

УДК 539.3

© 2000 г. В.М. Александров, В.Б. Зеленцов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Разработаны асимптотические методы решения осесимметричной динамической нестационарной контактной задачи для малых и больших значений времени внедрения жесткого штампа в упругое полупространство. С помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени) и Ганкеля (по координате) контактная задача сводится к решению интегрального уравнения (ИУ) относительно неизвестной трансформанты Лапласа контактных напряжений под штампом. Нулевой член асимптотического решения ИУ для больших значений параметра Лапласа (малые времена) строится на основе специальной аппроксимации в комплексной плоскости символа ядра ИУ. Асимптотическое решение ИУ для малых значений параметра Лапласа (большие времена) строится по степеням этого параметра. Решение контактной задачи получается с помощью обратного преобразования Лапласа, применяемого к полученным решениям ИУ.

Задача изучалась ранее ([1–4] и др.).

1. Постановка задачи. Рассматривается динамическая нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа радиуса $a (r \leq a)$ в упругое полупространство ($z \geq 0, 0 \leq r < \infty$). Силы трения между штампом и полупространством не учитываются. Форма штампа и его осадка на полупространстве дается функцией $f(r, t) (0 \leq r \leq a, t \geq 0)$.

Уравнения равновесия теории упругости в случае осевой симметрии напряженно-деформированного состояния упругой среды записываются в виде [2, 5]

$$-\frac{u}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\beta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Функции $u(r, z, t), w(r, z, t)$ в (1.1) являются радиальными и нормальными смещениями упругой среды, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн смещений и напряжений в упругой среде, ρ – плотность материала упругой среды, λ, μ – упругие постоянные Ламе.

В начальный момент времени, учитывая, что до момента внедрения упругая среда находится в покое, ее смещения $u(r, z, t), w(r, z, t)$ и их скорости $\partial u / \partial t, \partial w / \partial t$ равны нулю.

Смещения упругой среды u, w при $r, z \rightarrow \infty$ (в зоне покоя) равны нулю, вместе со своими частными производными.

В общепринятых обозначениях теории упругости [5] смешанные граничные условия задачи имеют вид ($t \geq 0, z = 0$)

$$\tau_{yz} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad \sigma_z = 0 \quad (a < r < \infty) \quad (1.2)$$

$$w = f(r, t) \quad (0 \leq r \leq a)$$

где τ_{yz}, σ_z – касательные и нормальные напряжения на поверхности упругой среды соответственно.

2. Интегральное уравнение контактной задачи. Поставленная контактная задача сводится к решению ИУ с помощью интегрального преобразования Лапласа (по времени t)

$$w^L(r, z, p) = \int_0^{\infty} w(r, z, t) e^{-pt} dt$$

$$w(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} w^L(r, z, p) e^{pt} dp \quad (2.1)$$

и интегрального преобразования Ганкеля (по координате r)

$$w^{LH}(\gamma, z, p) = \int_0^{\infty} w^L(r, z, p) J_0(\gamma r) r dr$$

$$w^L(r, z, p) = \int_0^{\infty} w^{LH}(\gamma, z, p) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.2)$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Эти преобразования последовательно применяются к дифференциальным уравнениям движения упругой среды (1.1) и к граничным условиям контактной задачи (1.2) с учетом начальных условий и условий на бесконечности. При этом считается, что существуют интегралы в (2.1), (2.2) от функции упругих смещений $u(r, z, t), w(r, z, t), f(r, t)$. В результате произведенных операций, как промежуточный результат, получаются формулы для трансформант смещений и напряжений упругой среды

$$w^L(r, z, p) = \int_0^{\infty} \varphi^{LH}(\gamma, p) \sigma_2 [2\gamma^2 e^{-\sigma_1 z} - (\gamma^2 + \sigma_1^2) e^{-\sigma_2 z}] \frac{J_0(r\gamma)}{R_0(\gamma, p)} d\gamma \quad (2.3)$$

$$\sigma_z^L(r, z, p) = - \int_0^{\infty} \varphi^{LH}(\gamma, p) [4\mu\gamma^2 \sigma_1 \sigma_2 e^{-\sigma_1 z} + (\gamma^2 + \sigma_1^2)(\lambda\gamma^2 - (\lambda + 2\mu)\sigma_2^2) e^{-\sigma_2 z}] \frac{J_0(r\gamma)}{R_0(\gamma, p)} \gamma d\gamma \quad (2.4)$$

в которых введены следующие обозначения:

$$\sigma_1 = \sqrt{\gamma^2 + \rho p^2 / \mu}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\gamma^2 + \rho p^2 / (\lambda + 2\mu)} \quad (2.5)$$

$$R_0(\gamma, p) = 4\mu\gamma^2 \sigma_1 \sigma_2 + (\gamma^2 + \sigma_1^2)(\lambda\gamma^2 - (\lambda + 2\mu)\sigma_2^2)$$

$\varphi^{LH}(\gamma, p)$ – трансформанта Лапласа–Ганкеля неизвестных контактных напряжений под штампом $\varphi(r, t)$, при этом $\sigma_z(r, 0, t) = -\varphi(r, t)$.

