УДК 532.59:534.1

© 2000 г. В.Ф. Санников

ПРОСТОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ О КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛНАХ В ГЛУБОКОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуется классическая задача об установившихся корабельных волнах, создаваемых в глубокой жидкости движущейся равномерно и прямолинейно областью поверхностных давлений. Известны точные (в линейной постановке) выражения для характеристик вынужденных волн в виде двукратных интегралов и однократных интегралов со специальной функцией – интегральной экспонентой. С использованием аналитических свойств решения получено более простое выражение для возвышения поверхности жидкости в виде однократных интегралов от обычных функций, позволяющие существенно упростить численный анализ ближней области волнового поля.

Известное решение линейной задачи о поверхностных корабельных волнах [1, 2] представляет возвышение поверхности жидкости суммой двух слагаемых. Одно из них (в виде двойного интеграла) описывает локальные возмущения в окрестности генератора, а другое (в виде однократного интеграла) – систему корабельных волн за генератором. Наиболее сложен для расчетов двойной интеграл, имеющий неограниченную область интегрирования и осциллирующую подынтегральную функцию, в связи с чем представляет интерес преобразование этого слагаемого в более удобную форму для вычислений. Значительным продвижением в этом направлении стало преобразование его в однократный интеграл со специальной функцией – интегральной экспонентой [3]. Такой прием оказался весьма конструктивным; его применение позволило получить аналогичное решение в задачах о поверхностных волнах в жидкости конечной глубины [4] и внутренних волнах в стратифицированной жидкости [5]. Однако доля локального слагаемого составляет [3] около 90% времени, затрачиваемого на расчеты, что связано с сопутствующими вычислениями интегральной экспоненты от комплексного аргумента. Дальнейшие исследования задачи о внутренних корабельных волнах [6] показали, что использование аналитических свойств решения позволяет преобразовать двойной интеграл в однократный от обычных функций и тем самым существенно сократить время, затрачиваемое на расчеты локального слагаемого поля возмущений. Этот результат, полученный для внутренних корабельных волн, не переносится непосредственно на модель поверхностных волн, так как с разными граничными условиями на поверхности жидкости, которые используются в этих моделях, связаны различия в дисперсионных зависимостях внутренних и поверхностных волн. Однако и для поверхностных волн локальные возмущения, как и волновые, можно представить в виде однократных интегралов с простой подынтегральной функцией и тем самым получить экономичную для вычислений форму представления решения.

1. Пусть по поверхности $z = 0$ глубокой жидкости, занимающей область $-\infty < x_1$, $y < +\infty$, $-\infty < z < 0$, в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью c движутся давления вида

$$P_a = p_0 f(x_1 + ct,\ y) \tag{1.1}$$

В линейной постановке возмущения жидкости, создаваемые давлениями (1.1) описываются уравнением Лапласа относительно потенциала возмущенных скоростей

$$\Delta\phi = 0\ (-\infty < x,\ y < +\infty,\ -\infty < z < 0) \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$\phi_{xx} + \varepsilon\phi_x + \beta\phi_z = -(\rho c)^{-1} P_{ax} \quad (z=0) \tag{1.3}$$
$$\phi \to 0 \quad (|x|,\ |y| \to \infty,\quad z \to -\infty)$$

Здесь $x = x_1 + ct$, $\beta = gc^{-2}$, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости. Уравнение поверхности жидкости задается формулой

$$\zeta = -(\rho g)^{-1} P_a - cg^{-1}(\phi_x + \varepsilon\phi) \quad (z=0) \tag{1.4}$$

ε – параметр Релея ($\varepsilon \to +0$).

Уравнения (1.2)–(1.4) – записаны в системе координат, связанной с давлениями (1.1).

2. Применив к (1.2)–(1.4) интегральное преобразование Фурье по горизонтальным переменным x, y, получим выражение для возвышения поверхности жидкости

$$\zeta(x,\ y) = \frac{p_0\beta}{4\pi^2\rho g}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[i(mx+ny)]}{m^2 - im\varepsilon - \beta k}F(m,\ n)dmdn \tag{2.1}$$

Здесь $k = \sqrt{m^2 + n^2}$; $F(m,\ n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$.

