УДК 532.59

© 2000 г. В.В. Рындина

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ БРЕНТА – ВЯЙСЯЛЯ ПО ДИСПЕРСИОННЫМ КРИВЫМ

Исследуется единственность решения уравнения для квадрата частоты Брента – Вяйсяля (ЧБВ), построенного по последовательности дисперсионных кривых внутренних гравитационных волн в океане постоянной глубины с непрерывно меняющейся ЧБВ, в определенных классах. Приводятся примеры функциональных классов, в которых ЧБВ однозначно восстанавливается по последовательности дисперсионных кривых.

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывно стратифицированный океан постоянной глубины H. Согласно описанной ранее [1] математической модели такого океана дисперсионные кривые (ДК) внутренних гравитационных волн определяются собственными значениями $\omega^2 = \omega_n^2(k^2)$ краевой задачи

$$W'' - \frac{\mu(z)}{g}W' + \frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2 - f^2}k^2 W = 0 \tag{1.1}$$

$$z \in [-H, 0]; \quad W(-H) = 0, \quad W'(0) = g\frac{k^2}{\omega^2 - f^2}W(0)$$

где $\mu(z)$ – квадрат частоты Брента – Вяйсяля (ЧБВ), g – ускорение силы тяжести, f – параметр Кориолиса, k – волновое число, ω – частота свободных гармонических волн.

Одной из важнейших задач океанографии является определение стратификации океана, количественно характеризуемой ЧБВ. Большой интерес представляет задача построения ЧБВ по известной последовательности ДК $\{\omega^2 = \omega_n^2(k^2)\}$, т.е. обратная спектральная задача для задачи (1.1). Эта задача включает в себя вопросы единственности восстановления ЧБВ по ДК и построение алгоритмов восстановления ЧБВ по ДК в тех или иных классах. Некоторые из этих вопросов рассматривались ранее [2–5][1] (исправляем опечатку: в формулах (2.2) работы [2] под знаками интегралов должно быть $\rho_*(x)$ вместо $\rho_*(z)$).

Ниже вопросы единственности восстановления ЧБВ по ДК исследуются на основе анализа так называемого основного уравнения для ЧБВ, определяемого известной последовательностью ДК.

[1] См. также: *Рындина В.В.* О единственности восстановления частоты Брента – Вяйсяля по последовательности дисперсионных кривых. Ростов-н/Д., 1986. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.03.86. № 1806–В86; О возможности восстановления частично известной частоты Брента – Вяйсяля стратифицированного океана по известным дисперсионным кривым. Ростов-н/Д., 1989. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.03.89. № 2571-В89; Алгоритм восстановления частично известной частоты Брента – Вяйсяля стратифицированного океана по частично известным дисперсионным кривым. Ростов-н/Д., 1990. 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.01.90. № 476-В90.

2. Основное уравнение. От краевой задачи (1.1) после перехода к безразмерным величинам

$$x = -\frac{z}{H}, \quad u = \frac{W}{(gH)^{1/2}}, \quad \eta^2 = \frac{H}{g}\omega^2, \quad \xi^2 = H^2k^2, \quad q(x) = \frac{H}{g}\mu(-Hx), \quad F^2 = \frac{H}{g}f^2$$

перейдем к краевой задаче

$$u'' + q(x)u' + \frac{q(x)-\eta^2}{\eta^2 - F^2}\xi^2 u = 0 \tag{2.1}$$

$$u'(0) = -\xi^2(\eta^2 - F^2)^{-1}u(0), \quad u(1) = 0$$

с двумя параметрами ξ и η, представляющими соответственно волновое число и частоту свободных гармонических волн.

