

УДК 533.6.011.3

© 2000 г. Л.М. Зигангареева, О.М. Киселев

### ОБ ИСТЕЧЕНИИ СТРУИ ГАЗА ИЗ КОНИЧЕСКОГО СОПЛА

Рассматривается осесимметричное дозвуковое истечение струи сжимаемой жидкости из конического сопла. При предположениях о существовании решения соответствующей краевой задачи и о справедливости для него определенного асимптотического представления доказывается, что в осесимметричной струе сжимаемой жидкости при критическом давлении на свободной поверхности скорость газа достигает звуковой на некоторой плоскости, перпендикулярной оси и расположенной на конечном расстоянии от кромок сопла. Приводятся результаты расчетов струи совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ . Даются аппроксимационные формулы, позволяющие определять форму струи со звуковой скоростью на свободной поверхности.

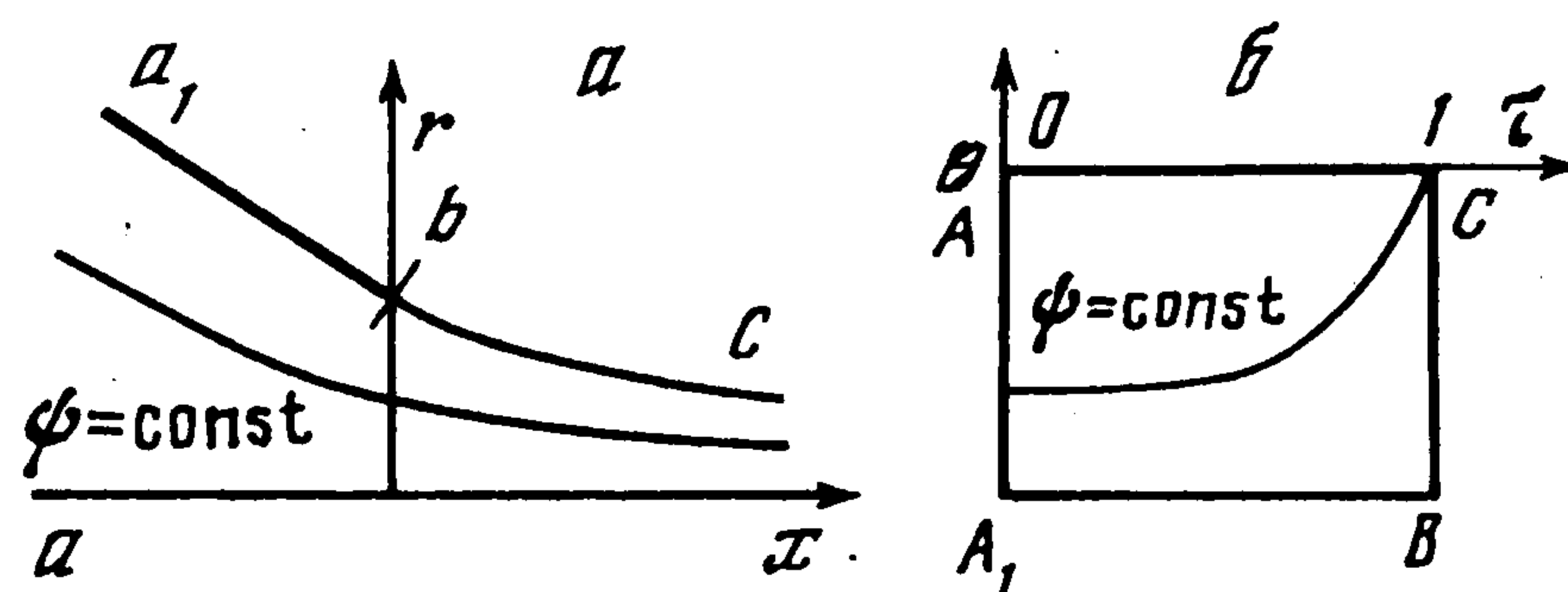
Задача истечения осесимметричной струи несжимаемой жидкости из воронкообразного сосуда была рассмотрена рядом авторов, однако результатов высокой точности получено не было (см. [1–3]). Был предложен [4] эффективный метод решения задачи об истечении осесимметричной струи сжимаемой жидкости (газа), основанный на использовании переменных годографа скорости. Однако в [4] и в более поздних работах отсутствуют результаты расчетов дозвукового истечения газа и не дается способа расчета струи со звуковой скоростью на свободной поверхности.

Ниже дается развитие метода [4], позволяющее, в частности, использовать его и в случае звуковой скорости на свободной поверхности.

**1. Формулировка задачи.** Рассмотрим осесимметричное дозвуковое истечение струи идеальной сжимаемой жидкости из полубесконечного конического сопла. Будем полагать, что внешние силы отсутствуют, течение – стационарное, баротропное, безвихревое. В полуплоскости цилиндрических координат  $x, r$  область, занятая течением, ограничена осью  $x$ , образующей конуса  $a_1b$ , составляющей угол  $\theta_0$  с осью  $x$ , и свободной поверхностью  $bc$ ; ось  $r$  проходит через кромку сопла  $b$  (фиг. 1, *a*).

Пусть  $V$  и  $\rho$  – скорость и плотность жидкости,  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ,  $M$  – число Маха,  $V_c, \rho_c, M_c$  – значения  $V, \rho, M$  на свободной поверхности ( $M_c \leq 1$ ),  $\tau = V/V_c, v = \rho/\rho_c, Y = v\tau r^2/2, \psi$  – функция тока, вводимая с помощью соотношений

$$\tau \cos \theta = (rv)^{-1} \psi_r, \quad \tau \sin \theta = -(rv)^{-1} \psi_x$$



Фиг. 1

(для обозначения частных производных используются нижние индексы).

В плоскости переменных  $\tau, \theta$  области течения соответствует прямоугольник  $\Sigma = \{(\tau, \theta) | 0 < \tau < 1, -\theta_0 < \theta < 0\}$  (фиг. 1, б; отрезок  $AA_1$  отвечает бесконечно удаленной точке торможения потока, точки  $B$  и  $C$  – точкам  $b$  и  $c$ ).

Известно [4–6], что функции  $\psi(\tau, \theta), r(\tau, \theta), x(\tau, \theta)$  удовлетворяют соотношениям

$$R = R(\psi, Y) = \sin \theta S^2 L - P_\theta S + P S_\theta = 0$$

$$L = L(\psi) = (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} + \tau^2 \psi_{\tau\tau} + (1 + M^2) \tau \psi_\tau \quad (1.1)$$

$$P = P(\psi) = \sin^2 \theta (\tau^2 \psi_\tau^2 + (1 - M^2) \psi_\theta^2)$$

$$S = S(\psi, Y) = 2Y + \psi_\theta \sin \theta$$

$$\begin{Bmatrix} x_\tau \\ r_\tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{r v \tau^2} \left( (M^2 - 1) \psi_\theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} + \frac{P}{S} \begin{Bmatrix} \operatorname{ctg} \theta \\ 1 \end{Bmatrix} \mp \tau \psi_\tau \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} x_\theta \\ r_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{r v \tau} \left( \tau \psi_\tau \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \mp \psi_\theta \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right) \quad (1.2)$$

Без ограничения общности можно полагать, что

$$\psi = 0 \text{ на } AC, \psi = 1 \text{ на } A_1 BC, \psi = (1 - \cos \theta) / (1 - \cos \theta_0) \text{ на } AA_1 \quad (1.3)$$

(последнее из условий (1.3) имеет место во всей области радиального течения к стоку).

