

УДК 539.3

© 2000 г. Д.А. Пожарский

О ТРЕХМЕРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТРЕНИЯ

Для решения первой основной трехмерной задачи теории упругости для клина используется метод [1], состоящий в сведении ее, при помощи комплексного интеграла Фурье – Конторовича – Лебедева, к обобщенной по И.Н. Векуа краевой задаче Гильберта. Даются формулы, позволяющие рассчитать полностью вектор перемещений и тензор напряжений в пространственном упругом клине, одна грань которого свободна от напряжений, а на другой действует нормальная и касательная (перпендикулярно ребру) нагрузка. На основе полученного решения рассматривается (в квазистатической постановке) контактная задача о движении штампа по грани упругого клина в направлении, перпендикулярном ребру клина. Штмп – сильно вытянутый вдоль ребра эллиптический параболоид, поэтому можно приближенно считать, что силы трения коллинеарны направлению движения. Исследуется влияние коэффициента трения Кулона на зависимость между вдавливающей силой и осадкой штампа при разных углах клина. Дан расчет эффективного напряжения на оси симметрии области контакта при разных углах клина и в зависимости от удаленности штампа от ребра клина, а также от направления и величины сил трения.

Используемый ниже метод применялся [2] при решении задачи о действии нормальной нагрузки на одну грань трехмерного клина, при разных граничных условиях на другой грани. Этим же методом было получено [3] решение задачи о действии на одной грани клина нормальной и касательной (перпендикулярно ребру клина) нагрузки и приведено выражение для нормального перемещения на этой грани. Полученные ниже формулы обобщают известные решения задач Буссинеска и Черрути для полупространства [4], а постановка контактной задачи обобщает известный случай движения штампа по полупространству [5]. Для решения интегрального уравнения контактной задачи с неизвестной областью контакта используется метод нелинейных граничных интегральных уравнений [6, 7], позволяющий одновременно и достаточно быстро определить искомые контактные давления и область контакта. Вариационные методы, являющиеся более универсальными, к решению трехмерных контактных задач с трением применялись в [8, 9]. Результаты, полученные для упругого клина, важны в приложениях к зубчатым передачам Новикова [10, 11].

1. Трехмерная задача теории упругости для клина. Пространственный упругий клин с углом раствора α и упругими характеристиками ν (коэффициент Пуассона) и G (модуль сдвига) рассмотрим в цилиндрических координатах r, φ, z , где ось z направлена по ребру клина так, что система координат – правая. Пусть грань клина $\varphi = -\alpha/2$ свободна от напряжений, а на грани $\varphi = \alpha/2$ действует нормальная нагрузка интенсивности $q(r, z)$, распределенная по конечной области Ω , и касательная нагрузка, перпендикулярная ребру клина, распределенная в той же области и пропорциональная нормальной с коэффициентом пропорциональности μ . Для простоты считаем, что область Ω симметрична относительно полуоси $z = 0$, и $q(r, -z) = q(r, z)$. Граничные

условия запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi = -\alpha/2: \quad \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \\ \varphi = \alpha/2: \quad \sigma_\varphi = -q(r, z), \quad \tau_{r\varphi} = -\mu q(r, z) \quad (r, z) \in \Omega \\ \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \quad \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Кроме того, на бесконечности напряжения в клине исчезают. Решение уравнений равновесия Ламе в координатах r, φ, z может быть выражено через три произвольные гармонические функции $\Phi_n = \Phi_n(r, \varphi, z)$ ($n = 0, 1, 2$) по формулам [1, 2]

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_1) - \omega_1, \quad \omega_1 = \sin \varphi \Phi_1 - \cos \varphi \Phi_2 \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} - \omega_2, \quad \omega_2 = \cos \varphi \Phi_1 + \sin \varphi \Phi_2 \\ u_z &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{r}{4(1-\nu)} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При помощи закона Гука из формул (1.2) получаются выражения для напряжений ([2], с. 147, формула (2)). Гармонические функции Φ_n будем разыскивать в форме интегралов Фурье – Конторовича – Лебедева в комплексной плоскости ([2], с. 147, формула (3)). Применяя известную технику [1, 2], решение краевой задачи (1.1) найдем в виде (1.2), где (переходим к вещественным интегралам Конторовича – Лебедева, $n = 0, 1, 2$; $m = 1, 2$)

$$\Phi_n(r, \varphi, z) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh } \pi \tau [A_n(\tau, \beta) \text{ch } \varphi \tau + B_n(\tau, \beta) \text{sh } \varphi \tau] K_{it}(\beta r) \cos \beta z d\tau d\beta$$

