

УДК 532.5

© 2000 г. А.Г. Петров

**РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ И ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕД
МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ**

Исследуется процесс разгона и установления вязкой и вязкопластичной сред между двумя параллельными пластинами под действием внезапно приложенного постоянного градиента давления. Для вязкопластичной среды принимается модель Шведова–Бингама и решение ищется в форме слоистого течения с зависящей от времени толщиной жесткого ядра. Задача сводится к одномерному уравнению теплопроводности для стержня переменной длины, причем закон удлинения заранее неизвестен и для его определения служит дополнительное нелинейное граничное условие. Даются два варианта приближенного решения. Первый – общий модифицированный метод Слезкина–Тарга, при помощи которого задача движения среды под действием заданного переменного во времени градиента давления сведена к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Второй – асимптотический метод решения задачи для малых и больших значений безразмерного времени. Построены зависимости расхода и границы твердого ядра от времени при различных отношениях перепада давления к предельному напряжению сдвига. Определены зависимости времен установления расхода и границы твердого ядра от указанного отношения.

Нестационарные течения вязкой жидкости между двумя параллельными неподвижными пластинами исследованы достаточно полно, благодаря тому, что задача сводится к классическому уравнению теплопроводности. Точные решения получаются применением метода Фурье [1–4] и записываются в виде рядов. Представляет интерес приближенный метод Слезкина–Тарга [5,6], в котором ускорение жидкости заменяется на среднее по сечению. Решение существенно упрощается, однако может иметь достаточно большую погрешность.

Задачи нестационарных вязкопластичных течений сводятся к решению нелинейных краевых задач, представляющих серьезные математические трудности. На основе идеи метода Слезкина–Тарга было представлено приближенное решение задачи о торможении вязкопластичной среды [7,8]. Описание различных подходов к исследованию нестационарных вязкопластичных течений дано в монографии [9]. Обычно точные решения строят полуобратным методом, в котором краевые условия и граница твердого ядра подбираются из вида соответствующего аналитического решения. В результате получают решения неестественных с точки зрения эксперимента краевых задач. Широкий класс многопараметрических точных решений задачи течения вязкопластичной среды под действием заданного переменного во времени градиента давления приведен в недавних работах [10, 11].

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается течение вязкопластичной среды в области $0 \leq \bar{z} \leq 2h$ между двумя неподвижными параллельными пластинами $\bar{z} = 0$, $\bar{z} = 2h$. Принимается реологический закон Шведова – Бингама в виде $\tau = \mu d\bar{v} / d\bar{z} \pm \tau_0$, где τ – касательное напряжение на площадке $\bar{z} = \text{const}$ – по абсолютной величине превосходит τ_0 (предельное напряжение сдвига). В области, где $|\tau| \leq \tau_0$ скорость деформаций отсутствует и, следовательно, скорость v не зависит от координаты \bar{z} .

Эта область называется жестким ядром. В начальный момент $t = 0$ среда покоится. При $t > 0$ начинается течение под действием постоянного градиента давления $d\bar{p}/d\bar{x}$, $t > 0$, направленного по оси \bar{x} .

Определение поля скорости среды $v(\bar{t}, \bar{z})$ сводится к решению следующей краевой задачи [10]:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \mu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad 0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_0(\bar{t})$$

$$\bar{v}(0, \bar{z}_0) = 0, \quad \bar{v}(\bar{t}, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = 0, \quad \mu \left. \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = -\frac{\tau_0}{h - \bar{z}_0}$$

В области $\bar{z} < \bar{z} < h$ функция $v(\bar{t}, \bar{z})$ равна постоянному значению $v(\bar{t}, \bar{z}_0)$, $|\tau(\bar{t}, \bar{z})| < \tau_0$. В области $h < \bar{z} < 2h$ функции $v(\bar{t}, \bar{z})$ доопределяются по симметрии $v(\bar{t}, \bar{z}) = v(\bar{t}, 2h - \bar{z})$.

Введем безразмерные величины

$$v = \left(\left| \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right| \frac{h^2}{\mu} \right)^{-1} v, \quad P = -\frac{h}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}}, \quad z = \frac{\bar{z}}{h}, \quad z_0 = \frac{\bar{z}_0}{h}, \quad t = \frac{\rho h^2}{\mu} \bar{t} \quad (1.1)$$

Тогда для определения безразмерной скорости $v(t, z)$ и функции $z_0(t)$ из (1.1), (1.2) получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 1, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq z \leq z_0(t) \quad (1.2)$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v_z(t, z_0) = 0, \quad v_{zz}(t, z_0) = -\frac{1}{P(1 - z_0)} \quad (1.3)$$

$$v(0, z) = 0, \quad z_0(0) = 0 \quad (1.4)$$

2. Решение задачи для вязкой жидкости. Приближение вязкой жидкости соответствует пределу $P \rightarrow \infty$. Полагая в (1.2) – (1.4) $z_0(t) = 1$ и опуская последние условия в (1.3) и (1.4), получим линейную краевую задачу для классического уравнения теплопроводности.