С помощью соотношений (1.2) выразим  $Y$  через  $\psi$ :

$$Y = Y(\psi) = \psi \cos \theta + \int_0^\theta (\tau \psi_\tau + \psi) \sin \theta d\theta \quad (1.4)$$

При подстановке выражения (1.4) в уравнение (1.1) ( $S(\psi, Y(\psi)) = S(\psi), R(\psi, Y(\psi)) = R(\psi)$ ) получаем интегро-дифференциальное уравнение относительно  $\psi$ . Соотношения (1.1), (1.3), (1.4) определяют краевую задачу для  $\psi$  в области  $\Sigma$ . Решение этой задачи ищется в виде  $\psi = \psi^0 + \chi$ , где  $\psi^0$  – главная часть асимптотического разложения функции тока в окрестности особой точки  $C$ ,  $\chi$  – более гладкая функция, отыскиваемая методом конечных разностей.

**2. Асимптотическое разложение  $\psi$  при  $M_c < 1$ .** Будем считать, что  $M$  и  $v$  – известные функции  $\tau$ , аналитические в окрестности точки  $\tau = 1$ . При этом коэффициенты, зависящие от  $\tau$ , в выражениях (1.1), (1.2) разложимы в степенные ряды по  $\zeta = \tau - 1$ :

$$\tau^2 = 1 + 2\zeta + \zeta^2, \quad 1 - M^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \zeta^k, \quad \tau(1 + M^2) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k \quad (2.1)$$

$$u_0 = 1 - M_c^2, \quad u_k = -\frac{1}{k!} \left. \frac{d^k M^2}{d\tau^k} \right|_{\tau=1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (u_1 < 0)$$

$$q_0 = 2 - u_0, \quad q_1 = q_0 - u_1, \quad q_k = -u_{k-1} - u_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$v^{-1} = 1 + \zeta M_c^2 - \frac{1}{2} \zeta^2 (u_0 M_c^2 + u_1) + \dots$$

Полагая  $M_c < 1$ , введем переменные  $\sigma$  и  $\omega$ :

$$\sigma = (\theta^2 + \alpha^2 \zeta^2)^{1/2}, \quad \omega = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{\alpha \zeta}, \quad \alpha = u_0^{1/2} = (1 - M_c^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

( $\sigma$  и  $\omega$  – расстояние до начала координат и центральный угол в плоскости переменных

$\alpha\zeta, \theta; \omega = -\pi$  на  $AC, \omega = -\pi/2$  на  $CB$ ). Согласно (2.2)

$$\zeta = \alpha^{-1}\sigma \cos \omega, \quad \theta = \sigma \sin \omega \quad (2.3)$$

$$\sigma_\theta = \sin \omega, \quad \sigma_\tau = \alpha \cos \omega, \quad \omega_\theta = \sigma^{-1} \cos \omega, \quad \omega_\tau = -\alpha\sigma^{-1} \sin \omega \quad (2.4)$$

Систему (1.1), (1.4) можно записать в форме

$$L(\psi) = N(\psi), \quad N(\psi) = (SP_\theta - PS_\theta)(S^2 \sin \theta)^{-1} \quad (2.5)$$

Пусть  $Q(\psi) = L(\psi) - N(\psi)$ ,  $\psi_0$  – функция, удовлетворяющая условию  $Q(\psi_0) \rightarrow 0$  при  $(\tau, \theta) \in \Sigma, (\tau, \theta) \rightarrow (1, 0)$ , а также условиям  $\psi_0 = 0$  на  $AC, \psi_0 = 1$  на  $CB$ . Будем искать  $\psi_0$  в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\sigma$ , полагая

$$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = h_k(\sigma)f_k(\omega) \quad (2.6)$$

$$h_{k+1}(\sigma)/h_k(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

и требуя выполнения условий

$$\psi_k = 0 \quad \text{при} \quad \omega = -\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\psi_1 = 1 \quad \text{при} \quad \omega = -\pi/2, \quad \psi_k = 0 \quad \text{при} \quad \omega = -\pi/2, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

Пусть  $\psi$  – решение краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4). Очевидно, асимптотическое разложение  $\psi$  по малому параметру  $\sigma$  совпадает с разложением (2.6) до тех пор, пока функции  $\psi_k$  определяются однозначно.

Главный член разложения (2.6) естественно искать в виде  $\psi_1 = f_1(\omega)$ . С помощью соотношений (2.1), (2.3), (2.4) можно показать, что при этом

$$L(\psi_1) = L_1 + \Delta L_1, \quad P(\psi_1) = P_1 + \Delta P_1, \quad S(\psi_1) = S_1 + \Delta S_1, \quad R(\psi_1) = R_1 + \Delta R_1 \quad (2.8)$$

$$L_1 = \alpha^2 \psi_{1\theta\theta} + \psi_{1\tau\tau} = \alpha^2 \sigma^{-2} f_1'', \quad \Delta L_1 = O(\sigma^{-1})$$

$$P_1 = \theta^2 (\psi_{1\tau}^2 + \alpha^2 \psi_{1\theta}^2) = \alpha^2 \sin^2 \omega f_1'^2, \quad \Delta P_1 = O(\sigma)$$

$$S_1 = 2\psi_1 + \theta\psi_{1\theta} = 2f_1 + \sin \omega \cos \omega f_1', \quad \Delta S_1 = O(\sigma)$$

$$P_{1\theta} = \alpha^2 \sigma^{-1} \sin 2\omega (\cos \omega f_1'^2 + \sin \omega f_1' f_1'')$$

$$S_{1\theta} = \sigma^{-1} [\cos \omega (1 + 2 \cos^2 \omega) f_1' + \sin \omega \cos^2 \omega f_1'']$$

$$R_1 = \theta S_1^2 L_1 - P_{1\theta} S_1 + P_1 S_{1\theta} = O(\sigma^{-1}), \quad \Delta R_1 = O(1)$$

Приравняв нулю  $R_1$  – главный член в разложении  $R(\psi_1)$  по степеням  $\sigma$ , получим уравнение

$$4f_1^2 f_1'' - 4 \cos^2 \omega f_1 f_1'^2 + \sin \omega \cos \omega f_1'^3 = 0 \quad (2.9)$$

С учетом (2.7) потребуем выполнения условий

$$f_1(-\pi) = 0, \quad f_1(-\pi/2) = 1 \quad (2.10)$$

Численно-аналитическое исследование показывает, что краевая задача (2.9), (2.10) имеет единственное решение; монотонно возрастающая функция  $f_1(\omega)$  может быть получена численным интегрированием уравнения (2.9) при учете того, что для концов интервала  $[-\pi, -\pi/2]$  справедливы разложения

$$f_1(-\pi + u) = q^{-2} (u^2 - \frac{1}{3}u^4 + \frac{23}{180}u^6 - \frac{113}{2520}u^8 + \dots), \quad q = 0,83166$$

$$f_1\left(-\frac{\pi}{2} - u\right) = 1 - qu - \frac{1}{24}q^3 u^3 + \left(\frac{1}{12}q^2 - \frac{1}{24}q^4\right)u^4 + \left(\frac{7}{120}q^3 - \frac{27}{640}q^5\right)u^5 + \dots$$

Заметим, что зависимость  $f_1(\omega)$  была приведена ранее [4] без указания способа ее определения, в параметрическом виде, неудобном для практического применения

$$f_1 = t^2 / t_0^2, \quad \omega = -\pi + \operatorname{arctg}[J_1(2t) / J_0(2t)], \quad t \in [0, t_0]$$

где  $J_1, J_0$  – функции Бесселя,  $t_0$  – наименьший корень уравнения  $J_0(2t) = 0$ ,  $t_0 = q^{-1}$ .

