УДК 539.374

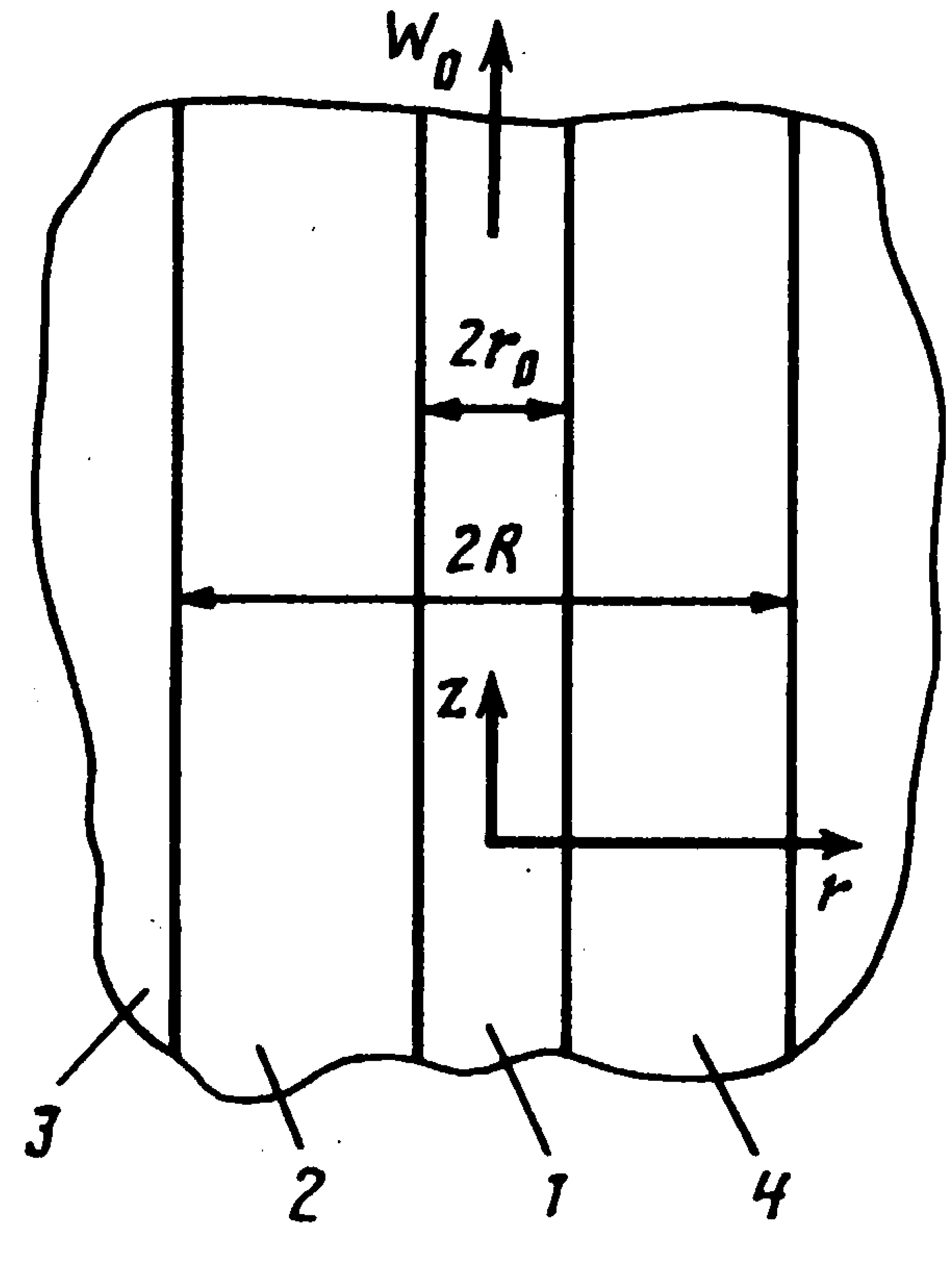
© 2000 г. С.Е. Александров, Р.В. Гольдштейн

ВЫДЕРГИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ВОЛОКНА ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Аналитически решена задача о выдергивании жесткого волокна из упругопластической матрицы. В виде квадратур получена зависимость напряженно-деформированного состояния в матрице от текущего положения волокна.