$$A_0(\tau, \beta) = -\frac{1-2\nu}{\beta \text{sh}(\alpha\tau/2)} \int_0^\infty W_1(u) \psi_1(u, \beta) \frac{\text{sh}(\pi u/2)}{\Delta_+(u, \tau)} du$$

$$B_0(\tau, \beta) = \frac{1-2\nu}{\beta \text{ch}(\alpha\tau/2)} \int_0^\infty W_2(u) \psi_2(u, \beta) \frac{\text{sh}(\pi u/2)}{\Delta_+(u, \tau)} du$$

$$A_1(\tau, \beta) = R_1(\tau) C_2(\tau, \beta) - S(\tau, \beta) \left[\frac{\tau R_1(\tau)}{1-2\nu} + S_1(\tau) \right]$$

$$B_1(\tau, \beta) = R_2(\tau) C_1(\tau, \beta) - S(\tau, \beta) \left[\frac{\tau R_2(\tau)}{1-2\nu} + S_2(\tau) \right]$$

$$A_2(\tau, \beta) = S_2(\tau) C_1(\tau, \beta) - S(\tau, \beta) \left[\frac{\tau S_2(\tau)}{1-2\nu} - R_2(\tau) \right]$$

$$B_2(\tau, \beta) = S_1(\tau) C_2(\tau, \beta) - S(\tau, \beta) \left[\frac{\tau S_1(\tau)}{1-2\nu} - R_1(\tau) \right]$$

$$C_m(\tau, \beta) = (-1)^m 2(1-\nu) \frac{W_m(\tau)}{\text{ch}(\pi\tau/2)} \psi_m(\tau, \beta), \quad \psi_m(\tau, \beta) = F_m^*(\tau, \beta) + \Psi_m^*(\tau, \beta)$$

$$S(\tau, \beta) = -\mu \iint_\Omega \frac{q(x, y)}{G} K_{it}(\beta x) \cos \beta y dx dy \quad (1.3)$$

$$F_m^*(\tau, \beta) = -\iint_\Omega \frac{q(x, y)}{G} F_m(\tau, \beta x) \cos \beta y dx dy$$

$$\begin{aligned}
F_m(\tau, \beta x) &= \left[1 - \frac{\mu f_m(\tau)}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right] \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} K_{i\tau}(\beta x) + \\
&+ \frac{\mu}{2(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \int_0^\infty h_m(t) K_{it}(\beta x) \frac{\operatorname{sh} \pi t}{\Delta_-(t, \tau)} dt \\
R_{1,2}(\tau) &= \begin{cases} \operatorname{ch}(\alpha\tau/2) \\ \operatorname{sh}(\alpha\tau/2) \end{cases} \frac{2 \cos(\alpha/2)}{\operatorname{ch} \alpha\tau \pm \cos \alpha}, \quad S_{1,2}(\tau) = \begin{cases} \operatorname{sh}(\alpha\tau/2) \\ \operatorname{ch}(\alpha\tau/2) \end{cases} \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\operatorname{ch} \alpha\tau \pm \cos \alpha} \\
W_{1,2}(\tau) &= \pm \frac{\operatorname{ch} \alpha\tau \mp \cos \alpha}{\operatorname{sh} \alpha\tau \pm \tau \sin \alpha}, \quad h_{1,2}(\tau) = \frac{(1-2\nu) \operatorname{sh} \alpha\tau \mp \tau \sin \alpha}{\operatorname{ch} \alpha\tau \mp \cos \alpha} \\
f_{1,2}(\tau) &= \frac{\pm \tau}{W_{1,2}(\tau)} \pm \frac{2(1-\nu)(1-2\nu) \sin \alpha}{\operatorname{ch} \alpha\tau \mp \cos \alpha}, \quad \Delta_\pm(u, \tau) = \operatorname{ch} \pi u \pm \operatorname{ch} \pi\tau
\end{aligned}$$

Здесь $K_{i\tau}(x)$ – функция Макдональда [14]; первому нижнему индексу соответствует верхний знак (функция), второму – нижний. Функции $\psi_m^*(\tau, \beta)$ ($m = 1, 2$) определяются из интегральных уравнений Фредгольма второго рода ($0 \leq \tau < \infty$)

$$\psi_m^*(\tau, \beta) = (1-2\nu) \int_0^\infty L_m(\tau, u) [\psi_m^*(u, \beta) + F_m^*(u, \beta)] du \quad (1.4)$$

$$L_m(\tau, u) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_m(u) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_m(t)}{\Delta_+(t, \tau) \Delta_+(t, u)} dt$$

$$g_{1,2}(\tau) = \begin{cases} \operatorname{cth}(\alpha\tau/2) \\ \operatorname{th}(\alpha\tau/2) \end{cases} \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha\tau \mp \cos 2\alpha}$$

