

УДК 539.3

© 1999 г. А.М. Линьков

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О СВЯЗАННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

Предлагается общий метод сведения задач о трещинах, вырезах, включениях и взаимодействующих блоках в связанных полуплоскостях к комплексным интегральным уравнениям, сингулярным и гиперсингулярным. Метод базируется на том факте, что если известны функции Колосова – Мусхелишвили для целой плоскости, то соответствующие функции для связанных полуплоскостей получаются из них с помощью простых преобразований. Приводятся граничные интегральные уравнения (ГИУ), а также фундаментальные решения для изолированных сил и периодических систем сил, которые могут использоваться для построения новых комплексных ГИУ.

Задачи о трещинах, вырезах и (или) включениях вблизи поверхности раздела сред с разными свойствами, в частности вблизи свободной или закрепленной границы тела, представляют существенный интерес для материаловедения, механики разрушения и горной геомеханики. Многочисленные ссылки на работы, касающиеся частных задач такого рода, преимущественно о трещинах, содержатся, например, в [1–4]. С другой стороны, общие уравнения, пригодные в случае произвольных контуров трещин, вырезов и включений, пока что построены только для случая полуплоскости со свободной границей [5] (см. также [6]). Ниже в разд. 2 такие ГИУ выводятся для *произвольных* связанных полуплоскостей. Это достигается прямым приложением приема, представленного в разд. 1, к уравнениям для целой плоскости, полученным ранее [7–10].

Альтернативный подход к построению ГИУ состоит в использовании фундаментальных решений. Для того чтобы применить его для связанных полуплоскостей, необходимо иметь соответствующие решения. Опять-таки, к настоящему времени такие решения построены лишь для случая полуплоскости [10–12]. Ниже в разд. 3, вновь с помощью приема, описанного в разд. 1, фундаментальные решения впервые строятся для *произвольных* связанных полуплоскостей.

1. Общие формулы для связанных полуплоскостей. Рассмотрим две упругие полуплоскости S_1 и S_2 , связанные вдоль прямолинейной границы. В общем случае модули сдвига и коэффициенты Пуассона разные: μ_1, ν_1 в нижней полуплоскости и μ_2, ν_2 в верхней полуплоскости. Расположение и конфигурация трещин, вырезов и/или включений в полуплоскостях также могут быть разными. В случае включений каждой из них может иметь свои упругие характеристики. Обозначим L_1 суммарный контур системы трещин, вырезов и (или) включений в нижней полуплоскости; L_2 – суммарный контур в верхней полуплоскости; $L = L_1 + L_2$ – общий контур. В частном случае $\mu_2 = 0$ имеем только нижнюю полуплоскость со свободной от усилий границей. При $\mu_2 = \infty$ задача отвечает случаю, когда граница нижней полуплоскости жестко закреплена. Аналогично интерпретируются случаи $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 = \infty$. Для того чтобы упростить изложение, будем считать, что индивидуальные контуры, входящие в L_1 и L_2 нагружены так, что действующий на каждый из них суммарный главный вектор равен нулю. Более общий случай охватывается включением специальных

членов, учитывающих многозначность функций (см. [1] для замкнутых контуров, [13] для разрезов). Кроме того, также для простоты и без заметной потери общности, примем для неперiodических задач, что напряжения на бесконечности равны нулю.

Введем глобальную систему координат xOy , направив ось x вдоль общей границы полуплоскости вправо, ось y направим вверх. Решение будем искать в комплексной форме [1].