Второй член разложения (2.6) может быть найден в виде  $\psi_2 = \sigma f_2(\omega)$ . Дифференциальное уравнение для  $f_2(\omega)$  получается в результате приравнивания нулю члена порядка единицы в разложении по  $\sigma$  выражения  $R(\psi_1 + \psi_2)$ . Однако для практических целей достаточно функции  $\psi_1 = f_1(\omega)$ , которая является главным членом в разложении искомой функции  $\psi$  по параметру  $\sigma$ . Заметим, что  $Q(\psi) = O(\sigma^{n-1})$  при  $R(\psi) = O(\sigma^n)$ , и следовательно,  $Q(\psi_1) = O(\sigma^{-1})$ .

**3. Асимптотическое разложение  $\psi$  при  $M_c = 1$ .** При  $M_c = 1$  коэффициент  $u_0$  в (2.1) обращается в нуль, что приводит к изменению типа особенности в точке  $C$ . Полагая  $M_c = 1$ , введем переменные  $\kappa$  и  $\beta$ :

$$\kappa = [(\mu\theta)^2 + |\zeta|^3]^{1/2}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\mu\theta}{|\zeta|^{3/2}}, \quad \mu = \frac{3}{2} |u_1|^{-1/2} \quad (3.1)$$

( $\kappa$  и  $\beta$  – расстояние до начала координат и центральный угол в плоскости преобразованных переменных годографа  $\zeta_1 = |\zeta|^{3/2}$ ,  $\theta_1 = \mu\theta$ ;  $\beta = 0$  на  $AC$ ,  $\beta = -\pi/2$  на  $CB$ ). Согласно (3.1)

$$\begin{aligned} \zeta &= -\kappa^{2/3} (\cos \beta)^{2/3}, \quad \theta = \mu^{-1} \kappa \sin \beta \\ \kappa_\theta &= \mu \sin \beta, \quad \kappa_\tau = -\frac{3}{2} \kappa^{1/3} (\cos \beta)^{4/3} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\beta_\theta = \mu \kappa^{-1} \cos \beta, \quad \beta_\tau = \frac{3}{2} \kappa^{-2/3} \sin \beta (\cos \beta)^{1/3}$$

Функцию  $\psi_0$  будем искать в виде

$$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = d_k(\kappa) g_k(\beta) \quad (3.3)$$

$$d_{k+1}(\kappa) / d_k(\kappa) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \kappa \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

требуя выполнения условий

$$\begin{aligned} \psi_k &= 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ \psi_1 &= 1 \quad \text{при} \quad \beta = -\pi/2, \quad \psi_k = 0 \quad \text{при} \quad \beta = -\pi/2, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Главный член разложения (3.3) ищем в виде  $\psi_1 = g_1(\beta)$ . С помощью соотношений (2.1), (3.2) можно показать, что в представлениях (2.8)

$$L_1 = u_1 \zeta \psi_{1\theta\theta} + \psi_{1\tau\tau} = \frac{9}{4} \kappa^{-4/3} (\cos \beta)^{2/3} \left( -\frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta g_1' + g_1'' \right), \quad \Delta L_1 = O(\kappa^{-2/3})$$

$$P_1 = \theta^2 (\psi_{1\tau}^2 + u_1 \zeta \psi_{1\theta}^2) = \frac{9}{4} \mu^{-2} \kappa^{2/3} \sin^2 \beta (\cos \beta)^{2/3} g_1'^2, \quad \Delta P_1 = O(\kappa^{4/3})$$

$$S_1 = 2\psi_1 + \theta \psi_{1\theta} = 2g_1 + \sin \beta \cos \beta g_1', \quad \Delta S_1 = O(\kappa^{2/3})$$

$$P_{1\theta} = \frac{9}{4} \mu^{-1} \kappa^{-1/3} \sin 2\beta (\cos \beta)^{2/3} (\cos \beta g_1'^2 + \sin g_1' g_1'')$$

$$S_{1\theta} = \mu \kappa^{-1} [\cos \beta (1 + 2 \cos^2 \beta) g_1' + \sin \beta \cos^2 \beta g_1'']$$

$$R_1 = \theta S_1^2 L_1 - P_{1\theta} S_1 + P_1 S_{1\theta} = O(\kappa^{-1/3}), \quad \Delta P_1 = O(\kappa^{1/3})$$

Приравняв нулю  $R_1$  – главный член в разложении  $R(\psi_1)$  по степеням  $\kappa$ , получим уравнение

$$4g_1^2 g_1'' + \sin \beta \cos \beta \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \beta\right) g_1'^3 - \frac{4}{3} \operatorname{tg} \beta g_1^2 g_1' - \left(4 - \frac{8}{3} \sin^2 \beta\right) g_1 g_1'^2 = 0 \quad (3.5)$$

С учетом условий (3.4) потребуем выполнения условий

$$g_1(0) = 0, \quad g_1(-\pi/2) = 1 \quad (3.6)$$

Исследование показывает, что краевая задача (3.5), (3.6) имеет единственное решение; монотонно убывающая функция  $g_1(\beta)$  может быть получена численным интегрированием уравнения (3.5) при учете того, что для концов интервала  $[-\pi/2, 0]$  справедливы разложения

$$g_1(\beta) = a(\beta^2 + \frac{1}{135} \beta^6 + \frac{10}{1701} \beta^8 - \frac{1}{18225} \beta^{10} + \dots), \quad a = 0,31247 \quad (3.7)$$

$$g_1\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = 1 - pt^{2/3} + \frac{1}{6} p^2 t^{4/3} - \left(\frac{1}{72} p + \frac{1}{648} p^4\right) t^{8/3} + \left(\frac{41}{1080} p^2 - \frac{2}{1215} p^5\right) t^{10/3} + \dots,$$

$$p = 1,14967$$

Функцию  $\psi_2$  в разложении (3.3) будем искать в виде  $\psi_2 = \kappa^{2/3} g_2(\beta)$ . При этом, согласно соотношениям (2.1), (3.2),

$$L(\psi_1 + \psi_2) = L_2 + \Delta L_2, \quad P(\psi_1 + \psi_2) = P_2 + \Delta P_2$$

$$S(\psi_1 + \psi_2) = S_2 + \Delta S_2, \quad R(\psi_1 + \psi_2) = R_2 + \Delta R_2$$

$$L_2 = u_2 \zeta^2 \psi_{100} + 2\zeta \psi_{1\tau\tau} + 2\psi_{1\tau} + u_1 \zeta \psi_{200} + \psi_{2\tau\tau} =$$

$$= \kappa^{-2/3} \left\{ (\cos \beta)^{1/3} \left[ (2\delta \sin \beta \cos^2 \beta - \frac{9}{2} \sin \beta + 9 \sin^3 \beta) g_1' - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (\delta \cos^3 \beta + \frac{9}{2} \sin^2 \beta \cos \beta) g_1'' \right] + \frac{9}{4} (\cos \beta)^{2/3} \left( \frac{2}{3} g_2 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta g_2' + g_2'' \right) \right\}, \quad \Delta L_2 = O(1)$$

$$P_2 = \theta^2 [2\zeta \psi_{1\tau}^2 + u_2 \zeta^2 \psi_{10}^2 + 2(\psi_{1\tau} \psi_{2\tau} + u_1 \zeta \psi_{10} \psi_{20})] =$$

$$= \mu^{-2} \kappa^{4/3} \left[ \frac{9}{2} (\cos \beta)^{2/3} \sin^2 \beta g_1' g_2' - (\cos \beta)^{4/3} (\delta \sin^2 \beta \cos^2 + \frac{9}{2} \sin^4 \beta) \right]$$

$$\Delta P_2 = O(\kappa^2)$$

$$S_2 = 2\psi_2 + \theta \psi_{20} = \kappa^{2/3} \left[ \left(2 + \frac{2}{3} \sin^2 \beta\right) g_2 + \sin \beta \cos \beta g_2' \right], \quad \Delta S_2 = O(\kappa^{4/3})$$

$$P_{20} = \mu^{-1} \kappa^{1/3} [ -(\cos \beta)^{10/3} (2\delta \sin \beta - 4\delta \sin^3 \beta + 18 \sin^3 \beta) g_1'^2 -$$