Как в [1], введем в рассмотрение параметр $\lambda = \xi^2(\eta^2 - F^2)^{-1}$ и, кроме того, параметр $s = \lambda^2 - \lambda F^2 - \xi^2$. При этом краевая задача (2.1) перепишется в виде

$$(\rho u')' + (\lambda q - \lambda^2)\rho u = -s\rho u \tag{2.2}$$

$$u'(0) = -\lambda u(0), \quad u(1) = 0, \quad \rho(x) = \exp\left(\int_0^x q(t)dt\right)$$

Краевая задача (2.2) эквивалентна интегральному уравнению с симметричным ядром

$$y(x) = s\int_0^1 K(x,t,\lambda)y(t)dt, \quad y(x) = \sqrt{\rho(x)}u(x) \tag{2.3}$$

$$K(x,t,\lambda) = \exp[-\lambda(x+t)]\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\int_\sigma^1 \frac{\exp(2\lambda y)}{\rho(y)}dy, \qquad \sigma = \begin{cases} t, & x \le t \\ x, & x > t \end{cases} \tag{2.4}$$

Ядро $K(x, t, \lambda)$ при любом вещественном λ удовлетворяет условиям осцилляционности теоремы Г.М. Финкельштейна [6] и, следовательно, является осцилляционным. Поэтому интегральное уравнение (2.3) имеет счетное множество положительных и простых характеристических значений $s_0(\lambda) < s_1(\lambda) < \ldots$.

Для того чтобы выяснить, как определяются функции $s_j(\lambda)$ через функции $\eta_j^2(\xi^2) = g^{-1}H\omega_j^2(H^{-2}\xi^2)$, предполагаемые известными в обратной спектральной задаче, заметим, что пара уравнений

$$\lambda = \xi^2(\eta^2 - F^2)^{-1}, \quad s_j(\lambda) = \lambda^2 - \lambda F^2 - \xi^2 \tag{2.5}$$

определяет ДК $\eta^2 = \eta_j^2(\xi^2)$ задачи (2.1) в параметрическом виде при условии, что параметр λ пробегает множество значений функции $\lambda_j(\xi^2) = \xi^2(\eta_j^2(\xi^2) - F^2)^{-1}$, рассматриваемой на луче $(0, +\infty)$. Поскольку $\lambda_j(\xi^2)$ возрастает на $(0, +\infty)$ [1], рассматриваемое множество есть луч $(c_j, +\infty)$, где $c_j = \lim\lambda_j(\xi^2)$ при $\xi \to 0$.

Было показано [1], что $\lim\eta_j^2(\xi^2) = F^2$ при $\xi \to 0$. Поэтому, положив $\eta_j^2(0) = F^2$, получим, что c_j – обратная величина углового коэффициента касательной к графику ДК $\eta^2 = \eta_j^2(\xi^2)$ в начале координат в плоскости (ξ^2, η^2).

Из (2.5) следует также, что функция $s_j(\lambda)$ может быть непосредственно вычислена по формуле

$$s_j(\lambda_j(\xi^2)) = \lambda_j^2(\xi^2) - F^2\lambda_j(\xi^2) - \xi^2$$

в точках $\lambda = \lambda_j(\xi^2)$, пробегающих луч $(c_j, +\infty)$, когда ξ пробегает луч $(0, +\infty)$.

Функция $s_j(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности $G_j(I)$ любого отрезка I вещественной прямой. Это следует из того, что семейство интегральных операторов $K(\lambda)$ с симметричным вещественным ядром $K(x, t, \lambda)$ есть самосопряженное голоморфное семейство типа (A) компактных операторов, определенных на вещественной оси, и оператор $K(\lambda)$ при любом $\lambda \in R$ имеет простые характеристические значения, не обращающиеся в нуль [7].

Как функция аналитическая, $s_j(\lambda)$ своими значениями на луче $(c_j, +\infty)$ определяется во всей области своей аналитичности; в частности, $s_j(\lambda)$ определяется на вещественной прямой. Таким образом, по известной последовательности ДК $\{\omega^2 = \omega_j^2(k^2)\}$ задачи (1.1) однозначно определяется последовательность характеристических чисел $\{s_j(\lambda)\}$ интегрального уравнения (2.3), аналитически зависящих от неспектрального параметра λ.