Рассмотрим модельное распределение давлений вида

$$f(x,\ y) = (R^2/a^2 + 1)^{-3/2},\quad F(m,\ n) = 2\pi a^2 e^{-ak},\quad R^2 = x^2 + y^2 \tag{2.2}$$

При стремлении параметра a к нулю и произведения p_0a^2 к $(2\pi)^{-1}$ такое распределение вырождается в дельта-функцию, что позволяет получить из (2.1) выражение для функции Грина изучаемой задачи. С этой точки зрения, введение функции (2.2) может рассматриваться как регуляризация (2.1). Ранее [1, 2] с той же целью было использовано давление, постоянное и равное p_0 в круге радиуса a и равное нулю вне этого круга. Преобразование Фурье такого распределения выражается через функцию Бесселя, что представляется менее удобным, чем (2.2).

Подставим теперь выражение (2.2) в (2.1) и, переходя к полярным координатам

$$(m,\ n) = k(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad (x,\ y) = R(\cos\gamma,\ \sin\gamma)$$

выводим

$$\zeta(x,\ y) = \frac{P}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\theta}\int\limits_0^{\infty}\frac{k\exp[k(-a+i\mu)]}{k - (\beta + i\varepsilon\cos\theta)\cos^{-2}\theta}dkd\theta =$$
$$= -\frac{P}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Re}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{J_\varepsilon(\theta,\ R,\ \gamma)}{\cos^2\theta}d\theta,\quad P = p_0\frac{a^2\beta}{\rho g},\quad \mu = R\cos(\theta - \gamma) \tag{2.3}$$

$$J_\varepsilon(\theta,\ R,\ \gamma) = \int\limits_0^{\infty}\frac{\exp[k(-a+i\mu)]}{k - (\beta + i\varepsilon\cos\theta)\cos^{-2}\theta}dk \tag{2.4}$$

3. Внутренний интеграл (2.4) имеет при $\varepsilon > 0$ полюс в верхней комплексной полуплоскости переменной k. Аналогично тому, как это было сделано ранее [3], с помощью методов контурного интегрирования и замены переменной

$$k[a - i\mu] = \tau,\quad \mathrm{Im}\,\tau = 0,\quad \mathrm{Re}\,\tau \geqslant 0$$

преобразуем интеграл (2.4) к виду

$$J_\varepsilon(\theta,\ R,\ \gamma) = 2\pi i H(\cos(\theta - \gamma))\exp(\psi_\varepsilon) + \int\limits_0^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau + \psi_\varepsilon}d\tau \tag{3.1}$$
$$\psi_\varepsilon = (-a + i\mu)(\beta + i\varepsilon\cos\theta)\cos^{-2}\theta,\quad H(\eta) = \begin{cases}1, & \eta > 0\\ 0, & \eta < 0\end{cases}$$

В выражении, стоящем в правой части (3.1), возможен предельный переход при $\varepsilon \to +0$, осуществляя который и используя определение [7] интегральной экспоненты $E_1(\eta)$, выводим

$$\zeta(x,\ y) = -\frac{P}{\pi}\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Psi_2[2\pi i H(\mu) + E_1(\psi)]d\theta \tag{3.2}$$

$$\Psi_n = \exp(\psi)\cos^{-n}\theta,\quad \psi = \psi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = (-a + i\mu)\beta\cos^2\theta$$

Формула (3.2) дает представление для $\zeta(x, y)$ в виде однократного интеграла со специальной функцией в подынтегральном выражении, которую в расчетах волнового поля по формуле (3.2) необходимо вычислять от комплексных значений ее аргумента, что связано со значительным объемом вычислений [3].

4. Для поля внутренних волн выражение, аналогичное (3.2), было преобразовано [6] в формулу, содержащую однократные интегралы от обычных функций. Непосредственно этот метод не может быть применен для преобразования соотношения (3.2) в более простую формулу, что связано с различиями в дисперсионных зависимостях поверхностных и внутренних волн. Однако можно существенно упростить интеграл (3.2), используя аналитические свойства интегральной экспоненты $E_1(\eta)$.

Воспользуемся тем, что в нуле и в бесконечности $E_1(\eta)$ имеет логарифмическую особенность. Разность значений $E_1(\eta)$ на берегах разреза вдоль действительной оси переменной η от $-\infty$ от 0 вычисляется по формуле

$$E_1(-\eta + i0) - E_1(-\eta - i0) = -2\pi i$$

Асимптотика $E_1(\eta)$ при $|\eta| \to \infty$ имеет вид [7]

$$E_1(\eta) = \eta^{-1}\exp(-\eta)(1 + O(\eta^{-1}))\quad \left(|\arg\eta| < \frac{3}{2}\pi\right) \tag{4.1}$$

Подстановка $x = -x'$ и замена $\theta = -\theta'$ в (3.2) показывает, что

$$\zeta(-x,\ y) = \zeta(x,\ y) - 2P\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Psi_2 d\theta \tag{4.2}$$

Поэтому в дальнейших преобразованиях можно ограничиться рассмотрением случая $x \geqslant 0$.