Методом разделения переменных [1–3] можно получить для поля скорости решение в виде ряда Фурье

$$v(t, z) = z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(n - 1/2)z}{(n - 1/2)^3} \exp(-\pi^2(n - 1/2)^2 t)$$

Отсюда для безразмерного расхода следует выражение

$$Q = 2 \int_0^1 v dz = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1/2)^{-4} e^{-\pi^2(n - 1/2)^2 t} \quad (2.1)$$

Ряд (2.1) сходится при всех значениях t . Однако для малых значений t удобнее пользоваться тождественным рядом

$$Q = 2t - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} + r(t), \quad r(t) < \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-1/t} \quad (2.2)$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt' \int_0^{t'} e^{-n^2/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-n^2/t}$$

Ряд (2.2) можно вывести с помощью формулы Пуассона [12]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x - 2n\pi a x} = x^{1/2} e^{\pi a^2 x} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi / x} \cos n\pi 2a \right) \quad (2.3)$$

следующим образом. Продифференцируем дважды по t ряд (2.1), полагаем в правой части $\pi t = x$ и преобразуем сумму по формуле Пуассона (2.3) при $a = 1 - 1/2$. Возвращаясь к исходному аргументу $t = x/\pi$, получим

$$Q''(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 / t} \right) \quad (2.4)$$

Полагаем $t = 0$ в ряде (2.1) для $Q(t)$ и в его производной $Q'(t)$. Пользуясь известными значениями для числовых рядов, получим $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 2$. Отсюда, интегрируя дважды ряд (2.4), получим ряд (2.2).

При достаточно малых t ряд (2.2) сходится существенно быстрее, чем (2.1). Порядок малости остаточного члена $r(t)$ в (2.2) выше любой, как угодно большой степени t . Функция $r(t)$ неаналитична в окрестности $t = 0$ и представляется сходящимся знакопеременным рядом, остаточный член в котором меньше первого отброшенного члена. Первый линейный по t член разложения в (2.2) нетрудно получить из асимптотического решения (2.1). Однако второй член разложения $t^{3/2}$ и, тем более, последующие неаналитические члены получить можно только с помощью специальных преобразований (см. разд. 4).

Продемонстрируем эффективность рядов (2.1) и (2.2) для вычисления расхода $Q(t)$. Ограничимся двумя членами в частичных суммах $Q_+(t)$ ряда (2.1) и $Q_-(t)$ ряда (2.2)