Выдергивание волокна из матрицы – один из основных видов испытаний для определения некоторых свойств поверхности раздела двух материалов (см. например [1]). Теоретический анализ этого процесса выполнялся, главным образом, на основе линейной теории упругости [1–5]. Рассмотрено [6] течение идеального жесткопластического материала по жесткому цилиндрическому волокну. Из соответствующего решения следует, в частности, что эквивалентная скорость пластической деформации стремится к бесконечности в точках материала матрицы на поверхности волокна. Следовательно, накопленная пластическая деформация в этих точках также стремится к бесконечности, что указывает на неприемлемость такой модели материала в данном случае (разрушение должно наступить прежде, чем создадутся условия, при которых можно пренебречь упругими деформациями).

В связи с этими ниже рассматривается процесс движения бесконечного абсолютно жесткого волокна в бесконечной упругопластической упрочняющейся матрице. Это не позволяет оценить влияние концевых эффектов, но приводит к относительно простому решению, описывающему закономерности процесса на достаточно большом расстоянии от концов волокна. Для анализа разрушения используется модель, основанная на концепции поврежденности [7–10]. Таким образом, предел текучести материала зависит от накопленной пластической деформации и параметра поврежденности. Предполагаются справедливыми условие пластичности Мизеса и ассоциированный закон течения. Модули упругости считаются зависящими от параметра поврежденности.



При сделанных предположениях задача относится к классу задач антиплоской деформации. Были рассмотрены некоторые задачи этого класса, в основном для идеально пластического материала [11–14]. При решении упругопластических задач существенна гладкость решения. Предполагается, что перемещения, деформации и напряжения непрерывны на упругопластической границе [11].

1. Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно жесткое бесконечное цилиндрическое волокно радиуса r_0, движущееся в бесконечной упругопластической среде со скоростью w_0, направленной вдоль оси волокна (фигура: 1 – волокно, 2 – пластическая зона, 3 – упругая зона, 4 – упругопластическая граница). Деформации предполагаются малыми. Предел текучести среды при чистом сдвиге k считается функцией накопленной пластической деформации e^p_{eq} и параметра поврежденности D, представимой в форме [7]

$$k = k_0[1 + f(e^p_{eq})](1 - D) \tag{1.1}$$

Здесь k_0 – предел текучести материала в недеформированном состоянии, $f(e^p_{eq})$ – достаточно произвольная дифференцируемая функция, такая, что $f(0) = 0$ и $df / de^p_{eq} > 0$.

Будем искать решение в цилиндрической системе координат r, φ, z с осью z, совпадающей с осью симметрии волокна, предполагая, что выполняются условия антиплоской деформации. В этом случае отличными от нуля будут компонента тензора скоростей деформации ξ_{rz} и проекция на ось z вектора перемещений u и вектора скорости w. Тогда для изотропного материала единственной отличной от нуля компонентой тензора напряжений будет τ_{rz}. В этом случае условие пластичности принимает форму $|\tau_{rz}| = k$. Без ограничения общности можно положить

$$\tau_{rz} = k \tag{1.2}$$

Уравнение эволюции параметра поврежденности [7, 9] при $\sigma = 0$ (σ – среднее напряжение) имеет вид

$$\dot{D} = \alpha \dot{e}^p_{eq} \tag{1.3}$$

Точка означает производную по времени t, а α – постоянная, характеризующая свойства материала. Условие разрушения определяется уравнением

$$D = D_c = \text{const} \tag{1.4}$$

Связь между ξ_{rz} и τ_{rz} в пластической области имеет вид

$$\xi_{rz} = \lambda \tau_{rz} + (G/2) d[\tau_{rz} /(1 - D)] / dt, \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1.5}$$