Реализация смешанных граничных условий контактной задачи (1.2) в трансформантах Лапласа при учете соотношения (2.3) приводит к ИУ поставленной

задачи

$$\int_0^a \varphi^L(\xi, p) \xi k(\xi, r) d\xi = f^L(r, p) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.6)$$

$$k(\xi, r) = \int_0^\infty \gamma \sigma_2 (\gamma^2 - \sigma_1^2) \frac{J_0(\gamma \xi) J_0(r \gamma)}{R_0(\gamma, p)} d\gamma$$

являющемуся ИУ первого рода относительно трансформанты Лапласа неизвестных контактных напряжений $\varphi^L(r, p)$. Для удобства в дальнейшем, ИУ (2.6) приводится к безразмерному виду с помощью замен переменных $r = ar'$, $\xi = a\xi'$, $\gamma = u'p/c_2$ и с учетом уже введенных обозначений

$$\int_0^1 \varphi^L(\xi, p) \xi k_0\left(\frac{\xi}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right) d\xi = \theta_0 f^L(r, p) \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (2.7)$$

$$k_0(\xi, r) = \int_0^\infty K(u) J_0(\xi u) J_0(r u) du, \quad K(u) = \frac{u \sigma_2}{R(u)}$$

$$R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2 \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_1 = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2}$$

$$\theta_0 = \mu c_2 / (a^2 p), \quad \Lambda = c_2 / (pa)$$

Затем ИУ (2.7) сводится к решению эквивалентного ему интегрального уравнения с разностным ядром [6]. С этой целью левая и правая части (2.7) умножаются на

$$\frac{r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

и затем интегрируются по r от 0 до x . После перестановки порядка интегрирования, использования интегральных представлений вида [7]

$$\int_0^x \frac{r J_0(\gamma r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr = \frac{\sin \gamma x}{\gamma}, \quad \int_x^\infty \frac{r J_0(\gamma r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = \frac{\cos \gamma x}{\gamma} \quad (2.8)$$

и дифференцирования левой и правой части получившегося соотношения найдем ИУ

$$\int_0^1 \varphi^L(\xi, p) \xi d\xi \int_0^\infty K(\gamma) J_0\left(u \frac{\xi}{\Lambda}\right) \cos u \frac{x}{\Lambda} du = \theta_0 g(x, p) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.9)$$

$$g(x, p) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr$$

Используя интегральное представление для $J_0(x)$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(t \zeta)}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} d\zeta$$

в (2.9) и переставляя порядок интегрирования по γ и ξ , получим новое ИУ

$$\int_0^1 \omega(\xi, p) d\xi \int_0^\infty K(u) \cos u \frac{\xi}{\Lambda} \cos u \frac{x}{\Lambda} du = \frac{\pi \theta_0}{2} g(x, p) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Продолжая в последнем ИУ $\omega(x, p)$ и $g(x, p)$ по x четным образом на отрезок $[-1, 0]$, а внутренний интеграл – на промежуток $(-\infty, \infty)$ и умножив его на $2(1 - \beta^2)$, получим

ИУ типа свертки первого рода с разностным ядром

$$\int_{-1}^1 \omega(\xi, p) d\xi \int_0^{\infty} K(u) \cos u \frac{\xi - x}{\Lambda} du = \pi \theta g(x, p) \quad (|x| \leq 1) \quad (2.10)$$

в котором

$$K(u) = 2(1 - \beta^2) |u| \sqrt{u^2 + \beta^2} [R(u)]^{-1}, \quad \theta = 2(1 - \beta^2) \theta_0 \quad (2.11)$$

$$\omega(\zeta, p) = \int_{\zeta}^1 \frac{\varphi^L(\xi, p) \xi}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}} d\xi \quad (2.12)$$

а $R(u)$ дается в формуле (2.7).

Соотношение (2.12) представляет ИУ типа Абеля. Решив уравнение (2.12), получим связь между функциями $\varphi^L(x, p)$ и $\omega(\zeta, p)$, выраженную формулой

$$\varphi^L(x, p) = -\frac{2}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\omega(\zeta, p) \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - x^2}} d\zeta \quad (2.13)$$

3. Асимптотическое решение ИУ (2.10) для больших значений p . В дальнейшем при построении нулевого члена асимптотики решения ИУ (2.10) потребуется факторизовать обобщенную функцию $K(u)$ (2.11) в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. Для облегчения этой операции в (2.10) взамен $K(u)$ вводится новая функция

$$K_\varepsilon(u) = 2(1 - \beta^2) \sqrt{(u^2 + \varepsilon^2)(u^2 + \beta^2)} [R(u)]^{-1} \quad (3.1)$$

для которой, очевидно, выполняется предельный переход

$$K(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(u) \quad (3.2)$$

При этом ИУ (2.10) с новым символом ядра $K_\varepsilon(u)$ записывается в виде

$$\int_{-1}^1 \omega_\varepsilon(\xi, p) k_\varepsilon \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi = 2\pi \theta g(x, p) \quad (|x| \leq 1) \quad (3.3)$$

$$k_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(u) e^{iut} du$$

Так как интегральный оператор в (3.3) равномерно по ε на промежутке $|x| \leq 1$ стремится к оператору (2.10), стоящему в левой части (2.10), то

$$\omega(x, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(x, p) \quad (3.4)$$

Следует отметить, что $K_\varepsilon(u)$ – четная функция, вещественная на действительной оси комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, имеет шесть точек ветвления алгебраического типа в этой плоскости $u = \pm i, u = \pm i\beta, u = \pm i\varepsilon$ и два полюса $u = \pm i\eta_0$ (полюсы Релея); кроме того, она обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$K_\varepsilon(u) = A\varepsilon + O(u^2) \quad (u \rightarrow 0, A = 2\beta(1 - \beta^2)) \quad (3.5)$$

$$K_\varepsilon(u) = 1 + O(u^{-2}) \quad (u \rightarrow \infty) \quad (3.6)$$

Для получения главного члена асимптотики решения ИУ (3.3) при малых значениях параметра Λ (большие значения p) аппроксимируем символ ядра ИУ $K_\varepsilon(u)$ выражением