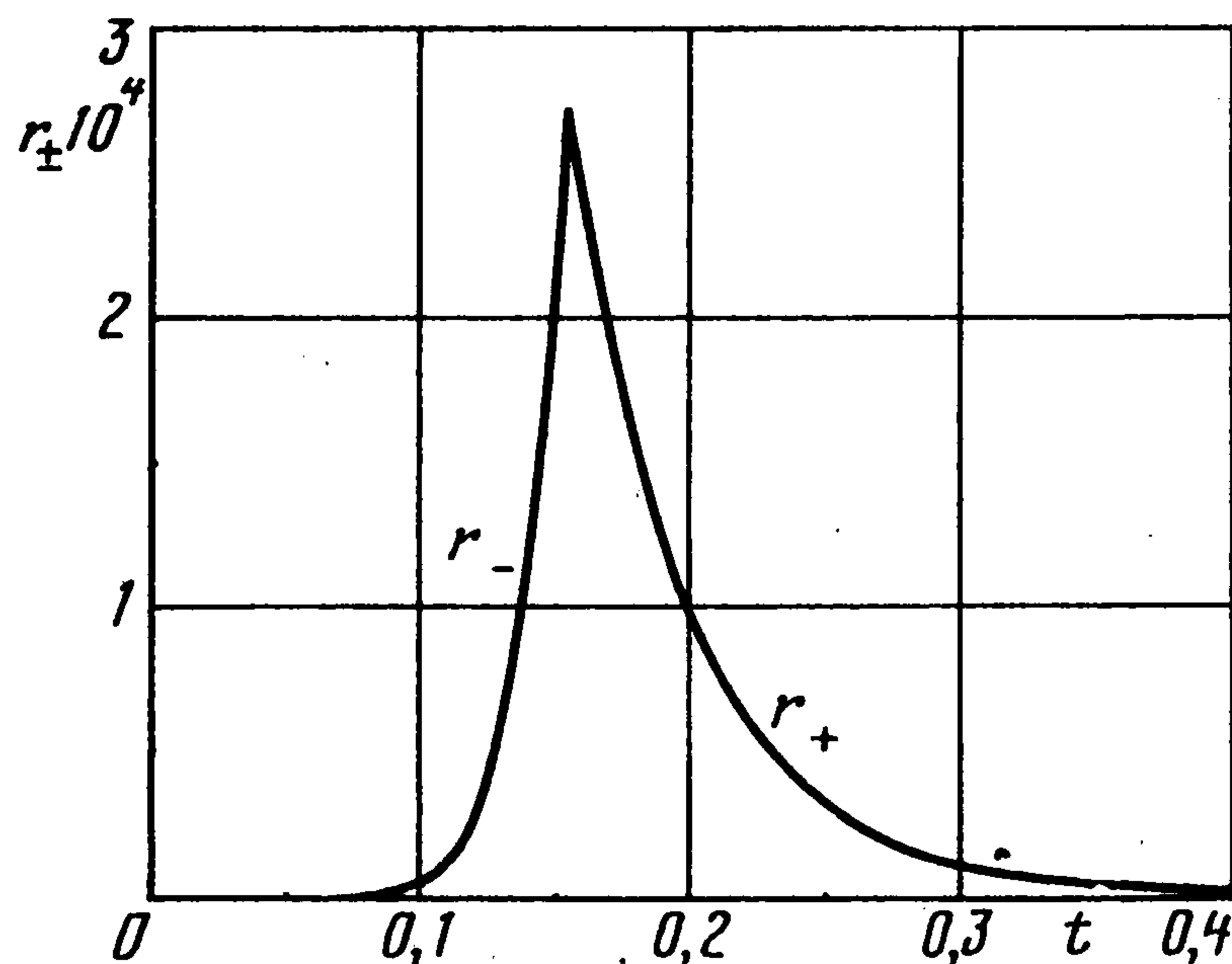
$$Q_+(t) = 2/3 - 0,657e^{-2,47t}, \quad Q_-(t) = 2t - 1,504t^{3/2}$$

которые дают соответственно верхнюю и нижнюю оценки для $Q(t)$. Тогда расход можно определять по формуле

$$Q = \begin{cases} 2t - 1,504t^{3/2}, & t \leq t_0 \\ 2/3 - 0,657e^{-2,47t}, & t > t_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

На фиг. 1 изображены функции

$$r_+(t) = Q_+(t) - Q(t) \approx 0,00811e^{-22,2t}, \quad r_-(t) = Q(t) - Q_-(t) \approx 3,01t^{3/2}e^{-1/t}$$



Фиг. 1

определяющие погрешности двучленных частичных сумм (2.5). Наибольшая погрешность выражения (2.5) достигается в точке $t_0 \approx 0,153$ и равна $r_+(t) = r_-(t) \approx 2,7 \cdot 10^{-4}$, а относительная погрешность менее 0,13%.

3. Решение методом осреднения ускорения. Метод Слезкина-Тарга был предложен [5,6] для расчета течений вязкой жидкости и использовался также для решения задачи об ударе вязкопластичного стержня [7,8].

Ниже излагается модификация метода Слезкина-Тарга, которая отличается от традиционного мето-

да тем, что будет получено общее обыкновенное дифференциальное уравнение для расхода. Зависимость расхода от времени можно будет определять, минуя детальный расчет поля скорости, и для решения ряда практических задач этого может оказаться достаточно.

Сначала проиллюстрируем метод и его эффективность на решении задачи (1.4) – (1.6) для вязкой жидкости. Ускорение заменяется на среднее по сечению; таким образом,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

Тогда

$$v(z) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt}\right) \left(z - \frac{1}{2} z^2\right)$$

Интегрируя, получим искомое уравнение для расхода

$$Q(t) = \int_0^2 v(z) dz = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt}\right)$$

которое имеет следующее решение, удовлетворяющее условию $Q(0) = 0$:

$$Q(t) = \frac{2}{3} (1 - e^{-3t}) \quad (3.2)$$

Главная при $t \ll 1$ асимптотика $2t$, та же, что и у точного решения, а при $t \gg 1$ коэффициент при экспоненциальной асимптотике отличается от точного. Наибольшая разница в решениях (3.2) и (2.1) равна 0,044 при $t = t_0$, что составляет 13,5% от точного значения.