а в упругой

$$\xi_{rz} = \dot{\tau}_{rz} /(2G) \tag{1.6}$$

В (1.5) учтено уменьшение модуля сдвига G в связи с развивающейся поврежденностью. Так как рассматриваются малые деформации, то сдвиговая деформация ε_{rz} связана с ξ_{rz} соотношением

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \xi_{rz} \tag{1.7}$$

Предполагается, что скольжение между волокном и матрицей отсутствует. Поэтому

$$w = -w_0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \tag{1.8}$$

Здесь w – проекция скорости точек матричного материала на ось z и $w_0 > 0$. Знак в (1.8) выбран так, чтобы удовлетворялось условие $\xi_{rz} > 0$, следующее из (1.2).

2. Упругое состояние. В соответствии со сделанными предположениями остается одно уравнение равновесия в виде $\partial \tau_{rz} / \partial r + \tau_{rz} / r = 0$. Общее решение этого уравнения имеет форму

$$\tau_{rz} = \tau_0 r_0 / r \tag{2.1}$$

(τ_0 – функция времени). На этой стадии процесса можно вместо (1.6) использовать конечное соотношение между τ_{rz} и $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rz} = \tau_{rz}/(2G)$. Учитывая, что $\varepsilon_{rz} = (\frac{1}{2}) \partial u / \partial r$, из (2.1) найдем $\partial u / \partial r = (\tau_0 r_0)/(Gr)$. Интегрирование этого уравнения дает

$$u = [(\tau_0 r_0)/G] \ln(r / r_0) - w_0 t \tag{2.2}$$

Функция интегрирования в (2.2) выбрана так, что перемещения слоя $r = r_0$ удовлетворяют условию, следующему из (1.8).

Пусть кольцевой слой $r = R_0$ неподвижен в течение процесса. Тогда, из (2.2) найдем

$$\tau_0 = Gr_0^{-1} w_0 t / \ln(R_0 / r_0)$$

Таким образом, из соотношения (2.1) получим

$$\tau_{rz} = Gr^{-1} w_0 t / \ln(R_0 / r_0) \tag{2.3}$$

Сдвиговая деформация определяется уравнением

$$\varepsilon_{rz} = (1/2) r^{-1} w_0 t / \ln(R_0 / r_0) \tag{2.4}$$

Приведенное решение теряет силу, когда τ_{rz} достигает величины k_0. Из (2.3) следует, что величина τ_{rz} максимальна при $r = r_0$, а максимальное перемещение волокна в полностью упругой матрице будет

$$w_0 t_m = (k_0 / G) r_0 \ln(R_0 / r_0) \tag{2.5}$$

При увеличении нагрузки в матрице вблизи поверхности волокна начнет образовываться пластическая зона. В дальнейшем исследовании под деформациями будем понимать их приращения по отношению к распределению, определенному из (2.4) при $t = t_m$.

3. Решение в пластической зоне. Очевидно, что для радиуса упругопластической границы имеем

$$R = r_0 \quad \text{при} \quad t = t_m \tag{3.1}$$

Предположим, что

$$\dot{R} > 0 \tag{3.2}$$

в любой момент времени. Общее решение уравнения равновесия по-прежнему имеет вид (2.1). Подставляя выражение (1.2) в (2.1), получим

$$k = \tau r_0 / r \tag{3.3}$$

Здесь τ – новая функция интегрирования. Вследствие соотношения (3.2) имеем краевое условие

$$k = k_0 \quad \text{при} \quad r = R$$

и тогда из (3.3) найдем

$$\tau = k_0 R / r_0, \quad k = k_0 R / r \tag{3.4}$$

Для многих материалов $D = 0$ при $e_{eq}^p = 0$ [8]. Интегрирование уравнения (1.3) при этом условии дает