Допустим, что имеются выражения для функций Колосова – Мусхелишвили (функций КМ) в случае, когда контур L_1 (или L_2) находится в целой полуплоскости. Обозначим $\phi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $\phi'_1(z) = \Phi_1(z)$, $\psi'_1(z) = \Psi_1(z)$ функции КМ, отвечающие контуру L_1 в целой плоскости со свойствами нижней полуплоскости и при граничных условиях на L_1 типа тех, которые заданы на L_1 в исходной задаче; $\phi_2(z)$, $\psi_2(z)$, $\phi'_2(z) = \Phi_2(z)$, $\psi'_2(z) = \Psi_2(z)$ – функции КМ, отвечающие задаче для контура L_2 в целой плоскости со свойствами верхней полуплоскости. При условиях, наложенных выше на главные векторы сил на каждом из контуров и на бесконечности, функции с индексом единица голоморфны всюду вне L_1 , в частности, во всей верхней полуплоскости. Функции с индексом двойка голоморфны вне L_2 и, в частности, во всей нижней полуплоскости. Все эти функции равны нулю на бесконечности. Соответствующие этим функциям граничные значения напряжений $\sigma_{f1}(t)$ и смещений $u_{f1}(t)$ на L_1 и напряжений $\sigma_{f2}(t)$ и смещений $u_{f2}(t)$ на L_2 пока считаются произвольными; будем называть их *фиктивными* напряжениями и смещениями и отмечать индексом f . Конечно, эти величины в частных случаях могут быть заданы интегральными представлениями потенциалов КМ с неизвестной плотностью.

Обозначим символом σ комплексный вектор усилий, возникающих на единичной площадке с нормалью n , направленной вправо от направления t прохода по площадке: $\sigma(z) = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$. Этот вектор будет всегда рассматриваться в локальной системе (n, t) . В отличие от σ , вектор смещений u используется лишь в глобальных координатах: $u(z) = u_x + iu_y$.

Функции КМ с индексом единица порождают поля усилий $\sigma_{f1}(z)$ и смещений $u_{f1}(z)$; функции с индексом двойка дают усилия $\sigma_{f2}(z)$ и смещения $u_{f2}(z)$. Согласно известным формулам комплексного представления [1] имеем

$$\sigma_{ff}(z) = \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + [z\overline{\Phi'_j(z)} + \overline{\Psi_j(z)}] \frac{d\bar{z}}{dz} \quad (1.1)$$

$$2\mu_k \frac{du_{ff}}{dz} = \chi_k \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - [z\overline{\Phi'_j(z)} + \overline{\Psi_j(z)}] \frac{d\bar{z}}{dz}$$

где $k = 1$, если точка находится в нижней полуплоскости, $k = 2$, если точка находится в верхней полуплоскости, χ_k – параметр Мусхелишвили: $\chi_k = 3 - 4\nu_k$, для плоской деформации, $\chi_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$ для плоского напряженного состояния; $j = 1, 2$.

Введем две важные функции, которые в конечном счете и служат для решения задач о связанных полуплоскостях. Заметим, прежде всего, что формулы для усилий в (1.1) не содержат упругих постоянных. Поэтому усилия $\sigma_{f1}(z)$ и $\sigma_{f2}(z)$ остаются непрерывными при переходе через границу $y = 0$ полуплоскостей. Следовательно, непрерывна и сумма $\sigma_{f1}(z) + \sigma_{f2}(z)$.

В отличие от усилий, смещения $u_{f1}(z)$ и $u_{f2}(z)$ в общем случае, когда $\mu_1 \neq \mu_2$ и $\nu_1 \neq \nu_2$, испытывают разрыв на этой границе. Соответственно испытывает разрыв и сумма смещений $u_{f1}(z) + u_{f2}(z)$. Отмечая индексом плюс (минус) предельные значения из нижней (верхней) полуплоскости, имеем из (1.1) для производной разрыва этой суммы

на границе раздела $y = 0$

$$\begin{aligned} \Delta u'_f(x) &= (u'_{f1}{}^+ - u'_{f1}{}^-) + (u'_{f2}{}^+ - u'_{f2}{}^-) = \\ &= \left(\frac{\chi_1}{2\mu_1} - \frac{\chi_2}{2\mu_2} \right) [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)] + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) [\Phi_{01}(x) + \Phi_{02}(x)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\Phi_{01}(x) = \overline{\Phi}_1(x) + x\overline{\Phi}'_1(x) + \overline{\Psi}_1(x), \quad \Phi_{02}(x) = \overline{\Phi}_2(x) + x\overline{\Phi}'_2(x) + \overline{\Psi}_2(x)$$