След ядра (2.4)

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_n(\lambda)} \tag{2.6}$$

допускает представление

$$A(\lambda) = \int_0^1 K(x,x,\lambda)dx = \int_0^1 \Phi(x)\exp(2\lambda x)dx, \quad \Phi(x) = \int_x^1 \frac{\rho(t-x)}{\rho(t)}dt \tag{2.7}$$

Функция $\Phi(x)$ определяется через $A(\lambda)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, и следовательно, функция $\Phi(x)$ определяется последовательностью ДК, поскольку ею по формуле (2.6) определяется след $A(\lambda)$. На последнее равенство (2.7) можно смотреть как на уравнение, которому удовлетворяет функция $\rho(x)$.

Заметим, что из определения $\rho(x)$ через $q(x)$ следует, что задачи нахождения $\rho(x)$ и $q(x)$ эквивалентны.

Последнее уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$\Phi(x) = \int_x^1 \exp\left[\int_t^{t-x} q(\zeta)d\zeta\right]dt \tag{2.8}$$

относительно $q(x)$. Уравнение (2.8) является основным уравнением в данной работе.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если функция $q(x)$ – решение уравнения (2.8), то и функция $q_1(x) = q(1-x)$ будет его решением. Из этого следует, что в классе непрерывных функций на отрезке [0, 1] уравнение (2.8), вообще говоря, однозначно неразрешимо. Поэтому представляет интерес задача выделения функциональных классов Ψ, в которых оно однозначно разрешимо при условии, что функция $\Phi(x)$ берется из класса

$$G = \left\{\Phi(x) = \int_x^1 \exp\left[\int_t^{t-x} q(\zeta)d\zeta\right]dt : q(x) \in \Psi\right\}$$

Такие классы Ψ будем называть классами единственности для уравнения (2.8).

3. Решение основного уравнения в случае частично известной ЧБВ. Рассмотрим случай, когда функция $q(x) \in C[0, 1]$ известна на отрезке $[a, 1]$, $a \in (0, 1)$. Отметим, что в реальном океане ЧБВ заметно меняется на сравнительно небольшой глубине и практически постоянна на больших глубинах (более 1 км). Поэтому рассматриваемый случай представляет практический интерес. Покажем, что если функция $q(x)$ равна известной функции $q_0(x)$ на отрезке $[a, 1]$, то она однозначно определяется из уравнения (2.8) на отрезке $[0, 1-a]$.

Заменив в последнем равенстве (2.7) x на $1-x$ и продифференцировав полученное равенство, будем иметь

$$-\Phi'(1-x)=\frac{\rho(x)}{\rho(1)}+\int_0^x \frac{q(1-x+t)}{\rho(1-x+t)}\rho(t)dt \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что $\rho(1)=-(\Phi'(1))^{-1}$ определяется по ДК. Если $0<t<x<1-a$, то $1-x+t\in[a,1]$ и, следовательно, величины

$$q(1-x+t),\quad \rho(1-x+t)=\rho(1)\exp\left[\int_1^{1-x+t} q_0(\zeta)d\zeta\right]$$

для $t\in[0,x]$ известны. Уравнение Вольтерры второго рода (3.1) для $\rho(x)$ имеет единственное решение в классе непрерывных функций на отрезке $[0, 1-a]$.

Если $q(x)=q_0=\text{const}$ на $[a, 1]$, то для $x\in[0,1-a]$ из последнего соотношения (2.7) следует равенство

$$\exp(-q_0x)\Phi(1-x)=-\Phi'(1)\int_0^x \rho(t)\exp(-q_0t)dt \tag{3.2}$$

Путем дифференцирования этого равенства получим явное представление

$$\rho(x)=-P[\Phi'(1-x)+q_0\Phi(1-x)],\quad P=\rho(1),\quad x\in[0,1-a] \tag{3.3}$$

Случай $a=\frac{1}{2}$ рассмотрен ранее [4, 5] (см. также последние две работы из цитированных в сноске). Отметим, что в работах [4, 5] в формуле ядра $K(x,t,\lambda)$ пропущен множитель $\sqrt{\rho(x)\rho(t)}$.