Формальное решение уравнений (1.4) может быть записано в виде функциональных рядов по степеням $(1-2\nu)$, равномерно сходящихся в пространстве непрерывных ограниченных на полуоси функций [3]. При проведении практических расчетов для решения уравнений (1.4) следует использовать метод механических квадратур и квадратурную формулу Гаусса [12]. Сингулярные интегралы в выражении (1.3) для функций $F_m(\tau, \beta x)$ ($m = 1, 2$) рассчитываются путем стандартной регуляризации после разбиения бесконечного промежутка интегрирования с целью локализации сингулярности на конечном интервале.

При помощи формул (1.2)–(1.4) и закона Гука можно рассчитать вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерном клине при условиях (1.1). Эти формулы обобщают известные решения задач Буссинеска и Черрути для полупространства [4].

Покажем это для перемещений границы полупространства, положив в (1.2)–(1.4) $\alpha = \pi$ и $\varphi = \pi/2$. При $\alpha = \pi$ имеем

$$\psi_{1,2}^*(\tau, \beta) \equiv 0, \quad W_1(\tau) = \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2}, \quad W_2(\tau) = -\operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2}, \quad f_1(\tau) = \tau \operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2} \quad (1.5)$$

$$f_2(\tau) = \tau \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2}, \quad h_1(\tau) = (1-2\nu) \operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2}, \quad h_2(\tau) = (1-2\nu) \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2}$$

и для нормального перемещения на границе полупространства получаем выражение

$$\begin{aligned}
u_\varphi &= - \iint_\Omega \frac{q(x, y)}{\theta} V(x, y, r, z) dx dy, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu} \\
V(x, y, r, z) &= \frac{2}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{ch} \pi u K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos \beta y \cos \beta z d\beta du +
\end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu(1-2\nu)}{\pi^3 2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u \left[\operatorname{cth} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \operatorname{th} \frac{\pi t}{2} \operatorname{sh} \pi t \frac{K_{it}(\beta x)}{\Delta_-(t, u)} dt + \right. \\
& \left. + \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2} \operatorname{sh} \pi t \frac{K_{it}(\beta x)}{\Delta_-(t, u)} dt \right] K_{iu}(\beta r) \cos \beta y \cos \beta z d\beta du = \xi_1 - \frac{\mu(1-2\nu)(r-x)}{2(1-\nu)} \xi_2
\end{aligned}$$

$$\xi_m = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_-^m} + \frac{1}{R_+^m} \right), \quad R_\pm = [(r-x)^2 + (z \pm y)^2]^{1/2}$$

совпадающее, при учете четности задачи по z , с известными формулами ([4], с. 276, 279, при $z = 0$; отметим, что в [4] (рис. 9.4) орт e_z противонаправлен введенному выше орту e_φ и было выбрано противоположное направление касательной нагрузки). При вычислении квадратур в (1.6) следует пользоваться формулами 2.5.30.8 [13], 2.16.14.4 (при $\nu = 0$, пропущена величина c в аргументе функции Макдональда), 2.16.48.20, 2.16.52.6 [14], а также значением интеграла ($\beta > 0$)

$$\int_0^\infty \operatorname{th} u \cos(\beta r \operatorname{sh} u) \sin(\beta x \operatorname{sh} u) du = \frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn}(x-r) e^{-\beta|x-r|} + e^{-\beta|x+r|}) \quad (1.7)$$

и тем фактом, что для нечетной функции $W(u)$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^\infty \frac{W(u) \operatorname{sh} \pi u}{\Delta_-(u, t)} du &= \frac{1}{\pi \operatorname{ch}(\pi t/2)} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} W(u) \operatorname{th} x \sin xu \cos xt dx du = \\
&= -\frac{1}{\pi \operatorname{sh}(\pi t/2)} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W(u) \operatorname{th} x \cos xu \sin xt dx du \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Представления сингулярного интеграла (1.8) доказываются при помощи интегрального преобразования Фурье.