$K_\varepsilon^0(u)$ следующего вида:

$$K_\varepsilon^0(u) = \frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sqrt{u^2 + \beta^2}}{u^2 + \eta_0^2} M(u) \quad (3.7)$$

$$M(u) = \exp[-d(\sqrt{\beta + iu} \sqrt{1 + iu} + \sqrt{\beta - iu} \sqrt{1 - iu} - 1 - \beta)]$$

в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, где параметр аппроксимации d определяется из условия $K_\varepsilon(0) = K_\varepsilon^0(0)$ и вычисляется по формуле

$$d = (1 - \sqrt{\beta})^{-2} \ln(A\eta_0^2 / \beta) \quad (3.8)$$

Аппроксимация $K_\varepsilon^0(u)$ обладает всеми вышперечисленными свойствами функции $K_\varepsilon(u)$ в комплексной плоскости и является однозначной и регулярной в этой плоскости с проведенными в ней разрезами от точек ветвления до $\pm i\infty$ вдоль мнимой оси ($\sigma = 0$) с выколотыми точками $u = \pm i\eta_0$ и выбранными ветвями на разрезах при условии, что $\sqrt{1} = 1$.

Кроме этого, вдоль действительной оси ($\tau = 0$) комплексной плоскости $K_\varepsilon(u)$ и $K_\varepsilon^0(u)$ близки, и расхождение между ними для всех $v \in [0, 0, 44]$ не превышает 4%. Заметим, что аппроксимация вида (3.7) не является единственной, но может быть наиболее простая.

Главный член асимптотики решения ИУ (3.3) при малых значениях Λ представляется в мультипликативной форме [8, 9] по формуле

$$\omega_\varepsilon(x, p) = \mu_0 \omega_+^\varepsilon\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) \omega_-^\varepsilon\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) \left[\omega_\infty^\varepsilon\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) \right]^{-1} \quad (3.9)$$

в которой функции $\omega_\pm^\varepsilon(x, p)$ и $\omega_\infty^\varepsilon(x, p)$ являются решениями ИУ

$$\int_0^\infty \omega_\pm^\varepsilon(\xi, p) d\xi \int_{-\infty}^\infty K_\varepsilon^0(u) e^{iu(\xi-x)} du = \frac{2\pi\theta}{\Lambda} g(\pm\Lambda x \mp 1, p) \quad (3.10)$$

$$(0 < x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \omega_\infty^\varepsilon(\xi, p) d\xi \int_{-\infty}^\infty K_\varepsilon^0(u) e^{iu(\xi-x)} du = \frac{2\pi\theta}{\Lambda} g(\Lambda x, p) \quad (3.11)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

а μ_0 – корректирующий множитель, определяемый в ходе решения ИУ (3.3).

Решение ИУ (3.10) в случае плоского штампа $g(x, p) = f^L(p)$ достаточно просто определяется с помощью метода Винера–Хопфа [9, 10] и дается формулой

$$\omega_\pm^\varepsilon(x, p) = -\frac{\theta f^L(p)}{\Lambda K_{\varepsilon-}^0(0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iux}}{iu K_{\varepsilon+}^0(u)} du \quad (3.12)$$

В (3.12) функции $K_{\varepsilon\pm}^0(u)$ являются функциями, регулярными соответственно верхней ($\text{Im}(u) > -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$) и нижней ($\text{Im}(u) < \varepsilon$) полуплоскостях и удовлетворяющими условию факторизации

$$K_\varepsilon^0(u) = K_{\varepsilon+}^0(u) K_{\varepsilon-}^0(u)$$

в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ с вышеуказанными разрезами. Общий вид этих

функций дается формулой

$$K_{\pm\epsilon}^0(u) = \frac{\sqrt{\epsilon \mp iu} \sqrt{\beta \mp iu}}{\eta_0 \mp iu} M_{\pm}(u) \quad (3.13)$$

$$M_{\pm}(u) = \exp \left[-d \left(\sqrt{\beta \mp iu} \sqrt{1 \mp iu} \pm iu - \frac{1+\beta}{2} \right) \right]$$

Решение уравнения (3.11) в данном случае – случае плоского штампа – определяется формулой [9]

$$\omega_{\infty}^{\epsilon}(x, p) = \frac{\theta}{2\pi\Lambda} \frac{f^L(p)}{K_{\epsilon}^0(0)} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.14)$$

Наиболее перспективной для дальнейшего использования является форма решения ИУ (3.10), представленная в виде определенных интегралов, получающихся в результате вычисления контурного интеграла в (3.12)

$$\omega_{\pm}^{\epsilon}(x, p) = \frac{\theta f^L(p)}{\Lambda K_{\epsilon-}^0(0)} \Omega_{\pm}^{\epsilon}(x, p) \quad (3.15)$$

$$\Omega_{\pm}^{\epsilon}(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^1 \vartheta(y) e^{-d(1+\beta-2y)/2} \sin(d\sqrt{1-y}\sqrt{y-\beta}) e^{-yx} dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{\beta} \vartheta(y) e^{-d(\sqrt{1-y}-\sqrt{\beta-y})^2/2} e^{-yx} dy + \frac{1}{K_{\epsilon-}^0(0)}$$

$$\vartheta(y) = \frac{y - \eta_0}{y\sqrt{y-\epsilon}\sqrt{\pm\beta \mp y}}, \quad K_{\epsilon-}^0(0) = \frac{\sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta}}{\eta_0} e^{d(1-\sqrt{\beta})^2/2}$$