где штрих в данном случае означает производную в направлении оси x , $\Phi_{01}(x)$ и $\Phi_{02}(x)$ – предельные значения ключевых для дальнейших построений функций

$$\Phi_{01}(z) = \overline{\Phi}_1(z) + z\overline{\Phi}'_1(z) + \overline{\Psi}_1(z), \quad \Phi_{02}(z) = \overline{\Phi}_2(z) + z\overline{\Phi}'_2(z) + \overline{\Psi}_2(z) \quad (1.3)$$

где по определению $\overline{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$ для любой функции $g(z)$. Важно, что функция $\Phi_{01}(z)$ голоморфна в нижней, а функция $\Phi_{02}(z)$ – в верхней полуплоскости.

Из сказанного следует, что решение исходной задачи будет найдено, если построить две пары функций КМ $\Phi_{a1}(z)$, $\Psi_{a1}(z)$ и $\Phi_{a2}(z)$, $\Psi_{a2}(z)$, голоморфных в каждой из полуплоскостей, имеющих линией разрыва ось x и таких, что отвечающие $\Phi_{a1}(z)$, $\Psi_{a1}(z)$ усилия $\sigma_{a1}(z)$ в нижней полуплоскости непрерывно переходят в отвечающие $\Phi_{a2}(z)$, $\Psi_{a2}(z)$ усилия $\sigma_{a2}(z)$ в верхней полуплоскости, тогда как разность $u_{a1}(z) - u_{a2}(z)$ соответствующих смещений компенсирует разрыв $\Delta u'_f(x)$ на границе полуплоскостей: $\Delta u'_{a1}(x) - u'_{a2}(x) = -\Delta u'_f(x)$. Тогда суммы

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_{aj}(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_{aj}(z) \quad (1.4)$$

где $j = 1$ в нижней полуплоскости и $j = 2$ в верхней полуплоскости, дают по формулам КМ суммарные усилия и смещения, непрерывные на границе раздела сред каковы бы ни были фиктивные напряжения $\sigma_f(t)$ и смещения $u_f(t)$. В итоге останется выбрать фиктивные величины так, чтобы суммарные усилия и/или смещения удовлетворяли заданным граничным условиям на L_1 и L_2 . Это сразу приведет к комплексным уравнениям относительно фиктивных величин. Таким образом, проблема свелась к нахождению дополнительных функций $\Phi_{aj}(z)$ и $\Psi_{aj}(z)$ в каждой из полуплоскостей.

Дополнительные функции $\Phi_{aj}(z)$ и $\Psi_{aj}(z)$ ($j = 1, 2$) находятся достаточно просто. Действительно, как известно ([1], § 112), взяв $\Psi_{aj}(z)$ в форме

$$\Psi_{aj}(z) = -[\Phi_{aj}(z) + \overline{\Phi}_{aj}(z) + z\overline{\Phi}'_{aj}(z)] \quad (1.5)$$

получаем дополнительные усилия

$$\sigma_{aj}(z) = \Phi_{aj}(z) - \Phi_{aj}(\bar{z}) \frac{d\bar{z}}{dz} + \left(1 - \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \overline{\Phi}_{aj}(z) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi}'_{aj}(z) \frac{d\bar{z}}{dz} \quad (1.6)$$

которые имеют следующие простые выражения на границе раздела $y = 0$ ($z = \bar{z} = x$, $d\bar{z}/dz = 1$):

$$\sigma_{a1}^+(x) = \Phi_{a1}^+(x) - \Phi_{a1}^-(x), \quad \sigma_{a2}^-(x) = \Phi_{a2}^-(x) - \Phi_{a2}^+(x)$$