Выделим из (3.2) слагаемое, содержащее специальную функцию E_1

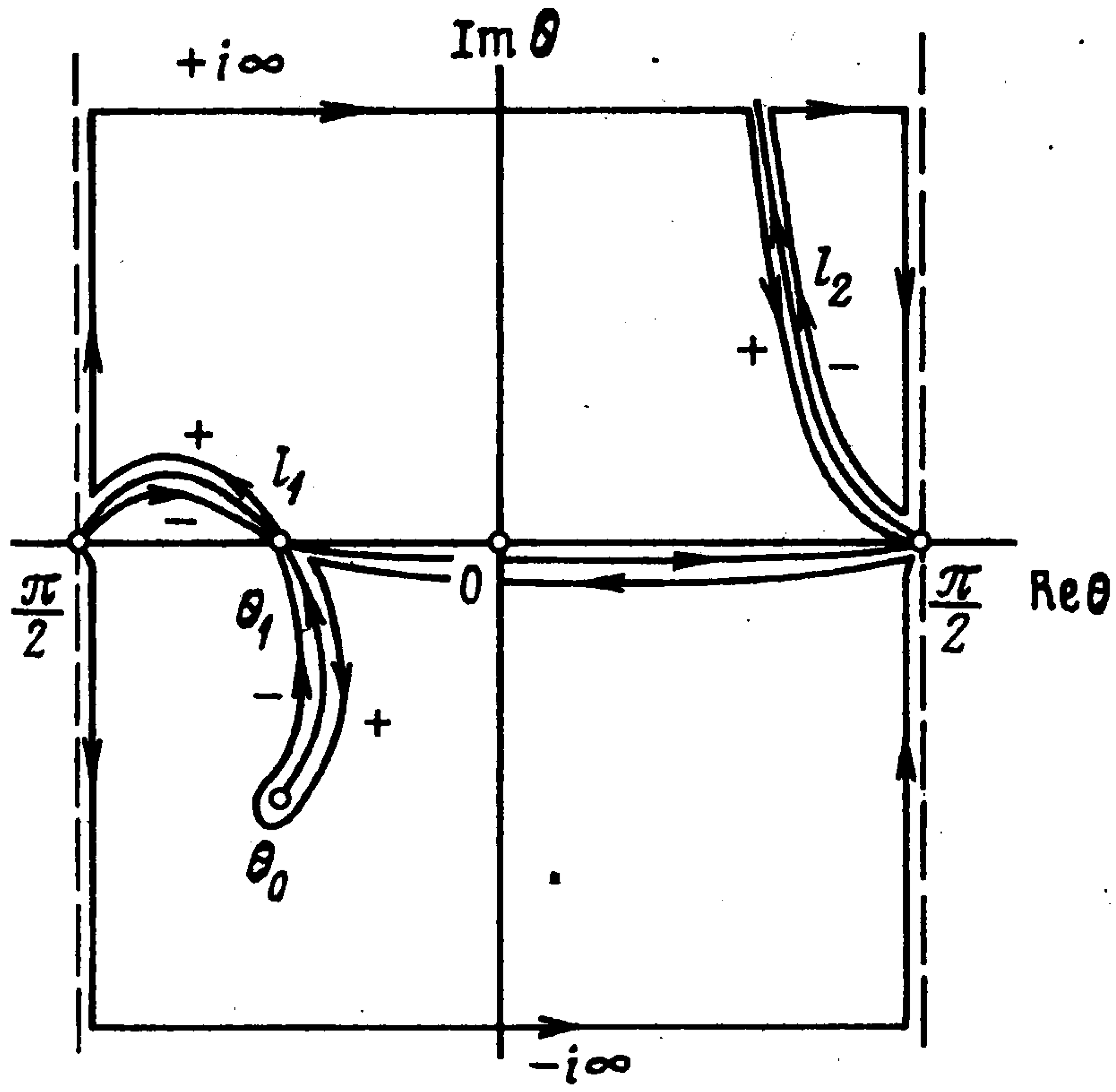
$$J_1 = \operatorname{Re}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Psi_2 E_1(\psi)d\theta \tag{4.3}$$