При учете введенных обозначений и формул (3.15) и (3.14) решение ИУ (3.3) в форме (3.9) запишется в виде

$$\omega_{\epsilon}(x, p) = 2\mu_0(1-\beta^2) \frac{\mu}{a} f^L(p) \Omega_{+}^{\epsilon}\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) \Omega_{-}^{\epsilon}\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) \quad (3.16)$$

Для окончательного представления функции $\omega_{\epsilon}(x, p)$ необходимо определить корректирующий множитель μ_0 в (3.16), который определяется [11, 12] подстановкой выражения (3.16) при $\epsilon = 0$ в уравнение (3.3), в результате чего получим равенство

$$2\mu_0(1-\beta^2) \frac{\mu}{a} f^L(p) \int_{-1}^1 \Omega_{+}^0\left(\frac{1+\xi}{\Lambda}, p\right) \Omega_{-}^0\left(\frac{1-\xi}{\Lambda}, p\right) k_0\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi\theta f^L(p) \quad (3.17)$$

Для приближенного вычисления интеграла в (3.17) при малых Λ установим главные члены асимптотики функций, входящих в подынтегральное выражение, при $\Lambda \rightarrow 0$. Имеем

$$\Omega_{\pm}^0\left(\frac{1\pm x}{\Lambda}, p\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Lambda}} \sqrt{\frac{1\pm x}{\Lambda}} \quad (3.18)$$

$$k_0\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) = 2 \int_0^{\infty} K_0(u) \cos u \frac{\xi-x}{\Lambda} du = -2(1-\beta^2)\beta\Lambda^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{\xi-x} \quad (3.19)$$

При получении (3.19) использовался интеграл

$$\int_0^{\infty} u \cos u (\xi-x) du = -\frac{d}{dx} \frac{1}{\xi-x}$$

понимаемый в смысле обобщенных функций теории интегрального преобразования Фурье [13]. Подставляя выражения (3.18), (3.19) в соотношение (3.17) и сравнивая левую и правую его части найдем, что

$$\mu_0 = \pi/4 \quad (3.20)$$

Осуществляя теперь переход к оригиналам Лапласа в формуле (3.16) для $\omega_\varepsilon(x, p)$ и переходя затем в полученных формулах к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\omega(x, t) = \frac{\pi}{2}(1 - \beta^2) \left[\frac{\mu}{a_0} \int_0^t f(\tau) E(x, t - \tau) d\tau + f_0 E(x, t) \right] \quad (3.21)$$

$$E(x, t) = \int_0^t \Omega_+^0(a + x, \tau) \Omega_-^0(a - x, t - \tau) d\tau$$

$$\Omega_\pm^0(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\pm^\varepsilon(x, t)$$

$$\Omega_\pm^0(a \pm x, t) = \frac{\eta(t)e(0, t_1^\pm)}{\sqrt{t_1^\pm - t}} \exp \left[-\frac{d}{2} \frac{(\sqrt{t_2^\pm - t} - \sqrt{t_1^\pm - t})^2}{t_2^\pm} \right] +$$

$$+ \frac{\eta(t)e(t_1^\pm, t_2^\pm)}{\sqrt{t - t_1^\pm}} \exp \left(-\frac{1 + \beta}{2} d + \frac{dt}{t_2^\pm} \right) \sin d \frac{\sqrt{t_2^\pm - t} \sqrt{t - t_1^\pm}}{t_2^\pm}$$

$$\eta(t) = \frac{t - \eta_0 t_2^\pm}{\pi t \sqrt{t}}, \quad e(u, v) = H(t - u) - H(t - v), \quad t_i^\pm = \frac{a \pm x}{c_i} \quad (i = 1, 2)$$

$H(t)$ – функция Хевисайда, f_0 – начальное внедрение штампа до момента времени $t = 0$. Асимптотическое решение поставленной контактной задачи при малых t дается формулой, полученной после применения обратного преобразования Лапласа к (2.12)

$$\varphi(r, t) = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\omega(a, t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\omega'_\xi(\xi, t)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi \right] \quad (0 \leq r \leq a) \quad (3.22)$$

и справедливой для $t < 2a/c_2$, так как асимптотическое решение ИУ (3.3) в форме (3.9) эффективно при $\Lambda = c_2/ap < 2$ [11].

Анализ полученных здесь формул (3.22), (3.21), определяющих поле контактных напряжений $\varphi(r, t)$, показывает, что оно имеет неподвижную особенность корневого типа и подвижную особенность того же типа на фронте продольной волны, распространяющейся от края штампа к его центру. На фронте поперечной волны, распространяющейся под штампом вслед за продольной, особенности нет.