Перейдем к решению краевой задачи (1.2) – (1.4) методом Слезкина–Тарга для вязкопластичной среды. Заменяем ускорение в (1.2) на среднее (3.1). Тогда решение уравнения (1.2), удовлетворяющее первым двум условиям (1.3), примет вид

$$v = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt}\right) \left(z_0 z - \frac{1}{2} z^2\right) \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в третье граничное условие (1.3), получим первое уравнение для функций $z_0(t)$, $Q(t)$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{P(1 - z_0)} \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.3) по z , получим второе уравнение для $z_0(t)$, $Q(t)$

$$Q = 2 \int_0^{z_0} v dz + 2(1 - z_0)v(z_0) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt}\right) \left(z_0^2 - \frac{1}{3} z_0^3\right) \quad (3.5)$$

Систему уравнений (3.4), (3.5) удобнее записать в виде дифференциального уравнения для переменной $\Pi(z_0) = 1/(1 - z_0)$

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\Pi^3}\right) \frac{d\Pi}{dt} + \Pi = P, \quad \Pi(0) = 1 \quad (3.6)$$

решение которого имеет вид

$$3t = \left(1 - \frac{1}{P^3}\right) \ln \frac{P - 1}{P - \Pi} - \frac{1}{P^3} \ln \Pi + \frac{1 - \Pi^2}{2P\Pi^2} + \frac{1 - \Pi}{P^2\Pi} \quad (3.7)$$

Через найденную функцию $\Pi(t)$ расход выражается алгебраически

$$Q = \frac{(2\Pi + 1)(\Pi - 1)^2}{3\Pi^2 P} \quad (3.8)$$

Из (3.6), (3.8) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\Pi \rightarrow P, \quad Q \rightarrow Q_\infty = \frac{(2P + 1)(P - 1)^2}{3P^3} \quad (3.9)$$

Перейдем к получению асимптотического разложения точного решения краевой задачи (1.2) – (1.4) при $t \ll 1$ и сравним его с найденным приближенным решением (3.7), (3.8).

4. Асимптотическое решение на малых временах. Решение ищем в виде следующего разложения:

$$v = tF(\xi) + t^{3/2}F_1(\xi) + \dots, \quad z_0 = 2\sqrt{t}(A + B\sqrt{t} + \dots), \quad \xi = z/(2\sqrt{t}) \quad (4.1)$$

Отсюда найдем значения функции v и ее производных по t и z , подставляя которые в уравнение (1.2) и граничные условия (1.3), получим для определения функций $F(\xi)$, $F_1(\xi)$ и постоянных A, B следующие краевые задачи:

$$F''(\xi) + 2\xi F'(\xi) - 4F(\xi) + 4 = 0 \quad (4.2)$$

$$F(0) = 0, \quad F'(A) = 0, \quad F''(A) = -4/P \quad (4.3)$$

$$F_1''(\xi) + 2\xi F_1'(\xi) - 6F_1(\xi) = 0 \quad (4.4)$$

$$F_1(0) = 0, \quad F_1'(A) - 4B/P = 0, \quad F_1''(A) + 8BA/P = -8A/P \quad (4.5)$$

(последние условия упрощены с учетом равенств $F''(A) = -4, F'''(A) = 8A$).

Уравнение (4.2) имеет общее решение

$$F(\xi) = c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + 1 \quad (4.6)$$

$$y_1(\xi) = 2\xi^2 + 1, \quad y_2(\xi) = (\xi^2 + 1/2)\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \xi + \xi \exp(-\xi^2) \quad (4.7)$$

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-x^2} dx$$

где $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$ – независимые решения однородного уравнения (4.2).

Для постоянных c_1, c_2 и A из (4.3) получим

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 2A \exp(A^2) / P(A) \quad (4.8)$$

$$P(A) = 1 + \sqrt{\pi} A \exp(A^2) \operatorname{erf} A =$$

$$= \begin{cases} 1 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A^4 + \alpha_3 A^6 + \dots + \alpha_n A^{2n} + \dots \\ \sqrt{\pi} A e^{A^2} + (\alpha_1 A^2)^{-1} - (\alpha_2 A^4)^{-1} \dots + (-1)^n (\alpha_n A^{2n})^{-1} + \dots \end{cases} \quad (4.9)$$

$$(\alpha_n = 2^n / (2n - 1)!!, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 4/3, \dots)$$

Последнее выражение (4.8) представляет собой параметризацию безразмерного числа $P(A)$, входящего в краевую задачу (1.2) – (1.4). Первый ряд (4.9) сходится для любых A , второй ряд – асимптотический и им удобно пользоваться для вычисления функции $P(A)$ при больших A . Остаточный член для второго ряда не превосходит первого отброшенного члена.