Рассмотрим полосу $|\operatorname{Re}\theta| \leqslant \pi/2$ в комплексной плоскости параметра интегрирования θ. Особыми точками функции $E(\theta) = E_1(\psi)$ являются $\theta = \mp\pi/2$ – полюсы функции ψ и $|\operatorname{Im}\theta| = \infty$, $\theta = \theta_0$ – нули ψ, где θ_0 – решение уравнения

$$a - iR\cos(\theta - \gamma) = 0:\ \operatorname{Re}\theta_0 = -\pi/2 + \gamma,\quad \operatorname{sh}(\operatorname{Im}\theta_0) = -a/R \tag{4.4}$$

Для выделения однозначной ветви подынтегральной функции (4.3) устроим разрезы от θ_0 до $-\pi/2$ по кривой l_1 и от $\pi/2$ до $\operatorname{Im}\theta = +i\infty$ по кривой l_2 так, чтобы на этих кривых $\operatorname{Re}\psi < 0$ и $\operatorname{Im}\psi = 0$ (фигура).

Заметим, что кривая l_1 пересекает действительную ось θ в точке $\theta_1 = -\pi/2 + \gamma$. Обозначим часть l_1, идущую от θ_0 до θ_1, как l_{11}, а часть – от θ_1 до $-\pi/2$, как l_{12}. Кроме того, через $l_{11}^{\pm}$, $l_{12}^{\pm}$ и $l_2^{\pm}$ обозначим берега разрезов, на которых $\operatorname{Im}\psi$ имеет соответствующий знак (фигура). Анализ показывает, что при движении по l_1 от θ_0 до $-\pi/2$ мнимая часть ψ положительна справа от кривой, а при движении по l_2 от $\pi/2$ до $\operatorname{Im}\theta =$



$= +i\infty$ – слева. Асимптотики (4.1) позволяют осуществлять предельный переход при замыкании контуров интегрирования в окрестностях особых точек.

Трансформируя пути интегрирования в (4.3) сначала в верхней, а затем в нижней комплексных полуплоскостях переменной интегрирования θ, выводим

$$J_1 = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\theta_1} + \int\limits_{\theta_1}^{\pi/2}\right) = \mathrm{Re}\left(-\int\limits_{l_{12}^-} + \int\limits_{l_{12}^+} + \int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2+i\infty} - \int\limits_{l_2^+}\right) \tag{4.5}$$

$$J_1 = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\theta_1} + \int\limits_{\theta_1}^{\pi/2}\right) = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2-i\infty} + \int\limits_{\pi/2-i\infty}^{\pi/2} - \int\limits_{l_{11}^+} + \int\limits_{l_{11}^-}\right) \tag{4.6}$$

Несложно проверить, что

$$\mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2+i\infty} + \int\limits_{\pi/2-i\infty}^{\pi/2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Re}\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2-i\infty} = \mathrm{Re}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2+i\infty} = \mathrm{Re}\int\limits_{l_2^-}$$

Складывая (4.5) и (4.6), находим, что

$$2J_1 = \mathrm{Re}\left[\left(\int\limits_{l_{12}^+} - \int\limits_{l_{12}^-}\right) - \left(\int\limits_{l_{11}^+} - \int\limits_{l_{11}^-}\right) - \left(\int\limits_{l_2^+} - \int\limits_{l_2^-}\right)\right] \tag{4.7}$$

Учитывая далее разность значений интегральной экспоненты на берегах разрезов, из (4.7) получаем

$$J_1 = \pi\,\mathrm{Im}\left(\int\limits_{l_{12}} - \int\limits_{l_{11}} - \int\limits_{l_2}\right)\Psi_2 d\theta \tag{4.8}$$

Подставляя выражение (4.8) в (3.2), выводим выражение для $\zeta(x, y)$ в виде суммы однократных интегралов

$$\zeta(x,y) = P\,\mathrm{Im}\frac{\partial}{\partial a}\left(2\int\limits_{\theta_1}^{\pi/2} + \int\limits_{l_{11}} - \int\limits_{l_{12}} + \int\limits_{l_2}\right)\Psi_2 d\theta \tag{4.9}$$

Выполним дифференцирование по a в формуле (4.9), учитывая, что во втором интеграле, входящем в (4.9), нижний предел интегрирования зависит от a, поэтому