Аналогично, учитывая значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{u \operatorname{sh} \pi u K_{iu}(x)}{\Delta_+(u, t)} du = x K_{it}(x) \quad (1.9)$$

находим, что при $\alpha = \pi$ и $\varphi = \pi/2$

$$\Phi_0\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right) = - \iint_{\Omega} \frac{q(x, y)}{\theta} \Phi(x, y, r, z) dx dy \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, r, z) &= -\frac{1-2\nu}{\pi^3(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \pi t \operatorname{ch} \pi u + 1}{\Delta_+(t, u)} K_{it}(\beta r) K_{iu}(\beta x) \frac{\cos \beta z \cos \beta y}{\beta} d\beta dt du + \\
&+ \frac{\mu[x + (1-2\nu)^2(r-x)]}{4(1-\nu)^2} \xi_1
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = \sin \frac{\pi}{2} \Phi_1\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right) = \frac{\mu}{1-\nu} \iint_{\Omega} \frac{q(x, y)}{\theta} \xi_1 dx dy$$

Интеграл по переменной β расходится, но здесь, согласно выражениям (1.2), требуются частные производные Φ_0 по r и z , которые вычисляются при помощи представлений 9.6.22 [12], соотношения

$$\operatorname{ch} \pi t \operatorname{ch} \pi u + 1 = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi t}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi u}{2} - (\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u) \quad (1.11)$$

и значений интегралов 2.5.6.4, 2.5.48.2 [13], 2.16.48.1 [14]. В результате на границе

полупространства имеем

$$u_r = -\iint_{\Omega} \frac{q(x, y)}{\theta} U(x, y, r, z) dx dy, \quad u_z = -\iint_{\Omega} \frac{q(x, y)}{\theta} W(x, y, r, z) dx dy \quad (1.12)$$

$$U(x, y, r, z) = \frac{(1-2\nu)(r-x)}{2(1-\nu)} \xi_2 + \mu \left[\xi_1 + \frac{\nu(r-x)^2}{1-\nu} \xi_3 \right]$$

$$W(x, y, r, z) = \frac{(1-2\nu)(z-y)}{2(1-\nu)} \xi_2 + \frac{\mu\nu(r-x)(z-y)}{1-\nu} \xi_3$$

что совпадает с известными формулами ([4], с. 276, 279, при $z = 0$; отметим, что в [4] (рис. 9.4) орты e_x и e_y совпадают с введенными выше ортами e_r и e_z соответственно).

2. Контактная задача для клина. Изучим квазистатическую контактную задачу, когда жесткий штамп, первоначально внедренный в грань упругого клина, начинает достаточно медленно двигаться вдоль этой грани (без перекоса) в направлении, перпендикулярном ребру клина. Штамп – сильно вытянутый вдоль ребра эллиптический параболоид, поэтому можно приближенно считать, что силы трения коллинеарны направлению движения (и направлены против движения). Постановка задачи обобщает известный случай движения штампа по полупространству [5] на случай клина угла раствора α , одна грань которого свободна от напряжений. Задача симметрична по координате z .

Используем полученное выше решение краевой задачи (1.1). Удовлетворяя граничному условию контакта тел $u_\varphi(r, \alpha/2, z) = -[\delta - f(r, z)]$, $(r, z) \in \Omega$, где δ – осадка штампа, $f(r, z) = (r-a)^2/(2R_1) + z^2/(2R_2)$ – форма основания штампа ($R_1 \ll R_2$), относительно неизвестного нормального контактного давления $\sigma_\varphi(r, \alpha/2, z) = -q(r, z)$ в неизвестной области контакта $(r, z) \in \Omega$ получим интегральное уравнение (см. также формулу (4) [3])

$$\iint_{\Omega} q(x, y) \left[\frac{1}{R_-} - \mu \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{r-x}{R_-^2} + K(x, y, r, z) \right] dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)] \quad (2.1)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh} \frac{\pi u}{2} W(u, \beta x) K_{iu}(\beta r) \cos \beta(y-z) d\beta du$$

$$W(u, \beta x) = W_1(u) \psi_1^*(u, \beta x) - W_2(u) \psi_2^*(u, \beta x) + 2 \text{ch} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\beta x) [W_0(u) -$$

$$- \text{cth} \pi u + \mu f_0(u)] + \frac{\mu}{2(1-\nu)} \text{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \{W_1(u) h_1(t) - W_2(u) h_2(t) -$$

$$-(1-2\nu) \left[\text{cth} \frac{\pi u}{2} \text{th} \frac{\pi t}{2} + \text{th} \frac{\pi u}{2} \text{cth} \frac{\pi t}{2} \right] \} \text{sh} \pi t \frac{K_{iu}(\beta x)}{\Delta_-(t, u)} dt$$

$$W_0(u) = \frac{\text{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha}{\text{ch} 2\alpha u - 2u^2 \sin^2 \alpha - 1}, \quad f_0(u) = \frac{2u \sin^2 \alpha}{\text{ch} 2\alpha u - 2u^2 \sin^2 \alpha - 1}$$

Функции $\psi_m^*(u, \beta x)$ ($m = 1, 2$) удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (1.4), в которых вместо функций $F_m^*(u, \beta)$ следует подставить функции $F_m(u, \beta x)$ (1.3). В ядре интегрального уравнения (2.1) при помощи формул (1.6) явно выделена особая часть для улучшения сходимости интегралов. Когда коэффициент трения Кулона $\mu > 0$ штамп начинает двигаться к ребру клина, при $\mu < 0$ – от ребра. При $\alpha = \pi$ уравнение (2.1) совпадает с уравнением (3) [5] (с учетом движения против положительного направления оси r при $\mu > 0$).

