $(x, y)$ .

Для деформации вдоль оси  $v$  имеем

$$\epsilon_v = \lambda_0 T \quad (1.1)$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент теплового расширения внешних слоев,  $T = \text{const}$  – приращение температуры.

В дальнейшем будем использовать безразмерные декартовы координаты  $x, y$ , отнесенные к  $L$ . Тогда боковая поверхность заполнителя описывается уравнением  $y = \pm h$ , его концы –  $x = \pm 1$ .

Запишем связь между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  и деформациями  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}/2$  исследуемого трансверсально изотропного материала для случая обобщенно плоской деформации при учете (1.1)

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu_0\sigma_y + E(1+\nu)\Delta\lambda T + E\lambda_0 T$$

$$E\varepsilon_y = \omega\sigma_y - \nu_0\sigma_x + E[\lambda_y + \nu_0(1-\nu)\Delta\lambda]T, \quad E\varepsilon_{xy} = \gamma_0\sigma_{xy} \quad (1.2)$$

$$E = \frac{E_x}{1-\nu^2}, \quad \omega = \frac{k-(k\nu')^2}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{k\nu'}{1-\nu}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{1-\nu^2}, \quad \gamma = \frac{E_x}{G}, \quad \Delta\lambda = \lambda_x - \lambda_0$$

Здесь принято, что ось изотропии материала направлена по оси  $y$ ;  $E_x, E_y$  – модули упругости по осям  $x$  и  $y$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $\nu, \nu'$  – коэффициенты Пуассона;  $\lambda_x, \lambda_y$  – коэффициенты теплового расширения соответственно по осям  $x$  и  $y$ .

Напряжение  $\sigma_y$  определяется из уравнения (1.1).

Уравнения анизотропной теории упругости при учете соотношений (1.1), (1.2) запишем в форме

$$\omega \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \mu = \gamma_0 - 2\nu_0 \quad (1.3)$$

Условия сопряжения слоев имеют вид

$$y = \pm h: \quad \varepsilon_x = \lambda_0 T, \quad \partial W / \partial x = 0 \quad (1.4)$$

где  $W$  – безразмерное перемещение (отнесенное к  $L$ ) по оси  $y$ .

Последнее соотношение (1.4) сводится к равенству

$$y = \pm h: \quad \int_0^x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx = (\mu + \nu_0)\sigma_{xy}$$

На концах внутреннего слоя отсутствуют нагрузки

$$x = \pm 1: \quad \sigma_x = \sigma_{xy} = 0 \quad (1.5)$$

Запишем условие отсутствия внешних воздействий на внешние слои

$$\int_0^1 \sigma_y(x, \xi) dx = 0 \quad (1.6)$$

где  $\xi \in [-h, h]$  – фиксированная координата по оси  $y$ .

В силу симметрии по  $y$  задачи рассматривается область  $0 \leq y \leq h$ .

Решение задачи (1.1)–(1.6), предположительно, имеет особенность (бесконечную) в угловых точках ( $x = \pm 1, y = h$ ) внутреннего слоя. Найдем ограниченное гладкое напряженно-деформированное состояние исследуемого слоя, которое совпадает с решением системы (1.1) – (1.6) всюду, за исключением некоторой малой области угловых точек ( $x = \pm 1, y = h$ ).

Последняя задача формулируется следующим образом.

Выделим в заполнителе слой малой толщины  $h_2 \ll h$ :  $h-h_2 \leq y \leq h$ , где поверхность  $y = h$  – граница контакта с жестким внешним слоем.

В тонком слое  $h-h_2 \leq y \leq h$  требуется найти точное решение уравнения (1.3), соответствующее внутренней смешанной температурной задаче, т.е. это решение должно удовлетворять только граничным условиям на боковых поверхностях  $y = h-h_2$  и  $y = h$ . Этот слой будем называть пограничным.

В слое  $0 \leq y \leq h_1 = h-h_2$  требуется найти точное решение температурной задачи, позволяющее удовлетворить соответствующим граничным условиям на боковых поверхностях  $y = 0, y = h_1$  и на концах  $x = \pm 1$ .