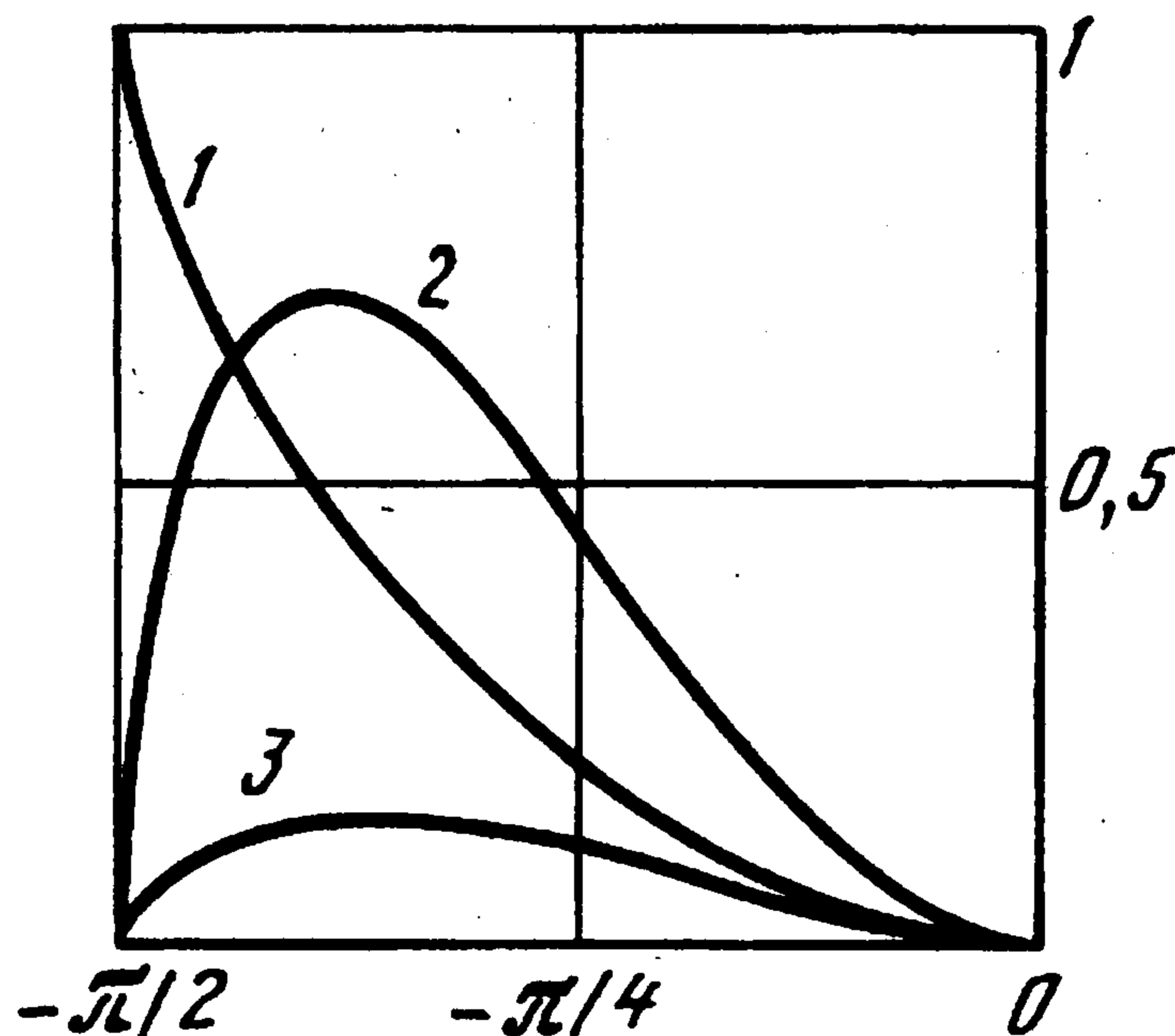
$$-(\cos \beta)^{7/3} (2\delta \sin^2 \beta \cos^2 \beta + 9 \sin^4 \beta) g_1' g_1'' +$$

$$+(\cos \beta)^{2/3} (9 \sin \beta - 6 \sin^3 \beta) g_1' g_2' + \frac{9}{2} (\cos \beta)^{5/3} \sin^2 \beta (g_1'' g_2' + g_1' g_2'') ]$$

$$S_{20} = \mu \kappa^{-1/3} \left[ \left( \frac{8}{3} \sin \beta - \frac{8}{9} \sin^3 \beta \right) g_2 + \left( 3 \cos \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta \cos \beta \right) g_2' + \sin \beta \cos^2 \beta g_2'' \right]$$

$$R_2 = \theta(2S_1 S_2 L_1 + S_1^2 L_2) - P_{10} S_2 - P_{20} S_1 + S_{10} P_2 + S_{20} P_1 = O(\kappa^{1/3}), \quad \Delta R_2 = O(\kappa)$$

$$\delta = -\mu^2 u_2 = -\frac{9}{4} \frac{u_2}{|u_1|}$$



Фиг. 2

Приравняв нулю  $R_2$  главный член в разложении  $R(\psi_1 + \psi_2)$  по степеням  $\kappa$ , получим уравнение для  $g_2(\beta)$ :

$$Eg_2'' + Fg_2' + Gg_2 = H_1 + \delta H_2$$

$$E = g_1^2$$

$$F = -\frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta g_1^2 - (2 - \frac{2}{3} \sin^2 \beta) g_1 g_1' + \sin \beta \cos \beta \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \beta \right) g_1'^2$$

$$G = \frac{2}{3} g_1^2 - \frac{8 \sin^3 \beta}{9 \cos \beta} g_1 g_1' - \cos^2 \beta \left( 1 - \frac{1}{6} \sin^2 \beta \right) g_1'^2 + \left( 2 + \frac{2}{3} \sin^2 \beta \right) g_1 g_1''$$

$$H_1 = -(\cos \beta)^{-1/3} [\sin \beta (2 - 4 \cos^2 \beta) g_1^2 g_1' + 2 \sin^2 \beta \cos \beta (g_1 g_1'^2 - g_1^2 g_1'')]$$

$$H_2 = -(\cos \beta)^{-1/3} \left[ \frac{8}{9} \sin \beta \cos^2 \beta g_1^2 g_1' + \frac{4}{9} \cos^3 \beta (g_1 g_1'^2 - g_1^2 g_1'') - \frac{1}{9} \sin \beta \cos^4 \beta g_1'^3 \right]$$

Представим  $g_2(\beta)$  в виде  $g_2(\beta) = \varphi_1(\beta) + \delta \varphi_2(\beta)$ , подчинив функции  $\varphi_k$  условиям

$$E\varphi_k'' + F\varphi_k' + G\varphi_k = H_k, \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(-\pi/2) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.8)$$

Анализ показывает, что краевые задачи (3.8) однозначно разрешимы, функции  $\varphi_1(\beta)$ ,  $\varphi_2(\beta)$  неотрицательны и могут быть найдены численным интегрированием уравнений (3.8) при учете того, что для концов интервала  $[-\pi/2, 0]$  справедливы разложения

$$\varphi_1(\beta) = a \left( 3\beta^3 - \beta^4 + \frac{1}{45} \beta^6 + \dots \right)$$

$$\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = 3t^{2/3} - 3pt^{4/3} + \frac{1}{2} p^2 t^2 + \dots \quad (3.9)$$

$$\varphi_2(\beta) = a \left( \frac{8}{9} \beta^2 - \frac{16}{27} \beta^4 + \frac{208}{1215} \beta^6 + \dots \right)$$

$$\varphi_2\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{4}{9} t^{2/3} - \frac{8}{27} pt^{4/3} + \frac{2}{81} p^2 t^2 + \dots$$

Зависимости  $g_1(\beta)$ ,  $\varphi_1(\beta)$ ,  $\varphi_2(\beta)$  показаны на фиг. 2 кривыми 1–3 соответственно. Можно убедиться, что для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , найденных при  $M_c = 1$ ,  $Q(\psi_1) = O(\kappa^{-2/3})$ ,  $Q(\psi_1 + \psi_2) = O(1)$ . Очевидно, функции  $\psi_1 = g_1(\beta)$  и  $\psi_2 = \kappa^{2/3}(\varphi_1(\beta) + \delta\varphi_2(\beta))$  служат начальными членами разложения искомой функции  $\psi$  по малому параметру  $\kappa$ .