μ	$\delta \times 10^3 = 4$	4,5	5	5,5	6	6,5
-0,2	0,531	0,632	0,740	0,849	0,965	1,09
-0,1	0,510	0,605	0,708	0,812	0,920	1,03
0	0,491	0,581	0,678	0,777	0,879	0,986
0,1	0,474	0,559	0,650	0,746	0,841	0,942
0,2	0,457	0,539	0,625	0,716	0,808	0,903

Для решения интегрального уравнения (2.1) при условии $q(r, z) = 0$, $(r, z) \in \partial\Omega$, применим метод нелинейных граничных интегральных уравнений [6, 7], позволяющий одновременно определить нормальные контактные давления и область контакта. Основные свойства интегрального оператора, порожденного ядром уравнения (2.1) при $\mu = 0$ [7] (строгая положительность, полная непрерывность) сохраняются и при $\mu \neq 0$ (для случая $\alpha = \pi$ это отмечено ранее ([6], с. 19)). Поэтому известные результаты, касающиеся существования, единственности и метода построения решения уравнения (2.1) при $\mu = 0$ [7], целиком переносятся на рассматриваемый случай учета сил трения.

Далее используем безразмерные обозначения (2.1) [7] (штрихи опустим, см. также абзац, следующий за формулами (2.1) [7]). Расчеты проведены для углов $\alpha = 70, 90, 110, 180^\circ$.

Анализ результатов показывает, что при $\alpha = 180^\circ$ величина $P(\delta)$ [7] практически не зависит от μ . Это можно объяснить следующим образом. При $\alpha = 180^\circ$ решение уравнения (2.1) можно искать в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon_* = \mu(1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$ [5]. Отбрасывая члены порядка ε_*^2 (при $\mu = 0,2$ и $\nu = 0,3$ имеем $\varepsilon_*^2 \approx 0,003$), получим $q(r, z) = q_0(r, z) \mp \varepsilon_* q_1(r, z) + O(\varepsilon_*^2)$, где знак минус (плюс) берется для случая движения штампа в положительном (отрицательном) направлении оси r . Функция $q_0(r, z)$ удовлетворяет интегральному уравнению контактной задачи для полупространства без трения, через эту функцию (независимо от ε_*) выражается функция $q_1(r, z)$. Нормальная сила P (интеграл от функции $q(r, z)$ по области Ω), очевидно, не зависит от направления движения штампа по полупространству. Поэтому ясно, что интеграл от функции $q_1(r, z)$ по области контакта должен быть равен нулю. Таким образом, порядок членов, описывающих влияние сил трения на зависимость $P(\delta)$, будет $o(\varepsilon_*)$.

Трение будет существенно влиять на эксцентриситет нормальной силы (и на момент), обеспечивающий движение штампа без перекоса. Известно, что в случае осесимметричной контактной задачи с трением [15], силы трения вообще не влияют на зависимость $P(\delta)$ (были получены две независимые системы деформаций и напряжений: из одной определяется нормальная сила независимо от μ , а из другой – зависящий от трения момент). Чем меньше угол клина, тем ощутимее влияние трения и направления движения на зависимость $P(\delta)$.

В таблице (четвертьпространство, $\alpha = 90^\circ$) приведены значения нормальной силы $P \times 10^3$ в зависимости от осадки $\delta \times 10^3$ при разных коэффициентах трения μ . При этом в обозначениях [7] $A = 0,1$; $B = 0,005$; $\varepsilon = 0,15$; $\lambda = 1$; $\nu = 0,3$ ($\gamma = 0$).