В пограничном слое заполнителя  $h_1 \leq y \leq h$  имеем

$$\sigma_x^{(2)}(x, y) = B_6[3x^2\eta h_2 - \mu(\eta h_2)^3] + B_4[x^2 - 1 - \mu(\eta h_2)^2] -$$

$$\begin{aligned}
& -B_5\omega(\eta h_2)^2 + B_3\eta h_2 + B_2 + \\
& + \sum_{m=1} \cos(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}\eta\delta) + R_{2i,m} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}\eta\delta)] \kappa_i^2 \right\} \\
\sigma_y^{(2)}(x, y) &= B_6(\eta h_2)^3 + B_4(\eta h_2)^2 + B_5 \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) - \quad (1.7) \\
& - \sum_{m=1} \cos(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}\eta\delta) + R_{2i,m} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}\eta\delta)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(2)}(x, y) &= -3B_6x(\eta h_2)^2 - 2B_4x\eta h_2 + \\
& + \sum_{m=1} \sin(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}\eta\delta) + R_{2i,m} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}\eta\delta)] \kappa_i \right\} \\
\delta &= \frac{h_2}{h_1}, \quad \eta = \frac{y-h_1}{h_2}, \quad \alpha_{i,m} = \pi m \kappa_i h_1, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \left[ (\mu \pm (\mu^2 - 4\omega)^{1/2})^{1/2} \right], \quad i=1,2
\end{aligned}$$

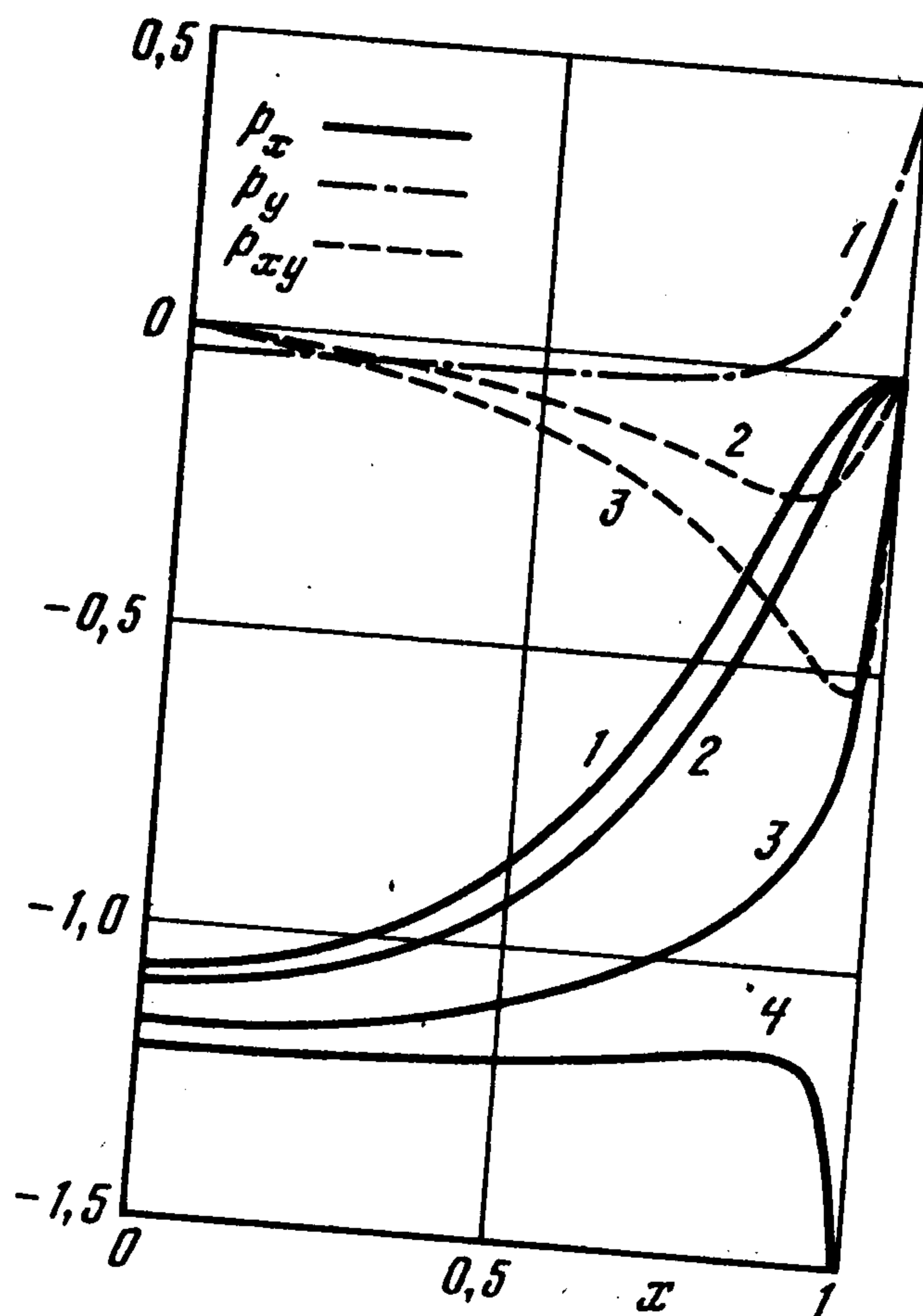
Для трансверсально изотропного материала с ярко выраженной анизотропией можно принять, что  $\mu > 2\sqrt{\omega}$ .