$$D = \alpha e_{eq}^p \tag{3.5}$$

Тогда из (1.1), (3.4) и (3.5) следует

$$[1 + f(e_{eq}^p)](1 - \alpha e_{eq}^p) = R / r \tag{3.6}$$

Введем новые независимые переменные

$$\rho = R / r, \quad s = R / r_0 \tag{3.7}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{R}\left(\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial s}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{R}\frac{\partial}{\partial \rho} \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.6) и (3.7) получим

$$e^p_{\text{eq}} = \phi(\rho) \tag{3.9}$$

Здесь $\phi(\rho)$ – известная функция при заданном законе упрочнения. Так как $\dot{e}^p_{\text{eq}} = \sqrt{2/3}(\xi_{ij}\xi^{ij})^{1/2}$, то в рассматриваемом случае и вследствие равенства (1.7)

$$\dot{e}^p_{\text{eq}} = \partial e^p_{\text{eq}} / \partial t = (2/\sqrt{3})\xi^p_{rz} \tag{3.10}$$

Подставляя выражение (3.9) в (3.10) при учете соотношения (3.8), получим

$$\dot{R}R^{-1}\rho d\phi / d\rho = (2/\sqrt{3})\xi^p_{rz} \tag{3.11}$$

Упругая составляющая сдвиговой скорости деформации ξ^e_{rz} (второе слагаемое в (1.5)) определяется при учете соотношений (3.4), (3.5), (3.7)–(3.9) и (3.11). Тогда для полной скорости деформации имеем

$$\xi_{rz} = \xi^e_{rz} + \xi^p_{rz} = \frac{\rho\dot{R}}{2R}\left\{\frac{k_0}{G[1-\alpha\varphi(\rho)]^2}\left[1-\alpha\phi(\rho)+\alpha\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right]+\sqrt{3}\frac{d\phi}{d\rho}\right\} \tag{3.12}$$

Так как τ_{rz} и ξ_{rz} получены, то уравнение (1.5) определяет λ. Подставляя выражение $\xi_{rz} = (1/2)\partial w/\partial r$ в равенство (3.12), при учете соотношений (3.8) найдем

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = -\frac{\dot{R}}{\rho}\left\{\frac{k_0}{G[1-\alpha\phi(\rho)]^2}\left[1-\alpha\phi(\rho)+\alpha\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right]+\sqrt{3}\frac{d\phi}{d\rho}\right\} \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.7) следует, что на поверхности волокна $\rho = R/r_0 = s \geqslant 1$. Поэтому, условие (1.8) преобразуется к виду: $w = -w_0$ при $r = s$. Интегрируя выражение (3.13) с учетом этого условия, получим

$$\begin{gathered} w = \frac{\dot{R}k_0}{G}\int_\rho^s \frac{dz}{z[1-\alpha\phi(z)]} + \frac{\dot{R}k_0\alpha}{G}\left[\frac{1}{1-\alpha\phi(s)} - \frac{1}{1-\alpha\phi(\rho)}\right] + \\ + \sqrt{3}\dot{R}\left[\frac{1}{s}\phi(s) - \frac{1}{\rho}\phi(\rho)\right] + \sqrt{3}\dot{R}\int_\rho^s \frac{1}{z^2}\phi(z)dz - w_0 = \dot{R}\phi_0(\rho, s) - w_0 \end{gathered} \tag{3.14}$$

Так как $w = \partial u/\partial t$, то из соотношений (3.8) и (3.14) найдем

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + s\frac{\partial u}{\partial s} = r_0 s\phi_0(\rho, s) - \frac{s w_0}{\dot{s}} \tag{3.15}$$

$$\phi_0(\rho, s) = \frac{k_0}{G}\ln\frac{\rho}{s} + \sqrt{3}\phi(\rho)\frac{1}{\rho} - \sqrt{3}\phi(s)\frac{1}{s} - \sqrt{3}\int_\rho^s \frac{\phi(z)}{z^2}dz$$

Величина $w_0/\dot{s}$ должна быть определена как функция s из условий на упругопластической границе и решения в упругой зоне. После этого уравнение (3.15) может быть решено для определения перемещения u.