Следовательно, при использовании представления (1.5), для непрерывности усилий должно выполняться равенство $(\Phi_{a1} + \Phi_{a2})^+ - (\Phi_{a1} + \Phi_{a2})^- = 0$. Отсюда следует, что

$$\Phi_{a2}(z) = -\Phi_{a1}(z) \quad (1.7)$$

Для дополнительных смещений ([1], § 112) имеем

$$2\mu_j u'_{aj}(z) = \chi_j \Phi_{aj}(z) + \Phi_{aj}(\bar{z}) \frac{d\bar{z}}{dz} - \left(1 - \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \overline{\Phi}_{aj}(z) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi}'_{aj}(z) \frac{d\bar{z}}{dz} \quad (1.8)$$

Следовательно, на границе раздела $y = 0$ для производной в направлении x справедливы равенства

$$2\mu_1 u'_{a1}(x) = \chi_1 \Phi_{a1}^+(x) + \Phi_{a1}^-(x), \quad 2\mu_2 u'_{a2}(x) = \chi_2 \Phi_{a2}^-(x) + \Phi_{a2}^+(x)$$

Последнее равенство при учете (1.7) записывается в виде

$$2\mu_2 u'_{a2}(x) = -\chi_2 \Phi_{a1}^-(x) - \Phi_{a1}^+(x)$$

и для производной разности смещений получим

$$\Delta u'_a(x) = u'_{a1}(x) - u'_{a2}(x) = \left(\frac{\chi_1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} \right) \Phi_{a1}^+(x) + \left(\frac{\chi_2}{2\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} \right) \Phi_{a1}^-(x)$$

Условие компенсации разрыва $\Delta u'_a(x) = -\Delta u'_f(x)$ приводит при учете соотношения (1.2) к задаче сопряжения для предельных значений $\Phi_{a1}^+(x)$, $\Phi_{a1}^-(x)$ функции $\Phi_{a1}(z)$, голоморфной вне границы раздела $y = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\chi_1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} \right) \Phi_{a1}^+(x) + \left(\frac{\chi_2}{2\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} \right) \Phi_{a1}^-(x) = \\ & = \left(\frac{\chi_2}{2\mu_2} - \frac{\chi_1}{2\mu_1} \right) [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)] + \left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2\mu_2} \right) [\Phi_{01}(x) + \Phi_{02}(x)] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поскольку функции $\Phi_2(z)$, $\Phi_{01}(z)$ голоморфны в нижней полуплоскости S_1 , а $\Phi_1(z)$, $\Phi_{02}(z)$ – в верхней полуплоскости S_2 , решение задачи сопряжения (1.9) очевидно:

$$\Phi_{a1}(z) = -\Phi_{a2}(z) = \begin{cases} K_{11}\Phi_{01}(z) + K_{12}\Phi_2(z), & z \in S_1 \\ K_{21}\Phi_1(z) + K_{22}\Phi_{02}(z), & z \in S_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

где

$$K_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \chi_1 \mu_2}, \quad K_{21} = \frac{\chi_2 \mu_1 - \chi_1 \mu_2}{\mu_2 + \chi_2 \mu_1}, \quad K_{12} = \frac{\chi_2 \mu_1 - \chi_1 \mu_2}{\mu_1 + \chi_1 \mu_2}, \quad K_{22} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \chi_2 \mu_1} \quad (1.11)$$

Для полуплоскостей с одинаковыми свойствами ($\mu_1 = \mu_2$, $\chi_1 = \chi_2$) все эти коэффициенты и соответственно $\Phi_{a1}(z)$, $\Phi_{a2}(z)$ обращаются в нуль. В случае, когда трещины, вырезы и включения в верхней полуплоскости отсутствуют, имеем $\Phi_2(z) = 0$, $\Phi_{02}(z) = 0$. Тогда

$$\Phi_{a1}(z) = -\Phi_{a2}(z) = \begin{cases} K_{11}\Phi_{01}(z), & z \in S_1 \\ K_{21}\Phi_1(z), & z \in S_2 \end{cases}$$

Если, кроме того, граница раздела $y = 0$ свободна от усилий, то, полагая $\mu_1 = 0$, получаем из (1.11) $K_{11} = -1$, $K_{21} = 1$. При заземленной границе, полагая $\mu_2 = \infty$, имеем из (1.11) $K_{11} = 1/\chi_1$, $K_{21} = -\chi_1$.