В слое  $0 \leq y \leq h_1$  решение температурной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(1)}(x, y) &= M_6(6x^2z^2 - \mu h_1^2z^4) + N_6[x^4 - 1 - \omega(h_1z)^4] + M_4[x^2 - 1 - \mu(h_1z)^2] - \\
& - N_4\omega(h_1z)^2 + M_2 + \sum_{m=1} \cos(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 C_{i,m} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}z) \kappa_i^2 \right\} - \\
& - \sum_{n=1} \cos(\pi nz) \left\{ \sum_{i=1}^2 D_{i,n} \operatorname{ch}(\beta_{i,n}x) \right\} \\
\sigma_y^{(1)}(x, y) &= M_6 \left[ (h_1z)^2 - \left( x^4 - \frac{1}{5} \right) \frac{1}{\omega} h_1^{-2} \right] + N_6 \left[ 6x^2(h_1z)^2 - \frac{\mu}{\omega} \left( x^4 - \frac{1}{5} \right) \right] + \\
& + M_4(h_1z)^2 + N_4 \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) + N_2 - \sum_{m=1} \cos(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 C_{i,m} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}z) \right\} + \quad (1.8) \\
& + \sum_{n=1} \cos(\pi nz) \left\{ \sum_{i=1}^2 D_{i,n} \operatorname{ch}(\beta_{i,n}x) \kappa_i^2 \right\} \frac{1}{\omega} \\
\sigma_{xy}^{(1)}(x, y) &= -2h_1xz[2(M_6z^2 + N_6x^2) + M_4] + \sum_{m=1} \sin(\pi mx) \left\{ \sum_{i=1}^2 C_{i,m} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}z) \kappa_i \right\} + \\
& + \sum_{n=1} \sin(\pi nz) \left\{ \sum_{i=1}^2 D_{i,n} \operatorname{sh}(\beta_{i,n}x) \kappa_i \right\} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \\
z &= \frac{y}{h_1}, \quad \beta_{i,n} = \frac{\pi n \kappa_i}{h_1 \sqrt{\omega}}, \quad i=1,2
\end{aligned}$$

В формулах (1.7), (1.8)  $C_{i,m}$ ,  $D_{i,n}$  ( $i=1, 2$ ),  $R_{j,m}$  ( $j=1, 4$ ),  $M_{2j}$ ,  $N_{2j}$  ( $j=1, 2, 3$ ),  $B_j$  ( $j=2, 3, 4, 5, 6$ ) – постоянные, подлежащие определению в процессе решения.

Если верхний предел у знака суммы не указан, его следует считать равным бесконечности.



Условия сопряжения пограничного слоя и полосы  $0 \leq y \leq h_1$  запишем в форме

$$\sigma_x^{(1)}(x, h_1) = \sigma_x^{(2)}(x, h_1), \quad \sigma_y^{(1)}(x, h_1) = \sigma_y^{(2)}(x, h_1) \quad (1)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, h_1) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, h_1), \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(x, h_1) = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(x, h_1)$$

где  $W^{(2)}$  – безразмерный прогиб точек пограничного слоя.

Последнее соотношение при учете третьего соотношения (1.9) сводим к уравнению

$$y = h_1 : \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial y} dx = \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(2)}}{\partial y} dx \quad (1.10)$$

В силу симметрии напряжений по координате  $x$  вместо (1.5) имеем

$$x = 1 : \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \quad (1.11)$$

Граничные условия (1.4) на поверхности  $y = h$  имеют вид

$$y = h : \varepsilon_x^{(2)} = \lambda_0 T, \quad \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(2)}}{\partial y} dx = (\mu + \nu_0) \sigma_{xy}^{(2)} \quad (1.12)$$

Из (1.8) следует, что условие (1.6) выполняется автоматически. Выписанные выше постоянные определяются из уравнений (1.9)–(1.12). Наличие частных решений в полиномах уравнения в частных производных (1.3) позволяет усилить сходимость рядов (1.7), (1.8).