Аналогично можно найти решение задачи (4.4), (4.5). Уравнение (4.4) имеет два

независимых решения

$$Y_1 = 2\xi^3 + 3\xi, \quad Y_2(\xi) = Y_1(\xi)(\sqrt{\pi}/2) \operatorname{erf} \xi + (\xi^2 + 1) \exp(\xi^2) \quad (4.10)$$

Первому условию из (4.5) удовлетворяет семейство решений $F_1(\xi) = C(2\xi^3 + 3\xi)$. Подставляя это выражение во вторые два условия (4.5) получим систему для определения постоянных B и C . Окончательно с помощью соотношений (4.6) – (4.8) найдем $F(\xi)$, а из упомянутой системы – постоянные B и C и функцию $F_1(\xi)$

$$F(\xi) = -2\xi^2 + 2(A/P(A)) \exp(A^2) ((\xi^2 + 1/2)\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \xi + \xi \exp(-\xi^2)) \quad (4.11)$$

$$F_1(\xi) = -\frac{4(2\xi^2 + 3)\xi}{3P(2A^2 + 3)}$$

Постоянная A найдется из уравнения $P(A) = P$, функция $P(A)$ определяется рядами (4.9).

Скорость находится из разложения (4.1). В частности, скорость твердого ядра

$$v(t, z_0) = tF(A) + t^{3/2} \sqrt{t} F_1(A) + \dots = t(1 - 1/P) - t^{3/2} 4A/(3P) + \dots \quad (4.12)$$

Расход в твердом ядре равен произведению скорости (4.12) на ширину ядра $2(1 - z_0)$. Расход вне ядра определяется интегралом

$$2 \int_0^{z_0} v(t, z) dz = 4t^{3/2} \int_0^A F(x) dx = t^{3/2} \left(4A - \frac{8A}{3P} \exp(A^2) - \frac{4A}{3P} \right) \quad (4.13)$$

Интеграл в (4.13) вычислен с помощью уравнения

$$-F'(0) + 2AF(A) - 6 \int_0^A F(\xi) d\xi + 4A = 0 \quad (4.14)$$

$$F(A) = 1 - 1/P, \quad F'(A) = 0, \quad F'(0) = 4A \exp(A^2)/P$$

которое получается интегрированием по ξ уравнения (3.2) в пределах от 0 до A .

Для полного расхода на начальной стадии $t \ll 1$ имеем

$$Q = 2t \left(1 - \frac{1}{P} \right) - t^{3/2} \frac{8A}{3P} \exp(A^2) + \dots \quad (4.15)$$

5. Асимптотическое решение на больших временах. Решение краевой задачи (1.2)–(1.4) ищем в виде

$$v = v_\infty(z) - \varepsilon(z) \exp(-\alpha^2 t), \quad z_0 = z_\infty - \beta \exp(-\alpha^2 t) \quad (5.1)$$

$$v_\infty(z) = z_\infty z - 1/2 z^2, \quad z_\infty = 1 - 1/P \quad (5.2)$$

где $v_\infty(z)$, z_∞ – соответственно скорость и граница твердого ядра установившегося при $t \rightarrow \infty$ течения.

Подставляем выражения (5.1) в (1.2), (1.3) и учитываем только линейные по ε и β слагаемые. Тогда для определения функции $\varepsilon(t)$ и постоянной β получим краевую задачу

$$\varepsilon''(z) + \alpha^2 \varepsilon(z) = 0 \quad (5.3)$$

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \varepsilon'(z_\infty) = \beta, \quad \varepsilon''(z_\infty) = -\beta P \quad (5.4)$$

Для определения функции $\varepsilon(z)$ следует исключить β из (5.4), после чего решение краевой задачи представляется в виде линейной комбинации собственных функций

$\varepsilon_n \sin(\alpha_n z)$. Собственные значения α_n находятся из алгебраического уравнения

$$\frac{\alpha_n}{P} \operatorname{tg}\left(\frac{P-1}{P} \alpha_n\right) = 1 \quad (5.5)$$

Для наименьшего положительного корня α_0 уравнения (5.6) справедливы разложения

$$\alpha_0 = \begin{cases} P(P-1)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{6}(P-1) + \frac{11}{360}(P-1)^2\right), & P \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2P}\right)^3 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3P}\right) \left(\frac{\pi}{2P}\right)^5, & P > 2 \end{cases} \quad (5.6)$$

относительная погрешность которых менее 1%.