4. Асимптотическое решение ИУ (2.10) при малых значениях p . На основании асимптотических свойств символа ядра ИУ (2.10) (функции $K(u)$), определяемых формулами (3.5), (3.6), ядро этого уравнения представляется в форме

$$\frac{1}{2} k(t) = \pi \delta(t) - \int_0^\infty (1 - K(u)) \cos ut du \quad (4.1)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Такое представление ядра позволяет ИУ (2.10) за-

писать в виде ИУ второго рода

$$\omega(x, p) = \frac{\theta}{\Lambda} g(x, p) + \frac{1}{\pi\Lambda} \int_{-1}^1 \omega(\xi, p) F\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi \quad (4.2)$$

$$F(t) = \int_0^{\infty} (1 - K(u)) \cos ut \, du$$

в котором функция $F(t)$ является четной и представляется в виде

$$F(t) = \sum_{n=0}^4 a_n |t|^n + F_1(t) \quad (4.3)$$

$$a_0 = \int_0^{\infty} (1 - K(u)) du, \quad a_1 = \frac{\pi}{2} h_1, \quad a_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (u^2 - u^2 K(u) + h_1) du$$

$$a_3 = -\frac{\pi}{12} h_2, \quad a_4 = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} (u^4 - u^4 K(u) + h_1 u^2 + h_2) du$$

$$F_1(t) = \int_0^{\infty} \left(1 - K(u) + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4}\right) \times \\ \times \left(\cos ut - 1 + \frac{u^2 t^2}{2!} - \frac{u^4 t^4}{4!}\right) du = O(t^6)$$

Оценка, указанная в (4.3), для функции $F_1(t)$ следует из представления $K(u)$ при больших значениях u

$$K(u) = 1 + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4} + O\left(\frac{1}{u^6}\right) \quad (u \rightarrow \infty) \quad (4.4)$$

$$h_1 = -\frac{3\beta^4 - 4\beta^2 + 3}{4(1 - \beta^2)}, \quad h_2 = -\frac{\beta^8 + 2\beta^6 - 18\beta^4 + 22\beta^2 - 11}{16(1 - \beta^2)^2}$$

Структура функции $F(t)$, а следовательно и ядра $k(t)$ (4.1), при малых значениях $|t|$, показывает, что решение ИУ (4.2) следует искать в виде отрезка ряда по отрицательным степеням Λ

$$\omega(x, p) = \sum_{n=0}^3 \omega_n(x, p) \Lambda^{-n} \quad (4.5)$$

Для определения членов ряда $\omega_n(x, p)$ из (4.5), необходимо выражение (4.5) подставить в (4.2) и приравнять коэффициенты в левой и правой части (4.2) при одинаковых степенях Λ , в результате чего получим ($\theta = b\Lambda$, $b = 2(1 - \beta^2)\mu\alpha^{-1}$)

$$\omega_0(x, p) = g(x, p)$$

$$\omega_n(x, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^1 \omega_{n-k}(\xi, p) |\xi - x|^n d\xi \quad (n \geq 1) \quad (4.6)$$

Функция $g(x, p)$ дается формулой из (2.9). Вычисляя последовательно $\omega_n(x, p)$ и квадратуры, при этом возникающие, для $n = 0, 1, 2, 3$ получим

$$\omega_0(x, p) = b \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{rf^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr, \quad \omega_1(x, p) = \frac{2ba_0}{\pi} \int_0^1 \frac{rf^L(r, p)}{\sqrt{1 - r^2}} dr$$

$$\omega_2(x, p) = \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{rf^L(r, p)}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1(1 - \sqrt{1-r^2}l(1, r)) \right) dr + \right. \\ \left. + a_1 \int_0^x rf^L(r, p)l(x, r)dr \right] \quad (4.7)$$

$$\omega_3(x, p) = \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{rf^L(r, p)}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{4a_0^2}{\pi^2} + \frac{2a_0a_1}{\pi} (1 - \sqrt{1-r^2}l(1, r)) \right) dr + \right. \\ \left. + \int_0^1 rf^L(r, p)(2a_1l(1, r) - (a_1 + 2a_2)\sqrt{1-r^2})dr + \right. \\ \left. + (1+x^2) \left(\frac{a_0a_1}{\pi} + a_2 \right) \int_0^1 \frac{rf^L(r, p)}{\sqrt{1-r^2}} dr \right]; \quad l(x, r) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - r^2}}{r}$$

При вычислении квадратур в (4.6) учитывалось, что функция $f^L(r, p)$ была продолжена по r на отрезок $[-1, 0]$ нечетным образом. Формулы (4.5), (4.7) дают асимптотическое решение ИУ (4.2), или что то же, уравнения (3.1), при больших значениях параметра Λ (или малых p).

Для получения асимптотического решения поставленной контактной задачи при больших t , которое дается формулой (3.22) в размерных переменных r и t , необходимо перейти в формуле (4.5) к оригиналам Лапласа для определения $\omega(x, t)$. Формально осуществляя такой переход, в общем случае $f(r, t)$ получим решение контактной задачи в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n \left[\frac{w_n(t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_r^a \frac{\partial \omega_n(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \right], \quad w_n(t) = \omega_n^{(n)}(a, t) \quad (4.8)$$

В формуле (4.8) $\omega_n^{(k)}(a, t)$ обозначает в символической форме производную по t от функций $\omega_n(a, t)$. Функции $\omega_n(r, t)$ даются формулами (4.7) ($n = 0, 1, 2, 3$), в которых после перехода к оригиналам в левой и правой части достаточно вместо $\omega_n(r, p)$ поставить $\omega_n(r, t)$, а функцию $f^L(r, p)$ заменить на ее оригинал $f(r, t)$.

Заметим, что полученное решение (4.8) справедливо при больших t ($t > 2a/c_2$), что следует из стыковки асимптотических решений по интегральной характеристике $P(t)$, расчеты которой при малых и больших t осуществлены в разд. 5.