4. Анализ функции  $\psi$  при  $M_c = 1$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ,  $-\pi/2$ . Согласно соотношениям (3.7), (3.9) имеем

$$g_1(\beta) + \kappa^{2/3}(\varphi_1(\beta) + \delta\varphi_2(\beta)) = \begin{cases} O(\beta^2) & \text{при } \beta \rightarrow 0 \\ 1 + O(t^{2/3}) & \text{при } \beta = -\pi/2 + t, t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Покажем, что при  $M_c = 1$  аналогичные соотношения справедливы и для искомой функции тока  $\psi = \psi(\kappa, \beta)$ .

Согласно первому из условий (1.3)  $\psi(\kappa, 0) = 0$ . При  $\beta \rightarrow 0$  представим  $\psi(\kappa, \beta)$  в виде

$$\psi(\kappa, \beta) = N(\kappa)b_1(\beta) + O(b_2(\beta)) \quad (4.2)$$

полагая, что  $b_1(\beta)$  имеет порядок  $\beta^\epsilon$  или  $\beta^n$ , или  $\beta^{n \pm \epsilon}$ , а  $b_2(\beta)$  – порядок  $\beta^m$  или  $\beta^{m \pm \epsilon}$ , где  $m$  и  $n$  – положительные постоянные,  $m > n$ ,  $\epsilon$  – как угодно малая положительная величина (согласно (4.1),  $n \leq 2$ ). Можно убедиться, что  $\beta b_1' / b_1 = O(\beta^\epsilon)$  при  $b_1 = O(\beta^\epsilon)$ , в остальных случаях  $\beta b_1' / b_1 = O(1)$ , причем всегда  $\beta b_1'' / b_1' = O(1)$ .

Будем пользоваться обозначением  $O(\delta_1(\beta), \delta_2(\beta))$ , имея при этом в виду  $O(\delta_0(\beta))$ , где  $\delta_0(\beta)$  – та из функций  $\delta_1(\beta)$ ,  $\delta_2(\beta)$ , которая медленнее стремится к нулю при  $\beta \rightarrow 0$ . С помощью соотношений (3.2) из (4.2) получим

$$\psi_\tau = O(b_1), \quad \psi_{\tau\tau} = O(b_1)$$

$$\psi_\theta = \mu N \kappa^{-1} b_1' + O(\beta b_1, b_2'), \quad \psi_{\theta\theta} = \mu^2 N \kappa^{-2} b_1'' + O(b_1, b_2'')$$

$$L = \mu^2 (1 - M^2) N \kappa^{-2} b_1'' + O(b_1, b_2'')$$

$$P = (1 - M^2) N^2 \beta^2 b_1'^2 + O(\beta^2 b_1^2, \beta^2 b_1' b_2')$$

$$S = N(2b_1 + \beta b_1') + O(\beta^2 b_1, b_2)$$

$$P_\theta = 2\mu(1 - M^2) N^2 \kappa^{-1} (\beta b_1'^2 + \beta^2 b_1' b_1'') + O(\beta b_1^2, \beta b_1' b_2')$$

$$S_\theta = \mu N \kappa^{-1} (3b_1' + \beta b_1'') + O(\beta b_1, b_2')$$

$$R = R_1 + \Delta R_1$$

$$R_1 = \mu(1 - M^2) N^3 \kappa^{-1} (4\beta b_1^2 b_1'' - 4\beta b_1 b_1'^2 + \beta^2 b_1'^3), \quad \Delta R_1 = O(\beta b_1^3, b_1^2 b_2')$$

Величина  $\Delta R_1$  при  $\beta \rightarrow 0$  имеет более высокий порядок малости, чем каждое из слагаемых, входящих в  $R_1$ . Поэтому из равенства  $R(\psi(\kappa, \beta)) = 0$  следует  $R_1 = 0$ . Общее решение дифференциального уравнения для  $b_1$ , получаемого приравнованием нулю  $R_1$ ,

имеет вид  $b_1 = c_1(\beta + \sqrt{\beta^2 + c_2^2})^2$ , где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные. С учетом условия  $b_1(0) = 0$  отсюда следует, что  $b_1 = O(\beta^2)$ .

При  $\beta = -\pi/2 + t$ ,  $t \rightarrow 0$  представим  $\psi(\kappa, \beta)$  в виде

$$\psi(\kappa, \beta) = 1 + K(\kappa)\delta_1(t) + O(\delta_2(t)) \quad (\delta_2(t)/\delta_1(t) \rightarrow 0) \quad (4.3)$$

Согласно соотношениям (4.3), (3.2)

$$\psi_\tau = -\frac{3}{2} K(\kappa) \kappa^{-2/3} t^{1/3} \delta_1' + O(t^{4/3} \delta_1, t^{1/3} \delta_2') \quad (4.4)$$

В соответствии с выражениями (1.4), (4.4)

$$\frac{1}{2} r^2 \Big|_{BC} = 1 + \int_0^\theta \psi_\tau \Big|_{BC} \sin \theta d\theta$$

$$\psi_\tau \Big|_{BC} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{3}{2} K(|\mu\theta|) |\mu\theta|^{-2/3} t^{1/3} \delta'_1 + O(t^{4/3} \delta_1, t^{1/3} \delta'_2) \right\}$$

Если решение задачи существует, то  $r|_{BC}$  – конечная функция  $\theta$ , не равная тождественно единице при  $\theta_0 \neq 0$ . Это возможно только при  $\delta_1 = O(t^{2/3})$ .

**5. Анализ формы струи при  $M_c = 1$ .** Используя соотношения (1.2) и установленные свойства решения задачи, покажем, что при  $M_c = 1$  скорость в струе выравнивается на конечном расстоянии от кромки сопла и что поверхность, на которой происходит выравнивание, является плоскостью, перпендикулярной оси  $x$ . Оценивая какую-либо функцию  $\Omega(\kappa, \beta)$ , будем пользоваться обозначением  $\Omega = O(\kappa^k, \beta^m, t^n)$ , понимая под этим, что

$$\Omega = \begin{cases} O(\kappa^k) & \text{при } \kappa \rightarrow 0, \beta \in [-\pi/2, 0] \\ O(\beta^m) & \text{при } \beta \rightarrow 0, \kappa \leq \kappa_m = (1 + \mu^2 \theta_0^2)^{1/2} \\ O(t^n) & \text{при } \beta = -\pi/2 + t, t \rightarrow 0, \kappa \leq \kappa_m \end{cases}$$