Каждый последующий корень α_n превосходит предыдущий α_{n-1} более чем на $\pi P/(P-1)$ и находится в интервале $\pi n P/(P-1) < \alpha_n < (\pi/2 + \pi n)P/(P-1)$. Наименьшее собственное число $\alpha = \alpha_0$ определяет асимптотически главные в (5.1) члены. С помощью соотношений (5.2) и (5.4) для них получим

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 \sin \alpha_0 z, \quad \beta = \varepsilon'(z_\infty) = \varepsilon_0 \alpha_0 \cos[(P-1)\alpha_0 / P] \quad (5.7)$$

Определим расход

$$Q = 2(1-z_0)v(t, z_0) + 2 \int_0^{z_0} v \, dz$$

Подставляя сюда выражения (5.1), (5.7) и учитывая линейные по ε и β члены, получим разложение для расхода на стадии установления ($t \gg 1$)

$$Q_+ = Q_\infty(P) - \lambda(P) \exp(-\alpha_0^2 t), \quad Q_\infty(P) = \frac{(2P+1)(P-1)^2}{3P^3} \quad (5.8)$$

$$\beta = \frac{\lambda \alpha_0^2}{4P}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\lambda P}{4 \sin[(P-1)\alpha_0 / P]} \quad (5.9)$$

где Q_∞ – предельное при $t \rightarrow \infty$ значение расхода (см. (3.9)).

6. Составное разложение. Число $\lambda(P)$ определяется из условия гладкой сшивки функций Q_+ (5.8) и Q_- (4.14) в точке t_0

$$Q_+(t_0) = Q_-(t_0), \quad Q'_+(t_0) = Q'_-(t_0) \quad (6.1)$$

Сначала исключаем λ из системы (6.1)

$$\alpha_0^2 Q_+(t_0) + Q'_+(t_0) = \alpha_0^2 Q_-(t_0) + Q'_-(t_0) \quad (6.2)$$

Подставляя выражение (5.8) и (4.14) в (6.2), получим уравнение

$$t_0^{1/2} - p t_0 + q t_0^{3/2} = r \quad (6.3)$$

в котором p, q, r – функции параметра P . После вычисления $t_0(P)$ можно найти λ из (6.1)

$$\lambda = \exp(\alpha_0^2 t_0) (Q_\infty - Q_-(t_0)) \quad (6.4)$$

Величина t_0 определяет границу действия двух асимптотик $Q_+(t)$ и $Q_-(t)$. Погрешность в ее определении мало влияет на значение величины λ по формуле (6.4). Поэтому достаточно ограничиться простой интерполяцией для функции $t_0(P)$. При $P \gg 1$ асимптотики $Q_+(t)$ и $Q_-(t)$ переходят в асимптотики (2.5) для вязкой жидкости, для

которых $t_0 \approx 0,15$. При $P - 1 \ll 1$ для коэффициентов уравнения (6.3) и t_0 справедливы асимптотики

$$p \approx \frac{1}{\sqrt{2(P-1)}}, \quad q \approx \frac{2}{3(P-1)}, \quad r \approx \sqrt{\frac{P-1}{8}}, \quad t_0 \approx 0,186(P-1) \quad (6.5)$$

Можно предложить следующую интерполяцию для t_0 :

$$t_0 = \frac{P-1}{6,5P-1,2} \quad (6.6)$$

которая учитывает оба предельных случая $P \gg 1$ и $P - 1 \ll 1$.

Формулы (6.4) и (6.5) определяют недостающий параметр λ в выражении для расхода. Через λ по формулам (5.9) выражаются постоянные β и ϵ_0 и затем по (5.1) находится поле скорости и граница твердого ядра $z_0(t)$. В итоге для расхода Q и границы ядра $z_0(t)$ получим

$$Q = Q_-(t, P), \quad z_0 = z_-(t, P), \quad t < t_0(P) \quad (6.7)$$

$$Q = Q_+(t, P), \quad z_0 = z_+(t, P), \quad t > t_0(P)$$

Функция $Q_-(t, P)$ определена формулой (4.14), а $Q_+(t, P)$ находится из соотношения (5.8), (6.4) и (6.6). Функцию $z_-(t, P)$ можно получить из соотношения (4.1), а $z_+(t, P)$ из (5.1) с помощью (5.2) и (5.9)

$$z_-(t, P) = 2A\sqrt{t} - 2\frac{1+2A^2}{3+2A^2}t \quad (6.8)$$

$$z_+(t, P) = 1 - \frac{1}{P} - \frac{\lambda\alpha_0^2}{4P} \exp(-\alpha_0^2 t) \quad (6.9)$$

Перейдем к анализу полученных решений.