Во всех случаях $\Phi_{01}(z)$ и $\Phi_{02}(z)$ определяются по формулам (1.3). Дополнительные напряжения $\sigma_{aj}(z)$ и смещения $u_{aj}(z)$ ($j = 1, 2$) даются формулами (1.6) и (1.8). Решение исходной задачи для усилий $\sigma(z)$ и смещений $u(z)$, как упоминалось, выражается суммами

$$\sigma(z) = \sigma_{f1}(z) + \sigma_{f2}(z) + \sigma_{aj}(z), \quad u(z) = u_{f1}(z) + u_{f2}(z) + u_{aj}(z) \quad (1.12)$$

Приведенные формулы решают задачу, если известны функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ ($j = 1, 2$) для произвольных фиктивных усилий $\sigma_f(t)$ на части L_σ контуров L_1 и L_2 с заданными усилиями $\sigma(t)$ и для произвольных фиктивных смещений $u_f(t)$ на части L_u с заданными смещениями $u(t)$. Действительно, используя равенства (1.12) и приравнявая $\sigma(t)$ и $u(t)$

заданным на L значениям, получаем уравнения для определения фиктивных величин $\sigma_f(t)$ и $u_f(t)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{f1}(t) + \sigma_{f2}(t) + \sigma_{aj}(t) &= \sigma(t), \quad t \in L_\sigma \\ u_{f1}(t) + u_{f2}(t) + u_{aj}(t) &= u(t), \quad t \in L_u\end{aligned}\quad (1.13)$$

Заметим, что $\sigma_{aj}(t)$ и $u_{aj}(t)$ линейно зависят от $\sigma_{f1}(t)$, $\sigma_{f2}(t)$, $u_{f1}(t)$ и $u_{f2}(t)$. Поэтому (1.13) – линейные уравнения относительно фиктивных величин. В случае использования интегральных представлений потенциалов КМ с неизвестной плотностью, (1.13) – уравнения относительно плотности. Найдя из (1.13) $\sigma_{f1}(t)$, $u_{f1}(t)$ или плотность для контура L_1 в нижней полуплоскости и $\sigma_{f2}(t)$, $u_{f2}(t)$ или плотность для контура L_2 в верхней полуплоскости, полностью определяем функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ ($j = 1, 2$). Тогда формулы (1.4), (1.10), (1.3), (1.5) определяют функции КМ исходной задачи.

2. Вывод ГИУ с помощью интегральных представлений. Представления функций КМ интегралами типа Коши и Адамара дают удобное средство для получения в явной форме комплексных ГИУ рассматриваемых задач с помощью полученных формул. Для сокращения записей примем, что трещины, вырезы и включения имеются только в нижней из двух связанных полуплоскостей. Поэтому индекс j в обозначениях плотности и контура будем опускать. Однако при упругих постоянных и функциях КМ индекс сохранять будем, так как они различны в нижней и в верхней полуплоскостях. В достаточно общей форме интегральные представления функций КМ можно записать в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q'(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{d(Aq)}{\tau - z} - \frac{\bar{\tau} q'(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau \right] \quad (2.1)$$

Оператор A может быть выбран по соображениям удобства в соответствии с особенностями контура L и граничных условий на нем. В частности, при $Aq = \overline{q(t)}$ имеем представление [14] для замкнутого контура при заданных усилиях; при $Aq = -\chi_1 \overline{q(t)}$ (2.1) отвечает представлению при заданных смещениях [15]; при $Aq = f^+ - f^- - q$ получаем представления, лежащие в основе уравнений для трещин при заданных на их берегах усилиях [7]; при $Aq = -2\mu_1(u^+ - u^-) + \chi_1 q$ (2.1) превращаются в представления, лежащие в основе ГИУ для трещин при заданных на берегах смещениях [13]. (Последние два представления также широко использовались [2, 16].)