Чем ближе штамп к ребру клина с углом раствора $\alpha < \pi$, т.е. чем меньше λ [7], тем меньше значение $P(\delta)$, что обусловлено увеличением податливости упругого материала. Этот вывод, известный при отсутствии трения [7], сохраняется и при фиксированном $\mu \neq 0$. Если штамп движется к ребру клина ($\mu > 0$; величина λ фиксирована), то значение $P(\delta)$ меньше (штамп легче вдавить), чем при $\mu = 0$ и том же значении λ . Если же штамп удаляется от ребра ($\mu < 0$; величина λ фиксирована), то значение $P(\delta)$ больше, чем при $\mu = 0$ и том же значении λ . Этот рост силы при $\mu < 0$ происходит за счет роста максимального контактного нормального давления, площадь же области контакта при $\mu < 0$ может быть меньше, чем при $\mu = 0$, которая, в свою очередь, меньше площади области Ω при $\mu > 0$ (например, при $\alpha = 70^\circ$; $\lambda \approx 0$; $\delta \times 10^3 = 6,5$;

значения остальных параметров, как в таблице). При $\delta = \text{const}$ движение штампа в направлении ребра клина ($\mu > 0$) препятствует нарушению контакта в окрестности ребра (отходу ребра от штампа), наблюдаемому при $\mu = 0$ и $\lambda \approx 0$ для достаточно острых углов α [7].

3. Анализ эффективного напряжения. После решения контактной задачи при знании функции $q(r, z)$ и площадки контакта Ω возможно определение играющего важную роль в приложениях [10, 11] безразмерного эффективного напряжения $\sigma'_e = \sigma_e / (2\pi\theta)$. Методом оптической аналогии было установлено [15, с. 67], что при трении под гладким штампом зона максимальных тангенциальных напряжений поднимается близко к границе упругой полуплоскости. В качестве примера (в рамках понятия поверхностной прочности) рассчитаем σ'_e на оси симметрии области контакта при ($z = 0$) по первой формуле (3.1) [7] и формулам (штрих опустим, ср. с (3.1)–(3.3) [7])

$$\sigma_e = 2^{-1/2} [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\varphi}^2]^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\nu}{1-\nu} q(r, 0), \quad \sigma_\varphi = -q(r, 0)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} q(r, 0), \quad \tau_{r\varphi} = -\mu q(r, 0)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1-2\nu}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_1(\beta, t, u) K_*(\beta, t, r_0) d\beta dt du -$$

$$-\frac{1}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\beta, t) \left[\frac{r_0}{2} K_*(\beta, t, r_0) + (1-2\nu) \text{Re} K_{1+it}(\beta r_0) \right] d\beta dt -$$

$$-Q(r_0) - (1-2\nu)q(r, 0) - \frac{\mu(1-\nu)}{\pi} \iint_\Omega \frac{1}{[(r_0-x)^2 + y^2]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} q(x, y) dx dy$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_1(\beta, t, u) \beta K_{it}(\beta r_0) d\beta dt du +$$

$$+\frac{r_0}{2\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\beta, t) \beta K_{it}(\beta r_0) d\beta dt + Q(r_0)$$

$$Q(r_0) = \frac{1-2\nu}{2\pi} \iint_\Omega \frac{y}{(r_0-x)^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} q(x, y) dx dy +$$

$$+\frac{\mu\nu}{\pi} \iint_\Omega \frac{(r_0-x)y}{[(r_0-x)^2 + y^2]^{3/2}} \frac{\partial}{\partial y} q(x, y) dx dy, \quad r_0 = \begin{cases} r + \lambda (\lambda > \varepsilon) \\ r + \varepsilon (\lambda \leq \varepsilon) \end{cases}$$

$$K_*(\beta, t, r_0) = \beta K_{it}(\beta r_0) - [t \text{Im} K_{1+it}(\beta r_0) - \text{Re} K_{1+it}(\beta r_0)] / r_0$$

$$E_1(\beta, t, u) = \frac{\text{sh} \pi t \text{sh} \pi u}{\Delta_+(t, u)} \left\{ W_1(u) \text{cth} \frac{\alpha t}{2} \frac{\Psi_1(u, \beta)}{\text{ch}(\pi u / 2)} - W_2(u) \text{th} \frac{\alpha t}{2} \frac{\Psi_2(u, \beta)}{\text{ch}(\pi u / 2)} - \right.$$

$$\left. - \text{cth} \frac{\pi u}{2} \text{cth} \frac{\pi t}{2} \left[\left(1 - \frac{\mu u \text{th}(\pi u / 2)}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right) S_*(u, \beta) + \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty \text{th} \frac{\pi \tau}{2} \text{sh} \pi \tau \frac{S_*(\tau, \beta)}{\Delta_-(\tau, u)} d\tau \right] - \text{th} \frac{\pi u}{2} \text{th} \frac{\pi t}{2} \left[\left(1 - \frac{\mu u \text{cth}(\pi u / 2)}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right) S_*(u, \beta) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \text{cth} \frac{\pi \tau}{2} \text{sh} \pi \tau \frac{S_*(\tau, \beta)}{\Delta_-(\tau, u)} d\tau \right] \right\}$$