4. Решение в упругой зоне. Очевидно, что общее решение, приведенное в разд. 2, сохраняет силу в упругой зоне. Однако функции интегрирования должны быть определены из других условий. В переменных (3.7) уравнение (2.1) имеет вид: $\tau_{rz} = \tau_0\rho s^{-1}$. На упругопластической границе $\rho = 1$ и $\tau_{rz} = k_0$, поэтому

$$\tau_0 = k_0 s, \quad \tau_{rz} = k_0\rho \tag{4.1}$$

Поскольку в упругой зоне $\rho < 1$, то из второго соотношения (4.1) следует, что условие пластичности в этой зоне не достигается. Из закона Гука получим

$$\partial u / \partial r = k_0 \rho / G \tag{4.2}$$

Переходя в этом уравнении к дифференцированию по ρ с помощью соотношения (3.8) и интегрируя, найдем

$$(u / r_0) = -(k_0 / G) s \ln \rho + u_0(s) \tag{4.3}$$

Скорость w определяется отсюда дифференцированием

$$(w / r_0) = [du_0 / ds - (k_0 / G)(\ln \rho + 1)]\dot{s} \tag{4.4}$$

Из условия $u = 0$ при $r = R_0$ и выражения (4.3) получим функцию $u_0(s)$, после чего найдем

$$u = r_0 N s, \quad w = r_0 N \dot{s} \quad (N = (k_0 / G) \ln[r_0 s / (R_0 \rho)]) \tag{4.5}$$

5. Сшивка решений в упругой и пластической зонах. Условия в напряжениях удовлетворяются решением (4.1). Условие непрерывности скорости при использовании соотношений (3.7), (3.15) и последнего выражения (4.5) при $\rho = 1$ сводится к уравнению

$$r_0 M \dot{s} = w_0, \quad M = \varphi_0(1, s) - (k_0 / G) \ln[r_0 s / R_0] \tag{5.1}$$

которое определяет зависимость s от t. При помощи соотношений (3.7) и (5.1) уравнения (3.14), (3.16) и последнее выражение (4.5) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{w^p}{w_0} = \frac{\phi_0(\rho, s)}{M} - 1, \quad \frac{w^e}{w_0} = \frac{N}{M} \tag{5.2}$$

$$\rho \frac{\partial u^p}{\partial \rho} + s \frac{\partial u^p}{\partial s} = r_0 s [\phi_0(\rho, s) - M] \tag{5.3}$$

Здесь и далее индекс p означает принадлежность величины к пластической зоне, а индекс e – к упругой. Из уравнений (5.2), (5.3) видно, что, как следует из общей теории, решение не зависит от масштаба времени.

Характеристики уравнения (5.3) – прямые в пространстве ρs:

$$\rho = \beta s \tag{5.4}$$

Здесь β – постоянная величина на каждой характеристике. Из первого уравнения (4.5) и непрерывности перемещений следует, что на упругопластической границе

$$u^p = u^e = r_0 (k_0 / G) s \ln(r_0 s / R_0) \tag{5.5}$$

Из структуры характеристик (5.4) следует, что для вычисления u^p из уравнения (5.3) имеем задачу Коши с условием (5.5) при $\rho = 1$.