Если известно, что $q(x)\in C_1[0,1]$, то при $a=\frac{1}{2}$ заранее знать значение q_0 не обязательно, так как оно может быть найдено по функции $\Phi(x)$.

Покажем как это можно сделать. Продифференцировав соотношение (3.3) и положив $x=\frac{1}{2}$ в полученном равенстве и в равенстве (3.3), получим (всюду далее до конца разд. 3

$$\rho=\rho(\tfrac{1}{2}),\quad \Phi=\Phi(\tfrac{1}{2}),\quad \Phi'=\Phi'(\tfrac{1}{2}),\quad \Phi''=\Phi''(\tfrac{1}{2}))$$

$$q_0\rho=-P(-\Phi''-q_0\Phi'),\quad \rho=-P(\Phi'+q_0\Phi) \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что

$$\Phi''=-2q_0\Phi'-q_0^2\Phi$$

Отсюда вытекает справедливость равенства

$$\Phi'^2-\Phi\Phi''=(\Phi'+q_0\Phi)^2 \tag{3.5}$$

Так как $P>0$, то из (3.4) следует, что выражение в скобках правой части (3.5) отрицательно. Поэтому

$$q_0=(-\Phi'-B)/\Phi,\quad B=(\Phi'^2-\Phi\Phi'')^{1/2}$$

4. Некоторые общие необходимые условия для решений основного уравнения. Допустим, что функция $q(x)$ $m-1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Тогда функции

$$\rho(x),\quad \rho_1(x)=\exp\left[\int_0^x q(1-t)dt\right]$$

будут непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$ m раз. Между функциями $\rho(x)$ и $\rho_1(x)$ имеет место очевидная связь

$$\rho(x)\rho_1(1-x) = P$$

используя которую перепишем уравнение (2.8) в виде

$$\int_x^1 \rho(t-x)\rho_1(1-t)dt = P\Phi(x) \tag{4.1}$$

Продифференцировав тождество (4.1) k раз ($k = 1, 2, ..., m$) и положив в полученном равенстве $x = 0$, $x = 1$, получим в неявном виде условия, которым удовлетворяют решения основного уравнения

$$(-1)^k P\Phi_{(0)}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \rho_{(0)}^{(j)}\rho_{1(1)}^{(k-j-1)} + \int_0^1 \rho_{(t)}^{(k)}\rho_1(1-t)dt \tag{4.2}$$

$$(-1)^k P\Phi_{(1)}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \rho_{(0)}^{(j)}\rho_{1(0)}^{(k-j-1)}; \quad k = 1,2,...,m$$

От равенств (4.2) можно перейти к равенствам, явно связывающим значения функции $q(x)$ и ее производных в точках $x = 0$ и $x = 1$. Так, при $m = 3$ из равенств (4.2) получим после преобразований

$$q(0)+q(1) = \Phi_1, \quad Q_1 = \Phi_2, \quad Q_2 = \Phi_3 \tag{4.3}$$

$$q'(0)-q'(1)-q(0)q(1) = \Phi_4, \quad Q_3 - 4q(0)q(1) = \Phi_5$$

где

$$\Phi_1 = P\Phi''(1), \quad \Phi_2 = -1-\Phi'(0), \quad \Phi_3 = \Phi''(0) - P\Phi''(1)$$

$$\Phi_4 = -P\Phi^{(3)}(1) - \Phi_1^2, \quad \Phi_5 = -\Phi^{(3)}(0) + \Phi_4 - \frac{3}{2}\Phi_1^2, \quad Q_n = \int_0^1 q^n(t)dt$$

5. Примеры параметрических классов единственности. При помощи условий (4.3), которым должны удовлетворять решения уравнения (2.8), можно построить некоторые параметрические классы единственности для уравнения (2.8).