$$E_2(\beta, t) = -2\beta \operatorname{sh} \pi t \left\{ \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch}(\pi t / 2)} \left[\frac{\Psi_1(t, \beta)}{\operatorname{sh} \alpha t + t \sin \alpha} - \frac{\Psi_2(t, \beta)}{\operatorname{sh} \alpha t - t \sin \alpha} \right] - \frac{\mu}{1 - \nu} S_*(t, \beta) \left[\frac{\operatorname{sh} 2\alpha t - t(1 - 2\nu)^{-1} \sin 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha t - \cos 2\alpha} - \operatorname{cth} \pi t \right] \right\}$$

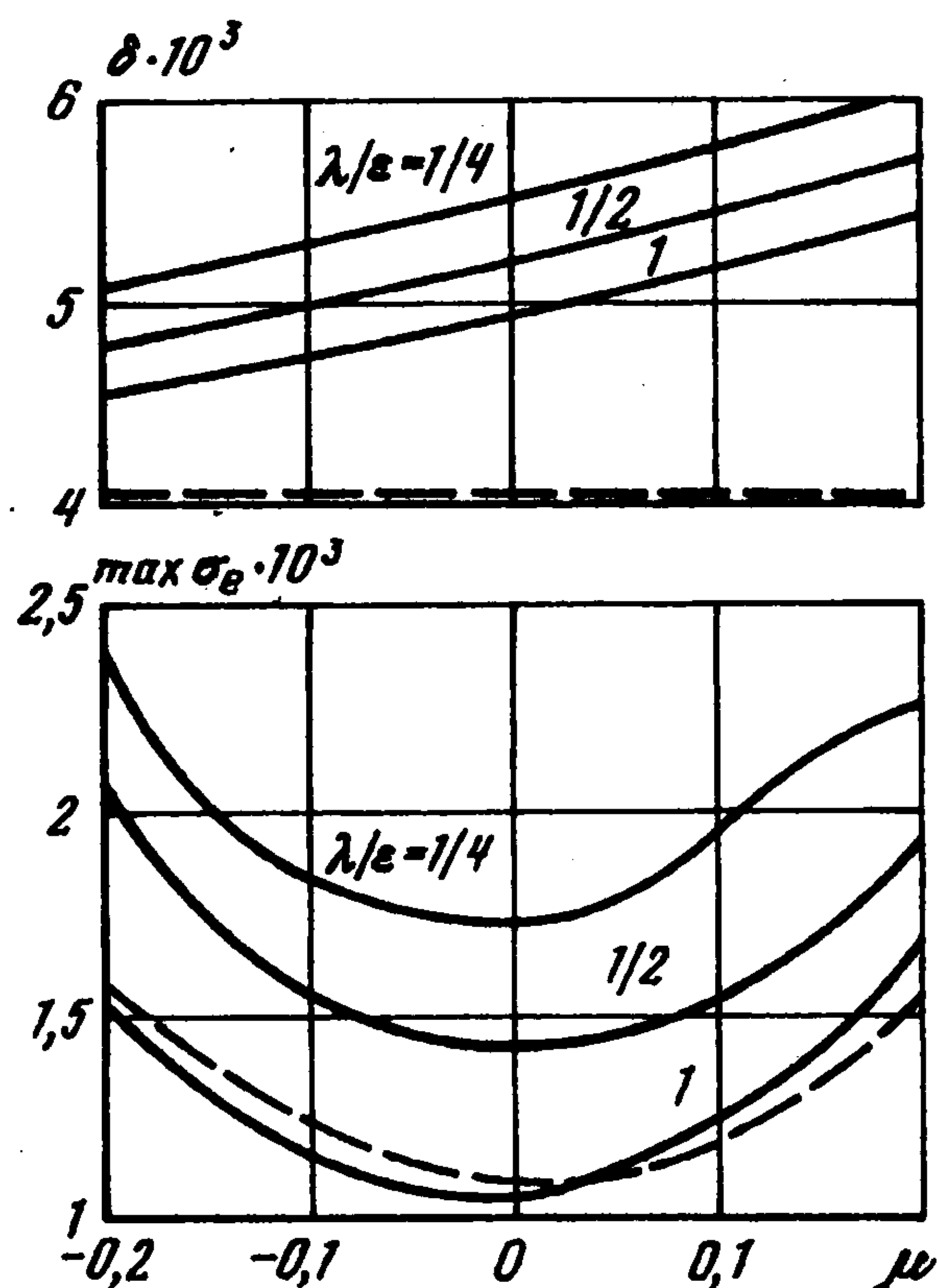
$$S_*(t, \beta) = - \iint_{\Omega} q(r, z) K_{ii}(\beta r_0) \cos \beta z \, dr \, dz$$