Отметим, что имеется также условие непрерывности перемещений на границе раздела "волокно" – "матрица", где $\rho = R / r_0$. Однако, как видно из соотношений (3.7) и (5.4), эта линия является характеристикой при $\beta = 1$. Таким образом, на ней не могут быть заданы условия Коши. Условие непрерывности перемещений на этой линии должно обеспечиваться условием непрерывности скорости, которое уже было удовлетворено. Действительно, из (3.14) следует, что $\phi_0(\rho, s) = 0$ при $\rho = s$, т.е. при $\beta = 1$. В этом случае, $u^{(p)}$ определяется из характеристического соотношения

$$ds = -du^p / (r_0 M)$$

Поделив обе части этого равенства на dt, получим при помощи уравнения (5.1), что $du^p/dt = -w_0$. Такое же уравнение имеет место для точек волокна. Следовательно, если в начальный момент относительное смещение точек матрицы по поверхности волокна отсутствует, то условие прилипания будет выполняться в течение всего процесса.

Непрерывность деформаций на упругопластической границе обеспечивается тем, что $\xi_{rz}^p = (\sqrt{3}/2)e_{\text{eq}}^p = 0$ при $\rho = 1$, как следует из равенства (3.6), а упругие деформации равны по обе стороны упругопластической границы ввиду равенства напряжений в ее точках.

6. Анализ результатов. Решение уравнения (5.3) при условиях (5.5) может быть выписано в квадратурах, но для анализа разрушения можно обойтись и без решения этого уравнения. Однако необходимо убедиться, что решение задачи при найденных напряжениях и деформациях существует, что и доказывается существованием решения уравнения (5.3). Учитывая равенство (3.5), условие разрушения (1.4) можно представить в виде $\alpha e_{\text{eq}}^p = D_c$, или, при учете равенства (3.9),

$$\phi(\rho) = D_c/\alpha \tag{6.1}$$

По определению $\dot{e}_{\text{eq}}^p \geqslant 0$. Тогда из соотношений (3.8) и (3.9) следует

$$\dot{R}\rho R^{-1} d\phi / d\rho \geqslant 0 \tag{6.2}$$

Учитывая предположение (3.2), имеем $d\phi/d\rho \geqslant 0$. Таким образом, максимальное значение ϕ достигается при максимально возможной величине ρ. Из (3.7) следует, что $\rho^{(f)} = s^{(f)}$ (поверхность волокна). Тогда условие (6.1) при учете соотношений (3.6) и (3.9) можно записать в виде

$$s^{(f)} = [1 + f(D_c/\alpha)](1 - D_c) \tag{6.3}$$

Отсюда определяется значение $s(f)$, при котором наступит разрушение.

Покажем, что условие (3.2) будет выполнено. Очевидно, оно должно выполняться в начале процесса, иначе не может образоваться пластическая зона. Предположим, что $\dot{R} = 0$ при некотором значении s. Тогда $\xi_{rz}^e = 0$ и из второго равенства (4.6) при учете (3.7), $w^{(e)} = 0$. Из последнего условия находим, что $w^{(e)} = 0$ при $\rho = 1$. Дифференцируя равенство (3.6), получим

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{1}{(df/de_{\text{eq}}^p)(1 - \alpha e_{\text{eq}}^p) - [1 + f(e_{\text{eq}}^p)]\alpha} \tag{6.4}$$

Так как накопленная пластическая деформация e_{eq}^p распределена неравномерно, то производная $d\phi/d\rho$ ограничена (за исключением, возможно, одной точки). В этом случае из (3.11) найдем $\xi_{rz}^p = 0$. Следовательно, $\xi_{rz} = \xi_{rz}^e + \xi_{rz}^p = 0$ и поэтому не могут быть удовлетворены одновременно два условия: $w = 0$ и $w = -w_0$ при $\rho = R/r_0 > 1$.