Выше было установлено, что при  $M_c = 1$

$$\psi = \psi(\kappa, \beta) = \psi_1 + A, \quad \psi_1 = g_1(\beta), \quad A = O(\kappa^{2/3}, \beta^2, t^{2/3}) \quad (5.1)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_\tau = \psi_{1\tau} + B, \quad \psi_{1\tau} = \frac{3}{2} \kappa^{-2/3} \sin \beta (\cos \beta)^{1/3} g'_1, \quad B = O(\kappa^0, \beta^2, t^0)$$

$$\psi_\theta = \psi_{1\theta} + O(\kappa^{-1/3}, \beta, t^{2/3}), \quad \psi_{1\theta} = \mu \kappa^{-1} \cos \beta g'_1$$

$$(1 - M^2) \psi_\theta^2 = \frac{9}{4} \kappa^{-4/3} (\cos \beta)^{8/3} g_1'^2 + O(\kappa^{-2/3}, \beta^2, t^2) \quad (5.2)$$

$$\tau^2 \psi_\tau^2 = \frac{9}{4} \kappa^{-4/3} \sin^2 \beta (\cos \beta)^{2/3} g_1'^2 + O(\kappa^{-2/3}, \beta^4, t^0)$$

$$P \operatorname{ctg} \theta = \frac{9}{4} \mu^{-1} \kappa^{-1/3} \sin \beta (\cos \beta)^{2/3} g_1'^2 + O(\kappa^{1/3}, \beta^3, t^0)$$

В интегралах типа (1.4)

$$\zeta = \text{const}, \quad d\theta = \mu^{-1} |\zeta|^{3/2} d\beta / \cos^2 \beta$$

Поэтому

$$\int_0^\theta \psi_{1\tau} \theta d\theta = \frac{3}{2} \mu^{-2} \kappa^{4/3} (\cos \beta)^{4/3} \int_0^\beta g_1' \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} d\beta = O(\kappa^{4/3}, \beta^4, t^0)$$

$$\int_0^\theta \psi_1 \theta d\theta = \mu^{-2} \kappa^2 \cos^2 \beta \int_0^\beta g_1 \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} d\beta = O(\kappa^2, \beta^4, t^0) \quad (5.3)$$

Пусть  $|A|, |B| \leq B_0$  при  $\kappa \leq \kappa_m, -\pi/2 \leq \beta \leq 0$ . Тогда

$$\left| \int_0^\theta \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \sin \theta d\theta \right| \leq \frac{1}{2} B_0 \mu^{-2} \kappa^2 \sin^2 \beta \quad (5.4)$$

С учетом соотношений (5.1)–(5.4) из (1.4) получим

$$Y = g_1 + O(\kappa^{2/3}, \beta^2, t^0)$$

$$S = C_0 + C_1, \quad C_0 = 2g_1 + \sin \beta \cos \beta g_1', \quad C_1 = O(\kappa^{2/3}, \beta^2, t^0) \quad (5.5)$$

На интервале  $[-\pi/2, 0)$   $C_0 > 0$ , при  $\beta \rightarrow 0$  имеем  $C_0 = O(\beta^2)$ . Поэтому  $|C_1/C_0| < \infty$ , и можно записать

$$S = C_0(1 + O(\kappa^{2/3}, \beta^0, t^0)) \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.2) и (5.6) следует

$$\frac{P}{S} \operatorname{ctg} \theta = \frac{9}{4} \mu^{-1} \kappa^{-1/3} G_{12} g_1'^2 + O(\kappa^{1/3}, \beta, t^0), \quad G_{mn} = \frac{\sin^m \beta (\cos \beta)^{n/3}}{2g_1 + \sin \beta \cos \beta g_1'}$$

Оценив аналогичным образом другие слагаемые в правых частях выражений (1.2), будем иметь

$$x_\tau = \frac{1}{r} \left\{ \frac{9}{4} \mu^{-1} \kappa^{-1/3} [G_{12} g_1'^2 - (\cos \beta)^{5/3} g_1'] + O(\kappa^{1/3}, \beta, t^0) \right\} \quad (5.7)$$

$$x_\theta = \frac{1}{r} \left\{ \frac{3}{2} \kappa^{-2/3} \sin \beta (\cos \beta)^{1/3} g_1' + O(\kappa^0, \beta^2, t^0) \right\}$$

С учетом соотношений (3.2) и равенств

$$x_\beta = x_\tau \zeta_\beta + x_\theta \theta_\beta, \quad x_\kappa = x_\tau \zeta_\kappa + x_\theta \theta_\kappa$$

из (5.7) найдем

$$x_\beta = \frac{1}{r} \left\{ \frac{3}{2} \mu^{-1} \kappa^{1/3} G_{21} g_1'^2 + O(\kappa, \beta^2, t^{-1/3}) \right\}$$

$$x_\kappa = \frac{1}{r} \left\{ 3 \mu^{-1} \kappa^{-2/3} G_{01} g_1 g_1' + O(\kappa^0, \beta, t^0) \right\} \quad (5.8)$$

В соответствии с (5.5)  $r^2 = 2g_1 + O(\kappa^{2/3}, \beta^2, t^0)$ . Поскольку  $g_1 > 0$  при  $\beta \in [-\pi/2, 0)$  и  $g_1 = O(\beta^2)$  при  $\beta \rightarrow 0$ , то

$$r^{-1} = (2g_1)^{-1/2} (1 + O(\kappa^{2/3}, \beta^0, t^0)) \quad (5.9)$$

Согласно соотношениям (5.7)–(5.9)

$$x_\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \kappa^{-2/3} \sin \beta (\cos \beta)^{1/3} g_1' g_1^{-1/2} + O(\kappa^0, \beta, t^0)$$

$$x_\kappa = \frac{3\sqrt{2}}{2} \mu^{-1} \kappa^{-2/3} G_{01} g_1' g_1^{1/2} + O(\kappa^0, \beta^0, t^0) \quad (5.10)$$

$$x_\beta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \mu^{-1} \kappa^{1/3} G_{21} g_1'^2 g_1^{-1/2} + O(\kappa, \beta, t^{-1/3})$$

Так как  $\kappa = -\mu\theta$  при  $\beta = -\pi/2$ , то при учете (3.7) из первых двух равенств (5.10) одновременно получаем

$$x_\theta|_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mu^{-2/3} p |\theta|^{-2/3} + D, \quad |D| < \infty \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что при  $M_c = 1$  проекция дуги свободной поверхности  $bc$  на ось  $x$  – величина конечная ( $c$  – точка сопряжения криволинейного участка дуги свободной поверхности с прямолинейным).

Рассмотрим выражение

$$J = J_1 + J_2 + J_3; \quad J_1 = \int_{-\theta_0}^{-\theta_1} x_\theta d\theta, \quad J_2 = \int_{-\pi/2}^{\beta_1} x_\beta d\beta, \quad J_3 = \int_{x_1}^0 x_x dx$$

$$\theta_1 \in (0, \theta_0), \quad x_1 = \mu |\theta_1|, \quad \beta_1 \in [-\pi/2, 0]$$

Интеграл  $J_1$  вычисляется при  $\beta = -\pi/2$  (вдоль  $BC$ ),  $J_2$  – при  $x = x_1$ ,  $J_3$  – при  $\beta = \beta_1$ . Очевидно,  $J$  – проекция на ось  $x$  дуги, соединяющей кромку сопла  $b$  с точкой на линии тока  $\psi = g_1(\beta_1)$ , в которой происходит выравнивание скорости ( $M$  обращается в единицу,  $\theta$  – в нуль). Из соотношений (5.10) следует, что  $J_2, J_3 = O(x_1^{1/3})$  при  $x_1 \rightarrow 0$ . Устремив  $x_1$  к нулю, убедимся, что  $J$  не зависит от  $\beta_1$ , и следовательно, на всех линиях тока в струе значения  $M = 1$ ,  $\theta = 0$  достигаются при одном и том же значении  $x$ . За плоскостью выравнивания скорость газа равна звуковой, а струя имеет форму цилиндра.