В предельном случае $P - 1 \ll 1$ (течение, близкое к чисто пластичному) можно пользоваться асимптотиками (6.5) и

$$Q_\infty \approx (P-1)^2, \quad \alpha_0^2 \approx 1/(P-1), \quad A = \sqrt{(P-1)/2}$$

$$Q_-(t_0) \approx 0,221(P-1)^2, \quad \lambda = 0,938(P-1)^2$$

Отсюда из соотношений (4.15) и (6.7)–(6.9) найдем

$$\begin{aligned} Q_- &= 2(P-1)t - \frac{4}{3}\sqrt{2(P-1)}t^{3/2} \\ z_- &= \sqrt{2(P-1)}t - \frac{2}{3}t \\ Q_+ &= (P-1)^2(1 - 0,938 \exp(-t/(P-1))) \\ z_+ &= (P-1)(1 - 0,234 \exp(-t/(P-1))) \end{aligned} \quad (6.10)$$

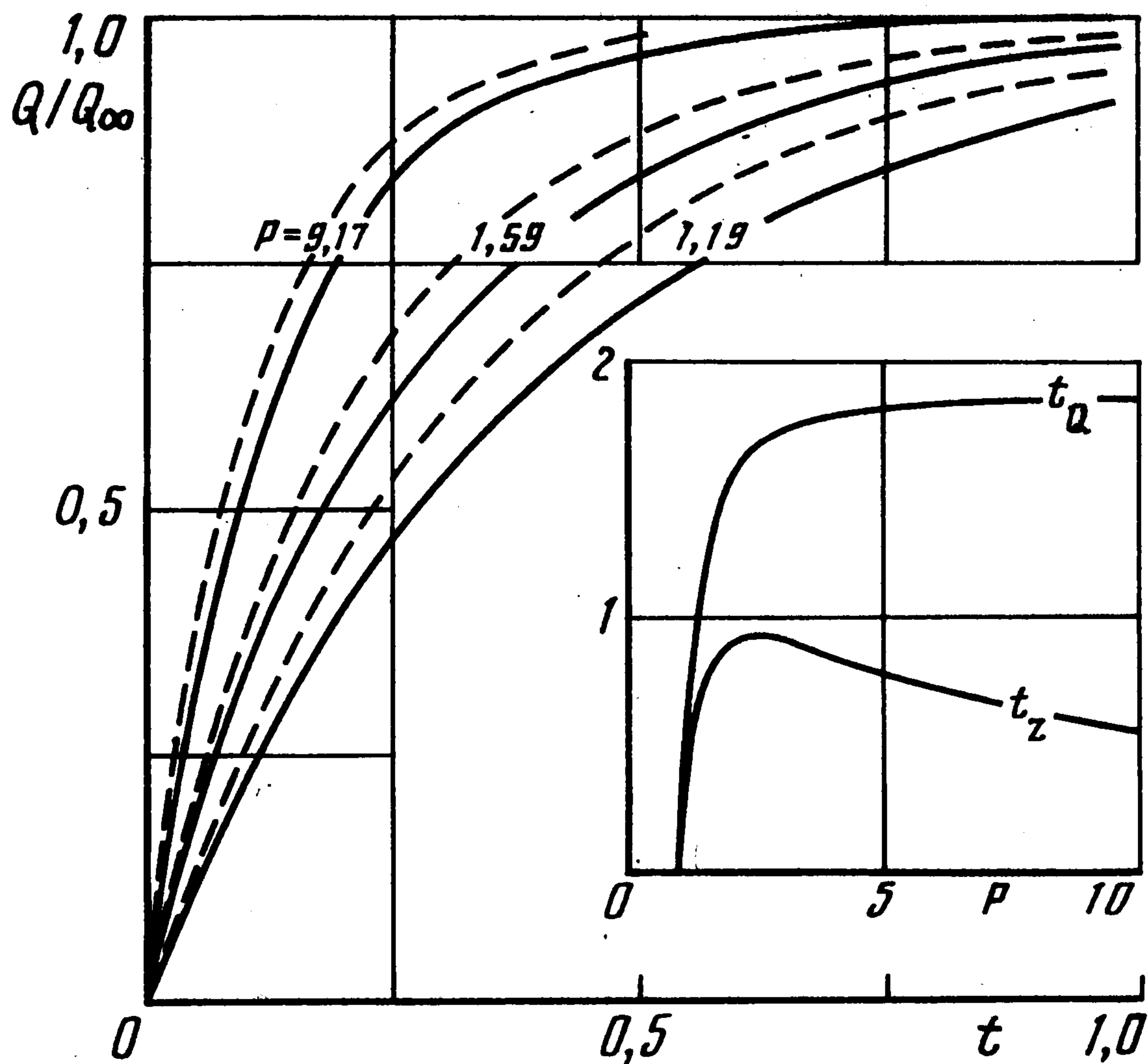
В противоположном предельном случае $P \gg 1$ (вязкое течение) с помощью асимптотик