В важном частном случае, когда внедряющийся штамп плоский, т.е. при $f(r, t) = f(t)$, решение контактной задачи без учета обобщенной составляющей решения и с сохранением в нем первых четырех членов имеет вид

$$\varphi(r, t) = \frac{2ba}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \left[f(t) + \frac{2a_0}{\pi} \frac{a}{c_2} \dot{f}(t) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left[\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1 \left(4 - 3 \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \left(\frac{a}{c_2} \right)^2 \ddot{f}(t) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left[\frac{4a_0^3}{\pi^2} + \frac{3a_0a_1}{\pi} \left(3 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3} \left(11 - 9 \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \left(\frac{a}{c_2} \right)^3 \ddot{\ddot{f}}(t) \right] \quad (4.9)$$

Точками обозначены производные по t .

5. Формулы для вычисления действующей на штамп силы $P(t)$. Важным моментом в решении контактной задачи является вычисление действующей на внедряющийся штамп силы $P(t)$ (или с противоположным знаком силы реакции упругой среды на внедрение в нее штампа). Для вычисления силы $P(t)$ воспользуемся общей формулой, которая для рассматриваемой задачи имеет вид

$$P(t) = 2\pi \int_0^a \varphi(r, t) r dr \quad (5.1)$$

и в изображениях Лапласа в безразмерном виде имеет представление

$$P^L(p) = 4a^2 \int_0^1 \omega(\xi, p) d\xi \quad (5.2)$$

Здесь учтена формула (2.13) для $\varphi^L(x, p)$.

Функцию $\omega(x, p)$ представим формулой (3.17) при $\varepsilon = 0$ и, подставив ее в (5.2), получим

$$P^L(p) = \frac{\pi^2 b a^2}{\beta} f^L(p) \int_0^1 \Omega_+^0\left(\frac{1+\xi}{\Lambda}, p\right) \Omega_-^0\left(\frac{1-\xi}{\Lambda}, p\right) d\xi \quad (5.3)$$

Величина b дана перед формулой (4.6).

В интеграле (5.3) сделаем замену переменной

$$1 + \xi = \Lambda \xi', \quad d\xi = \Lambda d\xi' \quad (5.4)$$

и опуская затем штрихи получим

$$P^L(p) = \frac{\pi^2 b a^2}{\beta \gamma} f^L(p) \int_0^\gamma \Omega_+^0(\xi, p) \Omega_-^0(\gamma - \xi, p) d\xi \quad \left(\gamma = \frac{2}{\Lambda}\right) \quad (5.5)$$

Понимая в последней формуле интеграл как свертку Лапласа функций $\Omega_\pm^0(x, p)$ и учитывая их интегральное представление в виде интеграла Лапласа

$$\Omega_\pm^0(x, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{e^{sx}}{s K_{0+}^0(is)} ds \quad (\operatorname{Re} c > 0)$$

где $K_{0+}^0(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{\varepsilon+}^0(u)$, получим для $P^L(p)$ главный член асимптотики при малых Λ в виде

$$P^L(p) = \frac{\pi b a^2}{\beta \gamma} f^L(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{e^{\gamma z}}{z^2 [K_{0+}^0(iz)]^2} dz \quad (5.6)$$

$$K_{0+}^0(iz) = \frac{\sqrt{z} \sqrt{\beta+z}}{\eta_0+z} \exp\left[-d\left(\sqrt{\beta+z} \sqrt{1+z} - z - \frac{1+\beta}{2}\right)\right]$$

Подынтегральная функция в комплексной плоскости z имеет следующие особые точки: две точки ветвления $z = -\beta$ и $z = -1$, однократный полюс в точке $z = -\beta$ и трехкратный полюс в точке $z = 0$. Замыкая контур интегрирования в левую полуплоскость с проведенными в ней разрезами от точек ветвления $z = -\beta$ и $z = -1$ до $-\infty$ вдоль отрицательной части действительной оси с выбором ветвей многозначных функций, для получения асимптотической формулы $P(t)$ ($t < 2a/c_2$) при вычислении интеграла (5.6) достаточно учесть трехкратный полюс в нуле ($z = 0$). Переходя в полученной таким образом формуле для $P^L(p)$ к оригиналам по Лапласу, будем

иметь

$$P(t) = \pi^2 b a^2 \left[\frac{2af(t)}{c_2 K_{1+}^2(0)} - \frac{4iK'_{1+}(0)}{K_{1+}^3(0)} f(t) - \left(\frac{6K_{1+}'^2(0)}{K_{1+}^4(0)} - \frac{2K_{1+}''(0)}{K_{1+}^3(0)} \right) \frac{c_2}{2a_0} \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{2a}{c_2} \frac{f_0}{K_{1+}^2(0)} \delta(t) \right] \quad (5.7)$$

$$K_{1+}(iz) = K_{0+}^0(iz) / z$$

$$K_{1+}(0) = \sqrt{A}, \quad K'_{1+}(0) = \frac{i\sqrt{A}}{2\beta\eta_0} \left(\eta_0 - 2\beta - \sqrt{\beta}\eta_0 \ln \frac{A\eta_0^2}{\beta} \right)$$

$$K_{1+}''(0) = \sqrt{A} \left[\frac{\eta_0^2 + 4\beta\eta_0 - 8\beta^2}{4\beta^2\eta_0^2} + \frac{\eta_0 - 2\beta}{2\beta\sqrt{\beta}\eta_0} dh^2 - \frac{h^4 d^2}{4\beta} - \frac{(1-\beta)^2 d}{4\beta\sqrt{\beta}} \right]$$

$$(h = 1 - \sqrt{\beta})$$

Здесь f_0 – начальное внедрение штампа до момента времени $t = 0$, величина A дается в (3.5), d – в (3.8).