Таким образом, утверждение, сформулированное в начале раздела, доказано. Заметим, что при построении функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  использовались только условия на свободной поверхности ( $\beta = -\pi/2$ ) и на оси  $x$  ( $\beta = 0$ ). Поэтому полученный результат справедлив в предположении о существовании решения задачи для осесимметричного сопла произвольной формы и при произвольной аналитической зависимости числа Маха от приведенной скорости.

Впервые аналогичный результат для плоской симметричной струи совершенного газа, истекающей из сосуда с прямолинейными стенками, был получен в [5]. Обобщение на случай плоской струи газа, истекающей из сосуда произвольной формы, при произвольной связи между плотностью и давлением, содержится в [6].

Используя найденное выше выражение  $\psi_1 = f_1(\omega)$ , можно показать, что при  $M_c < 1$  выравнивание скорости в струе происходит на бесконечном удалении от кромки сопла.

Задача об осесимметричном истечении струи газа из сопла с криволинейной стенкой исследовалась [7–10] методами функционального анализа. Форма сопла задавалась уравнением  $r = f(x)$  ( $-\infty < x \leq 0$ ). При некоторых ограничениях на газодинамические функции и при условиях

$$f(x) \in C^4, f''(x) \leq 0, \quad |\arctg f'(x)| < \pi/2$$

$$f(x) \equiv \text{const при } |x| > X \quad (X = \text{const} > 0)$$

доказана разрешимость задачи и установлено, что выравнивание скорости в струе с критическим давлением на свободной границе происходит на конечном расстоянии от кромки сопла (вопрос о форме поверхности, на которой происходит выравнивание, не исследовался).

## 6. Схема расчета. Положим

$$\psi^0 = \left[ (\varphi - 1) \cos \frac{\pi\theta}{2\theta_0} + 1 \right] \sin^2 \frac{\pi\tau}{2} + \frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta_0} \cos^2 \frac{\pi\tau}{2}$$

$$\varphi = f_1(\omega) \text{ при } M_c < 1 \tag{6.1}$$

$$\varphi = g_1(\beta) + x^{2/3} (\varphi_1(\beta) + \delta\varphi_2(\beta)) \exp(-\alpha_1\theta^2), \quad \alpha_1 \approx 10 \text{ при } M_c = 1$$

Построенная таким способом функция  $\psi^0$  удовлетворяет граничным условиям (1.3) и сохраняет неизменными найденные главные части асимптотических разложений функции  $\psi$  при  $M_c < 1$  и  $M_c = 1$ .

Таблица 1

$\theta_0$	$M_c^2 = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
7,5	0,93804	0,94379	0,95063	0,95857	0,96761	0,97753
15	0,88305	0,89375	0,90541	0,91823	0,93250	0,94862
30	0,79323	0,81007	0,82809	0,84741	0,86819	0,89067
45	0,72339	0,74385	0,76551	0,78846	0,81276	0,83863
60	0,66864	0,69124	0,71503	0,74004	0,76632	0,79409
90	0,59146	0,61608	0,64181	0,66868	0,69667	0,72608
120	0,54375	0,56903	0,59537	0,62278	0,65123	0,68104
150	0,51539	0,54084	0,56732	0,59482	0,62333	0,65315
180	0,50015	0,52563	0,55211	0,57959	0,60806	0,63780
180	0,5	0,52550	0,55202	0,57957	0,60816	0,63781

Функция  $\chi = \psi - \psi^0$  должна служить решением краевой задачи

$$L(\chi) = N(\psi^0 + \chi) - L(\psi^0), \quad \chi = 0 \text{ на } AA_1BC$$

(см. (2.5)). Определение функции  $\chi$  сводится к решению итерационной последовательности линейных разностных краевых задач;  $(n+1)$ -е приближение искомой функции  $\chi^{(n+1)}$  находится по схеме

$$\chi^{(n+1)} = (1-w)\chi^{(n)} + w\chi^{(n+1/2)}, \quad 0 < w \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

причем за  $\chi^{(n+1/2)}$  принимается решение разностей задачи для уравнения

$$L(\chi) = N(\psi^0 + \chi^{(n)}) - L(\psi^0).$$

В области  $\Sigma$  применяется конечно – разностная схема с пятиточечной аппроксимацией на равномерной прямоугольной сетке. Для ее реализации используется метод последовательной верхней релаксации. Переход в физическую плоскость производится по формулам (1.2) с применением сплайн – аппроксимации сеточных значений  $\psi$ .

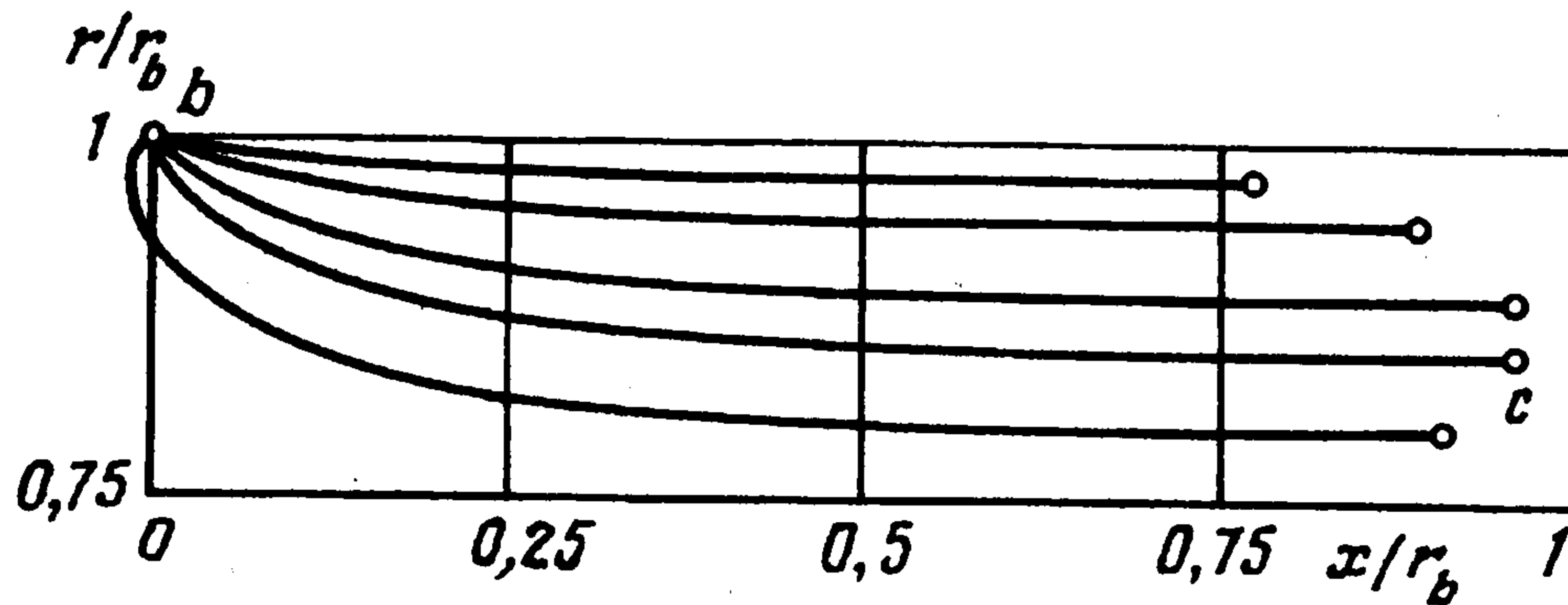
В процессе итераций в окрестности отрезка  $AA_1$  обычно возникают области отрицательных значений величин  $\psi^{(n)} = \psi^0 + \chi^{(n)}$ ,  $Y^{(n)} = Y(\psi^{(n)})$ ,  $S^{(n)} = 2Y^{(n)} + \psi_\theta^{(n)} \sin \theta$ , которые затем уменьшаются в размерах и исчезают. Чтобы выражение  $N(\psi^{(n)})$  не обратилось в бесконечность и итерационный процесс не разошелся, используется следующий прием. При  $\min S^{(n)} = -m^{(n)} < 0$   $S^{(n)}$  заменяется на  $S^{(n)} + 4m^{(n)}f(\tau, \theta)$ , где  $f(\tau, \theta)$  – гладкая положительная функция, исчезающая при  $(\tau, \theta) \rightarrow (1, 0)$  и быстро стремящаяся к 1 при удалении от точки  $C$ . Аналогичным целям служит введение множителя  $\exp(-\alpha_1 \theta^2)$  в выражение (6.1).