Подставим (2.1) в (1.3), а результат в (1.10). Получим

$$\Phi_{a1}(z) = -\Phi_{a2}(z) = \begin{cases} K_{11} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{q}' \frac{\tau - \bar{\tau}}{(\bar{\tau} - z)^2} d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d(\bar{A}q)}{\bar{\tau} - z} \right], & z \in S_1 \\ K_{21} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q' d\tau}{\tau - z}, & z \notin S_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Для дополнительных усилий и производной смещений, используя (2.2) в (1.6) и (1.8), имеем

$$\sigma_{a1}(z) = \Phi_{a1}(z) + G_{a1}(z), \quad 2\mu_1 u'_{a1}(z) = \chi_1 \Phi_{a1}(z) - G_{a1}(z) \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}G_{a1}(z) &= K_{11} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L q' \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - \bar{z}}{(\tau - \bar{z})^2} (\tau - \bar{\tau}) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{z}} d(Aq) \right] - \\ &- K_{21} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q' d\tau}{\tau - \bar{z}}\end{aligned} \quad (2.4)$$

а величина $\Phi_{a1}(z)$ дана первой из формул (2.2).

Подчеркнем, что функции $\Phi_{a1}(z)$, $\Psi_{a1}(z)$ и, следовательно, $G_{a1}(z)$, $\sigma_{a1}(z)$, $u_{a1}(z)$ непрерывны в нижней полуплоскости. Это важное свойство позволяет легко распространить известные ГИУ на задачи о связанных полуплоскостях. Действительно, согласно (1.4), а рассматриваемом случае функции КМ в нижней полуплоскости таковы: $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_{a1}(z)$, $\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_{a1}(z)$. Подстановка их в граничные условия для усилий и производной смещений на контуре L дает

$$\Phi_1^\pm(t) + \overline{\Phi_1^\pm(t)} + t[\overline{\Phi_1'^\pm(t)} + \overline{\Psi_1'^\pm(t)}] \frac{d\bar{t}}{dt} = \sigma^\pm - \sigma_{a1} \quad (2.5)$$

$$\chi_1 \Phi_1^\pm(t) - \overline{\Phi_1^\pm(t)} - t[\overline{\Phi_1'^\pm(t)} + \overline{\Psi_1'^\pm(t)}] \frac{d\bar{t}}{dt} = 2\mu_1[u'^\pm - u'_{a1}(t)] \quad (2.6)$$

где $\sigma_{a1}(t)$, $u_{a1}(t)$ – дополнительные усилия и производные смещений, определенные формулами (2.3). Как упомянуто, они непрерывны при переходе через L , и потому используются без верхних индексов $\pm$. Верхним индексом плюс (минус) отмечаются предельные значения слева (справа) от направления движения по контуру.

Из (2.5), (2.6) следует, что комплексные ГИУ, отвечающие сингулярным решениям для целой плоскости, могут быть распространены на задачи о связанных полуплоскостях, если заменить $\sigma^\pm$ на $\sigma^\pm - \sigma_{a1}$, а $u^\pm$ на $u^\pm - u_{a1}$, где по-прежнему $\sigma^\pm$ и $u^\pm$ – истинные усилия и смещения на контуре. При этом разрывы усилий $\Delta\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$ и смещений $\Delta u = u^+ - u^-$ на контуре остаются неизменными, поскольку дополнительные поля непрерывны. Для плотности q и ее производной q' также сохраняются их выражения через разрывы истинных смещений и усилий

$$q(t) = \frac{2\mu_1 \Delta u + \Delta f}{\chi_1 + 1}, \quad q'(t) = \frac{2\mu_1 \Delta u' + \Delta \sigma}{\chi_1 + 1}$$