В случае большого времени t по имеющимся в разд. 4 формулам найдем формулу для $P(t)$. С этой целью, переходя к оригиналам Лапласа в формуле (5.2) при учете формулы (4.5) для $\omega(x, p)$, получим в общем случае ($t > 2a/c_2$)

$$P(t) = 4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n \int_0^1 \frac{\partial^n \omega_n(\zeta, t)}{\partial t^n} d\zeta \quad (5.8)$$

В случае плоского штампа $f(r, t) = f(t)$ получим выражение для $P(t)$ через функцию $f(t)$ и ее производные $f^{(n)}(t)$

$$P(t) = \frac{4}{\pi} b a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n d_n f^{(n)}(t) \quad (5.9)$$

Первые из d_n ($n = 0, 1, 2, 3$) даются формулами

$$d_0 = \pi, \quad d_1 = 2a_0, \quad d_2 = 2(2\pi^{-1}a_0^2 + 2a_1/3)$$

$$d_3 = 2\pi^{-2}(4a_0^3 + 7\pi a_0 a_1/3 + 2\pi^2 a_1/3 - 2\pi^2 a_2/3)$$

а величина b определена перед формулой (4.6).

В случае мгновенного внедрения плоского штампа закон его движения задается функцией $f(t) = f_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, а f_0 – величина внедрения штампа в упругое полупространство. Из формулы (5.9) видно, что в этом случае при $t \gg 2a/c_2$ значение силы $P(t)$, удерживающей штамп на глубине f_0 , асимптотически совпадает с величиной силы P , соответствующей статической осесимметричной контактной задаче о внедрении плоского штампа в упругое полупространство [5].

Сравнение контактных напряжений под штампом при малых и больших временах его внедрения в упругую среду затруднено ввиду того, что в контактных напряжениях, полученных для большого времени, не выделена в явном виде дифракционная картина волнового процесса. Она представлена в этом решении в виде ряда по степеням времени t . Поэтому сравнение полученных асимптотических решений при малых и больших временах проведем по более гладкой характеристике контактной

задачи – по действующей на плоский штамп силе $P(t)$ при $f(t) = v_0 t$ (v_0 – скорость внедрения штампа).

Ниже даны значения $\omega P(t)$ ($\omega = c_2(\mu a^2 v_0)^{-1}$) для малых и больших времен соответственно, рассчитанные по формулам (5.7) и (5.9) для различных значений $\tau = tc_1/a$

τ	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
$\omega P(t)$	11,03	9,51	7,99	–	–	–	($v = 0,25$)
$\omega P(t)$	–	–	7,80	8,42	9,04	9,65	($v = 0,25$)
$\omega P(t)$	12,69	11,25	9,80	8,36	–	–	($v = 0,30$)
$\omega P(t)$	–	–	–	8,65	9,26	9,87	($v = 0,30$)

Видно, что стыковка значений силы $P(t)$ происходит для $v = 0,25$ при $\tau = 1,2$, а для $v = 0,30$ при $\tau = 1,4$.

6. О движении штампа на поверхности упругой среды. Для определения закона вертикальных движений жесткого штампа массы M на поверхности упругого полупространства составляется дифференциальное уравнение его движения, как движения материальной точки

$$M\ddot{f}(t) = Q(t) \quad (6.1)$$

($Q(t)$ – сила упругого сопротивления среды), с начальными условиями $f(0) = f_0$ (f_0 – начальное, до момента времени $t = 0$, внедрение штампа), $\dot{f}(0) = v_0$ (v_0 – начальная скорость внедрения штампа при $t = 0$).

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.1), получаем уравнение в трансформантах

$$M[p^2 f^L(p) - f_0 p - v_0] = Q^L(p) \quad (6.2)$$

Трансформанта силы упругого сопротивления среды $Q^L(p)$ определится, если учесть, что $Q(t)$ совпадает по величине с $P(t)$ – силой, действующей на штамп и взятой с противоположным знаком

$$Q^L(p) = -P^L(p) = -\int_{-a}^a \varphi^L(x, p) dx \quad (6.3)$$

и согласно формуле (5.9) представляется, например при малых p , формулой

$$Q^L(p) = -\frac{4}{\pi} b a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (hp)^n d_n f^L(p) \quad (h = \frac{a}{c_2}) \quad (6.4)$$

Подставив выражение (6.4) в уравнение (6.2) и сохраняя при этом члены до $(hp)^2$, определим трансформанту $f^L(p)$ ($f_0 = 0$)