Кратко укажем метод составления бесконечной системы алгебраических уравнений для определения искомых постоянных [1].

Используются следующие разложения функций в ряды Фурье:

$$\text{ch}(\alpha_{i,n} z) = \frac{1}{2} (\alpha_{i,n} \text{sh} \alpha_{i,n}) z^2 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^i \cos(\pi m z), \quad i = 1, 2$$

$$\text{ch}(\beta_{i,n} x) = \frac{1}{2} (\beta_{i,n} \text{sh} \beta_{i,n}) x^2 + \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m}^i \cos(\pi m x), \quad i = 1, 2$$

$$2x^2 - x^4 = \frac{7}{15} + 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\pi m)^{-4} \cos(\pi m x) \quad (1.13)$$

$$x - x^3 = -12 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\pi m)^{-3} \sin(\pi m x)$$

Порядок затухания коэффициентов Фурье  $a_{n,m}^i, b_{n,m}^i$  равен  $(\pi m)^{-4}$ .

Первое и второе уравнения (1.9) и уравнение (1.5) разлагаются по базовым функциям  $x^2, 1, \cos(\pi m x)$ . Например, применительно к первому уравнению (1.9) это означает, что в этом уравнении раскладываются в ряды Фурье гиперболические функции и полином  $2x^2 - x^4$  по формулам (1.13). Затем приравниваются к нулю алгебраические выражения со множителями  $\cos(\pi m x), x^2$ , а также сумма свободных членов указанных разложений Фурье.

Аналогично, первое уравнение (1.11) разлагается по базовым функциям  $z^2, 1, \cos(\pi n z)$ .

Другая группа бесконечных алгебраических уравнений получается при разложении по базовым функциям  $x, \sin(\pi m x)$  третьего соотношения (1.9), соотношения (1.10) и второго соотношения (1.12). Здесь достаточно разложить в ряд Фурье полином  $x - x^3$ . Аналогичным образом по функциям  $z, \sin(\pi n z)$  раскладывается второе условие (1.11).

Напряжение  $\sigma_v$  определяется из уравнения (1.1).

**2. Результаты расчетов.** Все расчеты безразмерных напряжений (отнесенных к величине  $E \Delta T$ ), приведенные в этом разделе, выполнены при  $k = 3; \gamma = 6; \nu = 0,2; \nu' = 0,1; h = 0,2, h_2 = h/6$  и  $L_m = 120, L_n = 15$ , где  $L_m$  и  $L_n$  – номера, на которых обрываются ряды Фурье по  $x$  и  $y$  соответственно.

На фигуре показано распределение безразмерных напряжений  $p_x$  (сплошная кривая),  $p_y$  (штрих-пунктирная кривая),  $p_{xy}$  (штриховые кривые) по  $x$  в разных сечениях слоя. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям  $y = 0, y = h_1/2, y = h_1$  и  $y = h$  ( $h_1 = h - h_2$ ).

В таблице приведены величины безразмерных напряжений  $p_y \times 10^3$  в некоторых характерных точках исследуемого внутреннего слоя.

$y$	$x = 0$	0,5	0,8	0,9	1
0	-39	-33	-5	83	451
$h_1/2$	-34	-22	9	48	369
$h_1$	-21	10	77	56	-656
$h$	-15	25	114	104	-1070

Ниже приведены результаты расчета напряжений  $p_x^{(1)}, p_y^{(1)}, p_{xy}^{(1)}$  и  $p_x^{(2)}, p_y^{(2)}, p_{xy}^{(2)}$  на поверхности  $y = h_1$  сопряжения этих двух решений

$x$	0	0,5	0,8	0,9
$p_x^{(1)} \times 10^3$	-1170	-1100	-930	-814
$p_x^{(2)} \times 10^3$	-1170	-1100	-930	-814
$p_y^{(1)} \times 10^4$	-208	102	768	559
$p_y^{(2)} \times 10^4$	-213	97	763	557
$p_{xy}^{(1)} \times 10^3$	0	-132	-353	-486
$p_{xy}^{(2)} \times 10^3$	0	-131	-350	-481

Эти результаты свидетельствуют о высокой степени сходимости рядов Фурье в решении (1.7), (1.8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Бучин, И.В. Панферов. Обобщенно-плоская задача теории упругости о вращении прямой призмы с квадратным поперечным сечением // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 540–543.
2. В.В. Васильев, С.А. Лурье. О точных решениях плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 120–130.

Москва

Поступила в редакцию  
2.II.1999