$$Q_\infty \approx \frac{2}{3}; \quad \alpha_0^2 \approx 2,467; \quad A \exp(A^2) \approx P/\sqrt{\pi};$$

$$Q_-(t_0) \approx 0,216, \quad \lambda \approx 0,657, \quad \beta \approx 0,405/P, \quad t_0 = 0,153$$

для расхода получим выражения, совпадающие с (2.7)–(2.9) для вязкой жидкости, а для границы твердого ядра имеем

$$z_- = 2A\sqrt{t} - 2t, \quad z_+ = 1 - 1/P - 0,405e^{-2,47t}/P \quad (6.11)$$



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены зависимости $Q(t)/Q_\infty$ при трех различных значениях параметра A , значения которого указаны ($A = 0,3$; $P(A) = 1,19$; $A = 0,5$; $P(A) = 1,59$; $A = 1,2$, $P(A) = 9,17$). Сплошной линией обозначен расчет по асимптотическим формулам (6.7), (4.15), (5.8), штриховой линией – расчет по приближенному решению (3.7), (3.8), полученному методом Слезкина – Тарга.

Зависимость $Q(t)/Q_\infty$ при $A = 1,2$ мало отличается от точной зависимости для вязкой жидкости (2.7)–(2.9). Наибольшее отличие приближенного решения (3.7), (3.8) от точного для вязкой жидкости ($P \gg 1$) составляет 13,5% и достигается при $t = 0,153$. При уменьшении параметра P относительная ошибка уменьшается. Таким образом, относительная погрешность определения расхода по методу Слезкина – Тарга не превышает 13,5%.

Зависимости от параметра P времени установления t_Q для расхода и t_z для границы твердого ядра определяются из условия того, что соответствующая величина отличается от своего предельного значения на 1%. С помощью асимптотических зависимостей (5.9) и (6.9) найдем

$$t_Q = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{100\lambda}{Q_\infty}, \quad t_z = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{25\lambda\alpha_0}{P-1}$$

При $P - 1 \ll 1$ из (6.10) найдем $t_Q \approx 4,54(P-1)$, $t_z \approx 3,15(P-1)$. При $P \gg 1$ из (2.7) и (6.11) найдем $t_Q \approx 1,86$, $t_z \approx 1,5 - 0,405 \ln P$.

На фиг. 2 представлены зависимости $t_Q(P)$ и $t_z(P)$. Функция $t_Q(P)$ монотонно возрастает. Функция $t_z(P)$ возрастает на участке $0 \leq P < 2,4$, при $P \approx 2,4$ она достигает наибольшего значения $t_z \approx 0,93$, и при $P > 2,4$ медленно убывает. При $P \approx 28$ величина

$t_z \approx t_0$. При $P > 28$ время установления границы твердого ядра меньше t_0 и его следует находить из (6.11) для внутренней асимптотики $z_-(t)$, откуда

$$t_z \approx \frac{1}{4A^2} \approx \frac{1}{4 \ln P}$$

Таким образом, при большом значении P граница твердого ядра $z_0 = 1 - 1/P$ устанавливается очень быстро и затем происходит более длительный процесс установления скорости и расхода:

Автор благодарит Д.М. Климова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00250).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Операционное исчисление в приложении к задачам механики. М.; Л.: ОНТИ, 1938. 224 с.
2. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 432 с.
3. Carslow H.S., Jager J.C. Operational Methods in Applied Mathematics. Oxford: Oxford Univ. Press, 1941. = Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во иностран. лит., 1948. 292 с.
4. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. = Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
5. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951. 420 с.
6. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
7. Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 497–502.
8. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязко-пластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 359 с.
9. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.
10. Петров А.Г. Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязко-пластичной среды между двумя пластинами // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 3. С. 343–347.
11. Петров А.Г. Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязко-пластичной среды между двумя пластинами // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 3–13.
12. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. = Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. Л., М., Гостехиздат, Ч. 1, 1933, 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1999