где, как и выше, индекс единица отмечает, что параметр упругости относится к нижней полуплоскости. В итоге можно написать комплексные уравнения для задач о связанных полуплоскостях, проведя указанную замену в ГИУ для бесконечной плоскости. Нет нужды выписывать все такие уравнения. Ограничимся тремя иллюстрациями. При этом используем обозначения, которые будут служить также в следующем разделе для сокращения записей

$$m_1 = \frac{1}{2\pi(\chi_1 + 1)}, \quad S(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t}, \quad H(\tau, t) = \frac{1}{(\tau - t)^2}, \quad R(\tau, t) = \frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau - t}, \quad Q(\tau, t) = \frac{\tau - \bar{\tau}}{(\bar{\tau} - t)^2}$$

Сингулярное уравнение, полученное [7] для плоскости с разрезами, в результате указанной замены для связанных полуплоскостей принимает вид

$$-2\mu_1 i m_1 \int_L \left[2\Delta u' S(\tau, t) + \Delta u' \frac{\partial k_1}{\partial t} d\tau + \overline{\Delta u'} \frac{\partial k_2}{\partial t} d\bar{\tau} \right] + B\Delta\sigma + \sigma_{a1} = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}, \quad t \in L \quad (2.7)$$

где

$$B\Delta\sigma = -i m_1 \int_L \left[(1 - \chi_1) \Delta\sigma S(\tau, t) - \chi_1 \Delta\sigma \frac{\partial k_1}{\partial t} d\tau + \overline{\Delta\sigma} \frac{\partial k_2}{\partial t} d\bar{\tau} \right]$$

и в данном случае из (2.3), (2.4) имеем

$$\sigma_{a1} = -2\mu_1 i m_1 \int_L \left[\Delta u' \frac{\partial k_3}{\partial t} d\tau + \overline{\Delta u'} \frac{\partial k_4}{\partial t} d\bar{\tau} \right] + B_{a1} \Delta\sigma \quad (2.8)$$

$$B_{a1} \Delta\sigma = -i m_1 \int_L \left\{ \Delta\sigma \frac{\partial}{\partial t} [k_3 + (\chi_1 + 1) K_{11} \ln(\bar{\tau} - t)] d\tau + \overline{\Delta\sigma} \frac{\partial}{\partial t} [k_4 - (\chi_1 + 1) K_{11} R(t, \tau)] d\bar{\tau} \right\}$$

$$k_1(\tau, t) = \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}, \quad k_2(\tau, t) = \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} \quad (2.9)$$

$$k_3(\tau, t) = -K_{11} [\ln(\bar{\tau} - t) + (t - \bar{t}) Q(\bar{\tau}, \bar{t})] + K_{21} \ln(\tau - \bar{t}), \quad k_4(\tau, t) = K_{11} [R(t, \tau) + R(\tau, t)]$$

Гиперсингулярное уравнение получается из (2.7) интегрированием по частям членов, содержащих производную разрыва смещений

$$-2\mu_1 im_1 \int_L \left[2\Delta u H(\tau, t) - \Delta u \frac{\partial}{\partial t} dk_1 - \overline{\Delta u} \frac{\partial}{\partial t} dk_2 \right] + B\Delta\sigma + \sigma_{a1} = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}, \quad t \in L \quad (2.10)$$

$$\sigma_{a1} = -2\mu_1 im_1 \int_L \left[-\Delta u \frac{\partial}{\partial t} dk_3 - \overline{\Delta u} \frac{\partial}{\partial t} dk_4 \right] + B_{a1}\Delta\sigma$$

(член σ_{a1} получен из (2.8) аналогичным интегрированием по частям). Дифференциалы в (2.10) и в последующих формулах берутся по переменной τ .