**7. Результаты расчетов.** Выполнены расчеты истечения струи совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$  для ряда значений  $\theta_0 \in [7,5^\circ; 180^\circ]$  и  $M_c \in [0; 1]$ . При  $M_c < 1$  использовалась сетка  $I \times J = 200 \times 100$ , при  $M_c = 1$  – сетка  $I \times J = 100 \times 200$  ( $I, J$  – количество шагов вдоль осей  $\tau$  и  $\theta$ ). Заметим, что для совершенного газа  $u_1 = -(1 + \gamma)$ ,  $\delta = -u_2 \mu^2 = 9(2\gamma - 1)/8$ .

Пусть  $r_b, r_c$  – значения  $r$  в точках  $b$  и  $c$ ,  $k_a = r_c^2 / r_b^2$  – коэффициент сжатия струи. Найденные значения  $k_c$  приведены в табл. 1. Ее последняя строка содержит точные значения  $k_a$ , определяемые для  $\theta_0 = 180^\circ$  с помощью теоремы об изменении количества движения [3]

$$k_a = (\gamma M_c^2)^{-1} \{ [1 + (\gamma - 1)M_c^2 / 2]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \} \quad (7.1)$$

Для всех вариантов расчета на  $a_1b$  с достаточно высокой точностью выполняется



Фиг. 3

условие  $(r - r_b) \cos \theta_0 = -x \sin \theta_0$ . Следует ожидать, что с уменьшением  $\theta_0$  погрешность в определении  $k_a$  убывает.

Пусть  $k_p$  – коэффициент сжатия струи в плоском течении, аналогичном рассмотренному выше. Таблица значений  $k_p$ , вычисленных с высокой точностью, приведена в [11]. Сравнение показывает, что  $k_p / k_a > 1$  для всех  $\theta_0 \neq 0, 180^\circ$  (при  $\theta_0 = 180^\circ$   $k_p$ , как и  $k_a$ , определяется по формуле (7.1)). Максимальных значений отношение  $k_p / k_a$  достигает в окрестности  $\theta_0 = 60^\circ$ , при  $\theta_0 = 60^\circ$   $k_p / k_a = 1,0351$  для  $M_c = 0$  и  $k_p / k_a = 1,0257$  для  $M_c = 1$ .

Ниже приводятся значения  $x_c / r_b$  при  $M_c = 1$  для ряда значений  $\theta_0$  ( $x_c$  – абсцисса точки  $c$ )

$\theta_0$	7,5	15	22,5	30	45	60	75
$x_c / r_b$	0,6235	0,7447	0,8124	0,8547	0,9004	0,9188	0,9233
$\theta_0$	90	105	120	135	150	165	180
$x_c / r_b$	0,9204	0,9136	0,9050	0,8959	0,8870	0,8790	0,8720

Максимум  $x_c / r_b$  имеет место в окрестности  $\theta_0 = 75^\circ$ . На фиг. 3 показана форма дуги  $bc$  при  $M_c = 1$  для  $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  ( $r_c$  убывает с увеличением  $\theta_0$ ).

Пусть  $s$  – дуговая абсцисса кривой  $bc$ . Из (1.2), (1.4) следует, что на  $bc$

$$\frac{r}{r_c} = \left( 1 + \int_0^\theta \psi_{\tau|BC} \sin \theta d\theta \right)^{1/2}, \quad r_c^2 = 2$$

$$\frac{1}{r_b} \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{k_a} U, \quad U = \frac{1}{2} \psi_{\tau|BC} \left( 1 + \int_0^\theta \psi_{\tau|BC} \sin \theta d\theta \right)^{-1/2} \quad (7.2)$$

$$\frac{x}{r_b} = \sqrt{k_a} \int_{-\theta_0}^\theta U \cos \theta d\theta, \quad \frac{r}{r_b} = 1 + \sqrt{k_a} \int_{-\theta_0}^\theta U \sin \theta d\theta$$

Значения  $U$ , получаемые в результате решения задачи в узлах сетки на отрезке  $BC$ , при  $M_c = 1$  можно аппроксимировать следующим образом:

$$U = U_0 \left( \sum_{k=1}^6 a_k \sin k\pi t + 1 + \theta / \theta_0 \right), \quad \theta \in [-\theta_0, 0]$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \psi_{1\tau|BC} = \frac{1}{2} p\mu^{-2/3} |\theta|^{-2/3}, \quad t = |\theta / \theta_0|^{0,54} \quad (7.3)$$

Таблица 2

$\theta_0^0$	$a_1 \times 10^5$	$a_2 \times 10^5$	$a_3 \times 10^5$	$a_4 \times 10^5$	$a_5 \times 10^5$	$a_6 \times 10^5$
7,5	-7862	-1877	309	-307	121	-116
15	-12429	-2049	158	-304	102	-98
30	-19049	-2404	-88	-311	72	-77
45	-24039	-2767	-303	-332	42	-68
60	-28099	-3133	-502	-358	14	-61
90	-34509	-3861	-876	-422	-41	-56
120	-39475	-4568	-1234	-496	-99	-59
150	-43513	-5239	-1583	-577	-160	-67
180	-46919	-5861	-1927	-662	-225	-77

С помощью формул (7.2), (7.3) и табл. 2, содержащей коэффициенты  $a_k$  для ряда значений  $\theta_0$ , можно восстановить форму дуги  $bc$  при  $M_c = 1$ . При этом максимальная погрешность в определении  $x_c / r_b$  и  $r_c / r_b$  для табличных значений  $\theta_0$  не превосходит 0,04% и 0,003% соответственно. Использование коэффициентов  $a_k$ , полученных для промежуточных значений  $\theta_0$  с помощью сплайн-аппроксимации табл. 2, почти не увеличивает указанную погрешность. Найденная описанным способом дуга  $a_1bc$  может служить в качестве образующей дозвуковой части осесимметричного сопла Лаваля с плоской поверхностью перехода.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00169).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D. Jets and Cavities // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1960. V. 9. P. 311–445.
2. Birkhoff G., Zarantonello E.H. Jets, wakes and cavities. N.Y.: Acad. Press, 1957. = Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. Fenain M., Dutouquet L., Solignac J.-L. Calcul des performance d'une tuyere propulsive convergente. Comparaison avec l'experience // Rech. Aerospat: 1974. № 5. P. 261–276.
5. Овсянников Л.В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 537–542.
6. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
7. Антонцев С.Н. Осесимметрические задачи газовой динамики со свободными границами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 3. С. 473–476.
8. Антонцев С.Н. Краевые задачи для некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Ч. 1. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1976. 87 с.
9. Антонцев С.Н. Асимптотика осесимметрических газовых струй // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 40. С. 3–13.
10. Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 108 с.
11. Сунгурцев Ю.В. Плоские струйные течения газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 256 с.