Здесь все компоненты тензора напряжений отнесены к $2\pi\theta$, функции $\Psi_m(t, \beta)$ ($m = 1, 2$) находятся по формулам (1.3), где следует положить $G = 1$. В целях улучшения сходимости интегралов в формулах (3.1) для du_r/dr и du_z/dz явно выделены члены, отвечающие случаю $\alpha = \pi$, при этом использованы первая формула (3.6) [7], указанные выше значения интегралов и интегрирование по частям.

Для $\alpha = \pi$ имеем $E_1(\beta, t, u) \equiv E_2(\beta, t) \equiv 0$ и, интегрируя по частям, убеждаемся в совпадении напряжений σ_r и σ_z (3.1) на границе полупространства с известными формулами ([4], с. 277, 279, при $z = 0$).

Если в формулах (3.1) положить $\mu = 0$, $\alpha = \pi$ и считать, что функция $q(r, z)$ определена в эллиптической области Ω по закону (3.4) [7], то в точке первоначального касания (ТПК, центр эллипса) для σ_e получаем известную формулу (3.5) [7]. Для достаточно вытянутого эллипса (этот случай и рассматривается здесь) это значение σ_e в центре эллипса будет максимальным на поверхности контакта и значительно превышает значения σ_e на краю эллипса ([16], с. 77). Если же форма эллипса Ω близка к кругу, то максимальное значение σ_e на поверхности контакта достигается на краю большой полуоси, но оно лишь немного превышает значение σ_e в ТПК ([16], с. 77).

На фигуре приведены графики осадки $\delta \times 10^3$ и максимального эффективного напряжения на оси симметрии области контакта $\max \sigma_e \times 10^3$ при постоянной вдавливающей силе $P \times 10^3 = 0,583$ в зависимости от коэффициента трения μ (и направления движения штампа) для полупространства (штриховые линии) и для клина угла раствора $\alpha = 110^\circ$ (сплошные линии) при разных значениях λ , характеризующих степень близости штампа к ребру клина [7]. Значения других параметров взяты, как в таблице. Для полупространства (и для клина при не слишком малых λ и α) при учете сил трения $\max \sigma_e$ по-прежнему достигается в ТПК, возрастая с ростом $|\mu|$. При постоянной вдавли-



ливающей силе вблизи ребра клина (при достаточно малых λ) точка, где достигается $\max \sigma_e$, начинает смещаться от ТПК, как правило, в сторону ребра клина при $\mu < 0$ (силы трения направлены к ребру) и в другую сторону при $\mu > 0$ (силы трения направлены от ребра). При $\alpha = 70^\circ$, $\lambda = \epsilon$ и при значениях других параметров, как в расчетах для фигуры, происходит нарушение контакта в окрестности ребра (за счет значительного возрастания осадки при постоянной силе).

Автор благодарит В.М. Александрова и И.И. Воровича за обсуждение результатов.

Работа поддержана грантом Президента РФ для молодых докторов наук (РФФИ, 99-15-96012).

ЛИТЕРАТУРА

1. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
2. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
3. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. 321. № 1. С. 58–62.
4. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Stuttgart: Teubner, 1985. = Хан Х.Г. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
5. Галин Л.А., Горячева И.Г. Пространственная контактная задача о движении штампа с трением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1016–1022.
6. Галанов Б.А. Метод нелинейных граничных уравнений в контактных задачах с неизвестными областями контакта. Автореф. дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат. наук. М., 1989. 34 с.
7. Пожарский Д.А. О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 812–818.
8. Кравчук А.С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 4. С. 589–595.
9. Спектор А.А. Вариационные методы в пространственных задачах о нестационарном взаимодействии упругих тел с трением // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 76–83.
10. Короткин В.И., Пожарский Д.А. Вдавливание штампа в упругий пространственный клин как модель контактного взаимодействия поверхностей зубьев зубчатых передач // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1996. № 3. С. 107–113.
11. Короткин В.И. Об учете краевых эффектов при расчете передач Новикова на контактную выносливость // Вестн. машиностр. 1997. № 6. С. 8–11.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
15. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
16. Ковальский Б.С. Расчет деталей на местное сжатие. Харьков: Изд-во ХВКИУ, 1967. 222 с.