Тем не менее, из уравнения (6.4) следует, что производная $d\phi/d\rho$ обязательно изменит знак при некотором значении e_{eq}^p (если, конечно, раньше не произойдет разрушение в соответствии с условием (6.2)). Действительно, процесс пластического деформирования может начаться, если $d\phi/d\rho > 0$. Следовательно, $d\phi/d\rho > 0$ при $e_{\text{eq}}^p = 0$. С другой стороны, из соотношения (6.4) ясно, что $d\phi/d\rho < 0$ при $e_{\text{eq}}^p = \alpha^{-1}$. Пусть в некоторый момент времени условие $d\phi/d\rho = 0$ выполнилось при $\phi = \phi_*$. Из равенства (3.9) следует, что это соответствует некоторой критической величине e_{eq}^p. До этого момента выполнялось условие $d\phi/d\rho > 0$. Таким образом, максимальная величина ϕ и, следовательно e_{eq}^p, достигалась на поверхности волокна. Это означает, что условие

$d\phi/d\rho = 0$ может выполняться только на поверхности матрицы. Действительно, предположение, что условие $d\phi/d\rho = 0$ выполнилось в некоторой точке $1 \leqslant \rho < R/r_0$ приводит к противоречию, так как тогда в некоторый ранний момент времени условие $\phi = \phi_*$ было бы выполнено при $\rho = R/r_0$.

Если условие $d\phi/d\rho = 0$ достигается, то решение поставленной задачи не существует. Иногда это тоже трактуется как наступление разрушения [15]. Как показано выше, при такой точке зрения разрушение, как и в случае выполнения условия (6.2), наступит на границе раздела двух материалов.

Несмотря на то, что условие разрушения выписано в конечной форме (6.2), связь момента разрушения с текущим положением волокна требует численного интегрирования уравнения (5.1), которое определяет перемещение волокна, соответствующее $s^{(f)}$. Это перемещение должно быть добавлено к перемещению $w_0 t_m$, определенному соотношением (2.5), для нахождения полного перемещения волокна до момента разрушения. Отметим также, что решение (5.1) требует предварительного численного интегрирования в равенстве (3.15) для определения $\phi_0(\rho, s)$, в частности $\phi_0(1, s)$. Результат этого последовательного интегрирования позволяет по конечным формулам (3.4), (4.1), (5.2) и (5.4) восстановить напряженно-деформированное состояние в матрице (за исключением $u^{(p)}$) при любом положении волокна. При этом к сдвиговой деформации должна быть добавлена величина ε_{rz} из (2.4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-05017) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0083).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhou L.M., Kim J.-K., Mai Y.-W.* On the single fibre pull-out problem: effect of loading method // Compos. Sci. Technol. 1992. V. 45. P. 153–160.
2. *Marotzke C.* The elastic stress field arising in the single-fiber pull-out test // Compos. Sci. Technol. 1994. V. 50. № 3. P. 393–405.
3. *Zucchini A., Hui C.Y.* Detailed analysis of the fiber pull-out test // J. Mater. Sci. 1996. V. 31. № 21. P. 5631–5641.
4. *Kumar R.K., Reddy J.N.* Stress distributions during fiber pull-out // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. V. 63. № 2. P. 301–306.
5. *Quek M.Y., Yue C.Y.* An improved analysis for axisymmetric stress distributions in the single fiber pull-out test // J. Mater. Sci. 1997. V. 32. № 20. P. 5457–5465.
6. *Spenser A.J.M.* A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibers // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 3. P. 197–209.
7. *Lemaitre J.* A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Trans. ASME. J. Engng Mater. and Technol. 1985. V. 107. № 1. P. 83–89.
8. *Lemaitre J.* Formulation und identification of damage kinetic constitutive equations // Continuum Damage Mechanics/Eds D. Krajcinovic and J. Lemaitre. Wien: Springer, 1987. P. 37–89.
9. *Zheng M., Luo Z.J., Zheng X.* A new damage model for ductile materials // Engng Fract. Mech. 1992. V. 41. № 1. P. 103–110.
10. *Bonora N.* A nonlinear CDM model for ductile failure // Engng Fract. Mech. 1997. V. 58. № 1/2. P. 11–28.
11. *Аннин Б.Д., Черепанов Г.П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
12. *Галин Л.А.* Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984. 232 с.
13. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
14. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
15. *Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Краевая задача механики деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупорядочения // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 6. С. 122–132.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1999