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial a}\int_{l_{11}} \Psi_2 d\theta = \frac{\partial}{\partial a}\int_{\theta_0,\theta_\varepsilon l_{11}}^{\theta_1} \Psi_2 d\theta = -\frac{\partial\theta_0/\partial a}{\cos^2\theta_0} - \int_{l_{11}} \psi_a \Psi_2 d\theta$$

Из (4.4) находим, что $\partial\theta_0/\partial a = i[R\sin(\theta_0-\gamma)]^{-1}$. Проводя далее необходимые преобразования и трансформируя пути интегрирования в области $\mathrm{Re}\,\psi \leqslant 0$, получаем окончательное выражение для возвышения поверхности жидкости в виде суммы однократных интегралов от обычных функций

$$\zeta(x,\ y) = -P\beta[\mathrm{sgn}(x)\zeta_1(|x|,\ y) + \zeta_2(|x|,\ y)] \tag{4.10}$$

$$\zeta_1(x,y) = \mathrm{Im}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi_4 d\theta \tag{4.11}$$

$$\zeta_2(x,\ y) = \frac{a^2x^2 - y^2(R^2+a^2)}{\beta\sqrt{R^2+a^2}\,(y^2+a^2)^2} + \mathrm{Im}\int_{\theta_0}^{+i\infty} \Psi_4 d\theta \tag{4.12}$$

Путь интегрирования в (4.11) идет вдоль действительной оси, а в (4.12) путь не должен проходить через точки $\theta = \pm\pi/2$.

Выражение (4.12) можно модифицировать, если выполнить интегрирование по частям. Вклад граничной точки θ_0 противоположен по знаку первому слагаемому этого выражения и сокращает его. Однако при этом усложняется подынтегральная функция и требуется, чтобы путь интегрирования не проходил через стационарные точки.

Интеграл из (4.12) преобразуется к более удобному для вычислений виду. Выберем путь интегрирования в (4.12) параллельным мнимой оси и, полагая $\theta = \theta_r + i\theta_i$, выполним замену $\cos\omega = 1/\mathrm{ch}\,\theta_i$. В результате выводится формула

$$\mathrm{Im}\int_{\theta_0}^{+i\infty} \frac{\exp(-\psi)}{\cos^4\theta} d\theta = \mathrm{Re}\int_{\omega_0}^{\pi/2} \frac{\cos^3\omega}{d^4(\omega)} \exp\left[-\beta\frac{\cos\omega(a\cos\omega + R\sin\omega)}{d^2(\omega)}\right] d\omega \tag{4.13}$$

$$d(\omega) = \sin\gamma + i\sin\omega\cos\gamma,\quad \omega_0 = -0\arcsin(a/\sqrt{a^2+R^2})$$

Такое преобразование возможно при $\gamma \geqslant \gamma_0 > -\pi/2$, когда прямолинейный путь интегрирования не проходит через особую точку $\theta = -\pi/2$. При $-\pi/2 \leqslant \gamma < \gamma_0$ путь интегрирования в (4.12) можно составить из параллельного действительной оси θ отрезка от θ_0 до мнимой оси и интервала мнимой оси от $i\,\mathrm{Im}\,\theta_0$ до $i\infty$. Интеграл по мнимой оси преобразуется к виду, аналогичному (4.13).

Если в формулах (4.11), (4.12) положить $a = 0$, а произведение p_0a^2 в (4.10) заменить на $(2\pi)^{-1}$, то будет получено выражение для волн, образуемых давлениями, сконцентрированными в одной точке поверхности жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Petters A.S.* A new treatment of the ship wave problem // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. № 2–3. P. 123–148.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Shen Hung-Tao, Farell César.* Numerical calculation of the wave integrals in the linearized theory of water waves // J. Ship Res. 1977. V. 21. № 1. P. 1–10.
4. *Веденьков В.Е., Санников В.Ф.* Численный метод исследования поверхностных волн, генерируемых движущимися барическими возмущениями // Теоретическое моделирова-

ние волновых процессов в океане. Севастополь: Изд-е Мор. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1982. С. 15–21.
5. *Санников В.Ф.* Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане. Севастополь: Изд-е Мор. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1983. С. 68–76.
6. *Санников В.Ф.* Точные решения линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 972–977.
7. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds. *Abramowitz M.* and *Stegun I.* N.Y.: Dover, 1975. = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Ред. *Абрамовиц М.* и *Стиган И.М.*: Наука, ГРФМЛ, 1979. 830 с.

Севастополь

Поступила в редакцию
22.X.1999