В качестве примера такого класса рассмотрим класс функций

$$\Psi_1 = \{c\exp[-\alpha(z-a)^2] : c > 0, \ \alpha > 0, \ z \in [0,1]\}$$

в котором a – произвольное фиксированное вещественное число. Второе и третье равенства из (4.3) дают два уравнения, которым должны удовлетворять c и α

$$cp(\alpha) = \Phi_2, \quad c^2 p(2\alpha) = \Phi_3; \quad p(\alpha) = \int_0^1 \exp[-\alpha(z-a)^2]dz \tag{5.1}$$

Разделив почленно квадрат первого из равенств (5.1) на второе, получим уравнение для α

$$f(\alpha) = \Phi_2^2\Phi_3^{-1}, \quad f(\alpha) = (p(\alpha))^2(p(2\alpha))^{-1} \tag{5.2}$$

Можно показать, что функция $f(\alpha)$ убывает на $[0, +\infty)$, из чего следует, что уравнение (5.2) имеет единственное решение. Положительная постоянная c однозначно определяется любым из уравнений системы (5.1). Таким образом, класс Ψ_1 – класс единственности для уравнения (2.8).

В качестве второго примера рассмотрим класс функций

$$\Psi_2 = \{az^n + b : \min(a, a+b) > 0, \ n > 1, \ a \neq 0\}$$

Первое, второе и четвертое равенства из (4.3) дают три уравнения

$$a+2b=\Phi_1,\quad a+(n+1)b=(n+1)\Phi_2,\quad na+b(a+b)=-\Phi_4$$

Из первых двух уравнений a и b определяются однозначно, из третьего однозначно определяется n. Таким образом, Ψ_2 – класс единственности для уравнения (2.8).

Исследуем класс

$$\Psi_3=\{az+b:a+b>0,\ b>0\}$$

Заметим, что он содержит наряду с функцией $q(z)$ и функцию $q(1-z)$ и поэтому не будет классом единственности для уравнения (2.8). Возьмем подклассы класса Ψ_3, не содержащие функции $q(z)$ и $q(1-z)$ одновременно

$$\Psi_{31}=\{az+b:a\geqslant 0,b>0\},\quad \Psi_{32}=\{az+b:a\leqslant 0,a+b>0\}$$

Из первого и четвертого равенств (4.3) получаем систему уравнений для a и b:

$$a+2b=\Phi_1,\quad b(a+b)=-\Phi_4$$

Она имеет два решения

$$a_1=D,\ b_1=\frac{1}{2}(\Phi_1-D);\ a_2=-D,\ b_2=\frac{1}{2}(\Phi_1+D)$$

$$(D=\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_4})$$

первое из которых принадлежит подклассу Ψ_{31}, а второе – Ψ_{32}. Следовательно, подклассы Ψ_{31}, Ψ_{32} являются классами единственности для уравнения (2.8).

Аналогичным образом проверяется, что классы функций

$$\Psi_4=\{a(z-\lambda)^{-1}:a>0,\lambda<0\},\quad \Psi_5=\{a(z-\lambda)^{-1}:a>0,\lambda>1\}$$

$$\Psi_6=\{a\exp(\lambda z):a>0,\lambda>0\},\quad \Psi_7=\{a\exp(\lambda z):a>0,\lambda<0\}$$

являются классами единственности для уравнения (2.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Рындина В.В.* Зависимость дисперсионных кривых внутренних волн стратифицированного океана от частоты Брента – Вяйсяля // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 741–747.
3. *Потетюнко Э.Н.* Волновые движения неоднородной жидкости // Вопросы волновых движений жидкости. Ростов-н/Д: Союз науч. и инж. о-в, Рост. обл. правл., 1989. С. 86–171.
4. *Rindina V.V., Machulina L.A.* Re-establishment of the stratification parameter of an ocean by the dispersion curves of internal gravity waves // Mathematical Modelling and Applied Mathematics: Intern. Conf., Moscow–Vilnius, 1990. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 18–23.
5. *Мачулина Л.А., Рындина В.В., Черкесов Л.В.* Восстановление частоты Вяйсяля – Брента по спектральным характеристикам свободных колебаний стратифицированной жидкости // Волновые движения жидкости и смежные вопросы. Краснодар: Изд-е Кубан. ун-та, 1991. С. 92–98.
6. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 360 с.
7. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin et al.: Springer, 1966. = *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
25.V.1999