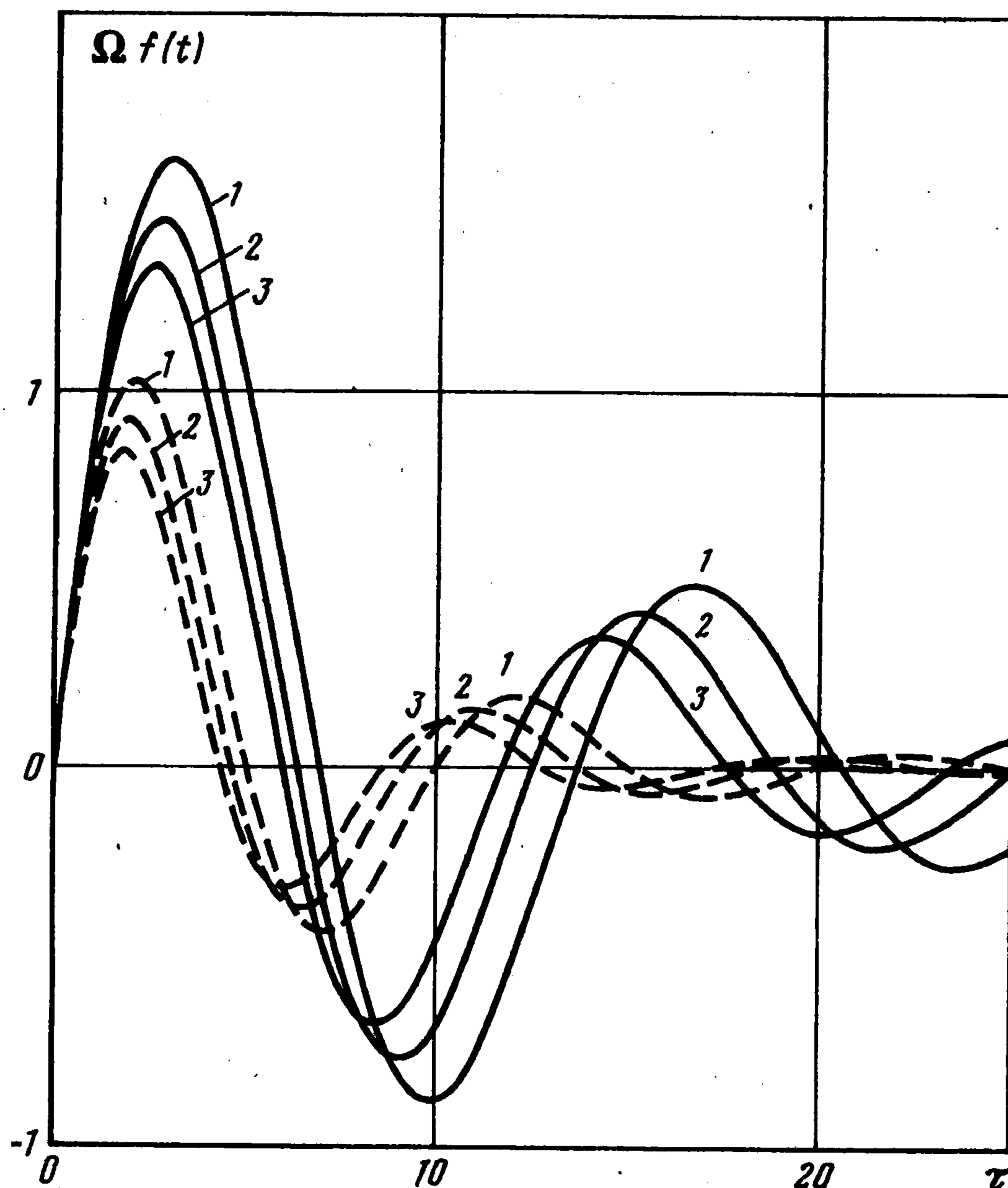
$$f^L(p) = \frac{M v_0}{8(1-\beta^2)\mu a} \frac{1}{1 + \eta_1 hp + \eta_2 (hp)^2} \quad (6.5)$$

$$\eta_1 = \pi d_1, \quad \eta_2 = (\eta h^2)^{-1} + d_2$$

Переходя в (6.5) к оригиналам Лапласа, получим для больших значений t ($t > 2h$)

$$\Omega f(t) = \frac{1}{\omega \alpha} \exp\left(-\frac{\eta_1}{2\eta_2} \tau\right) \sin \omega \tau, \quad \Omega = \frac{\mu h}{\rho a^2 v_0}, \quad \tau = \frac{t}{h} \quad (6.6)$$

$$\omega^2 = \frac{4\eta_2 - \eta_1^2}{4\eta_2^2}, \quad \alpha = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + \frac{2}{3} a_1 \right) \eta h^2, \quad \eta = \frac{8(1-\beta^2)\mu a}{M}$$



Графики значений функции $\Omega f(t)$ в зависимости от τ при разных значениях параметра $m = \rho/(\pi\rho_0)$ ($\rho_0 = M/(\pi a^3)$) и коэффициента Пуассона ν представлены на фигуре. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\nu = 0,10; 0,25; 0,35$. Сплошные линии отвечают $m = 0,1$, штриховые – $m = 0,05$. Видно существенное влияние параметра m , показывающего изменение массы штампа M при фиксированном ρ , на величину амплитуды колебаний штампа и их затухание, а также на величину частоты колебаний штампа на упругом полупространстве.

При малых значениях t ($t < 2h$) для определения закона движения штампа достаточно воспользоваться формулой (5.7) для трансформанты $P(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б.В. Автомодельные смешанные динамические задачи о вдавлении жесткого штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 54–62.
2. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
3. Поручиков В.Б. Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1966. № 6. С. 114–120.
4. Лобысев В.Л., Яковлев Ю.С. Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 103–108.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.

6. Александров В.М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
8. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
9. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
10. Noble B. Method Based on the Niener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L. et all.: Pergamon Press, 1958. = Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. Александров В.М., Чебаков М.И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера – Фока // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 494–504.
12. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
13. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 424 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
30.VI.1999