Для включений и систем блоков (зерен) в нижней полуплоскости представления (2.1) удобно использовать, считая усилия на границах непрерывными. Тогда оператор A , входящий в (2.1), определен формулой $Aq = -\overline{q(t)}$, и следовательно, $dAq = -\overline{q'(\tau)}d\tau$. Тогда, используя эти представления для матрицы, включений и блоков (зерен), имеем обобщение уравнения [8] для блочных систем. Запишем его в гиперсингулярной форме, обобщающей для связанных полуплоскостей уравнение, полученное ранее [9]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ 2\Delta u H(\tau, t) d\tau - \Delta u \frac{\partial}{\partial t} d(k_1 + k_3) - \overline{\Delta u} \frac{\partial}{\partial t} d(k_2 + k_4) - \right. \\ & \left. -(a_3 - 2a_1)\sigma S(\tau, t) d\tau + \sigma \frac{\partial}{\partial t} [(a_1 - a_3)k_1 + a_1 k_3 + a_3 K_{11} \ln(\bar{\tau} - t)] d\tau + \right. \\ & \left. + \overline{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} [a_1 k_2 + a_1 k_4 - a_3 K_{11} R(t, \tau)] d\bar{\tau} \right\} = \frac{1}{2} a_2 \sigma(t), \quad t \in L \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$a_1 = \frac{\chi^+ + 1}{2\mu^+} + \frac{\chi^- + 1}{2\mu^-}, \quad a_2 = \frac{\chi^+ + 1}{2\mu^+} - \frac{\chi^- + 1}{2\mu^-}, \quad a_3 = \frac{\chi^+ + 1}{2\mu^+} - \frac{\chi^- + 1}{2\mu^-}$$

Ядра k_1, k_2, k_3, k_4 даны формулами (2.9).

Контур L может включать трещины и отверстия, причем, если отверстие обходится по часовой стрелке, то надо считать $1/\mu^- = 0$, $\mu^- = 0$. В случае, когда контур L состоит только из трещин, нагруженных равными по величине и противоположно направленными усилиями, имеем $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = 2(\chi_1 + 1)/(2\mu_1)$. Тогда уравнение (2.11) превращается в уравнение (2.10), где в данном случае $\Delta\sigma = 0$ ($\sigma^+ = \sigma^- = \sigma$). В частном случае одной полуплоскости, свободной от нагрузок, уравнение (2.11) превращается в уравнение, полученное ранее [5] иным способом, — с помощью комплексных сингулярных решений. Такие решения для связанных полуплоскостей обсуждаются в следующем разделе.

3. Сингулярные решения для связанных полуплоскостей. Другой подход в получении комплексных ГИУ состоит в следовании пути вещественных потенциалов. Этот подход [6, 10] использует комплексные формы сингулярных решений, т.е. решений для сосредоточенных сил. Такие решения имеются для целой плоскости (см., например, [1]), для полуплоскости со свободной границей [11] и для полуплоскости со свободной или закрепленной границей [12]. Ниже формулы разд. 1 используются для получения комплексных сингулярных решений, отвечающих, во-первых, изолированным силам и, во-вторых, периодическим системам сил. Первые служат для неперiodических задач, а вторые — для периодических задач о связанных полуплоскостях.

Изолированная сила. Пусть в точке τ нижней полуплоскости приложена сосредоточенная единичная сила в направлении оси x (или y). Соответствующие этому случаю величины будут отмечаться верхним индексом x (или y). В случае, когда такая сила действует в целой однородной плоскости со свойствами нижней полуплоскости, функции КМ определяются известными формулами [1]. Используя эти функции и

формулы разд. 1, в результате преобразований получим выражения для дополнительных функций.

Для функций КМ имеем:
в нижней полуплоскости

$$\varphi_{a1}^x(z, \tau) = -m_1 K_{11} [-\chi_1 \ln(z - \bar{\tau}) + R(\tau, z)]$$

$$\psi_{a1}^x(z, \tau) = -m_1 \{-K_{21} \ln(z - \bar{\tau}) + K_{11} z [\chi_1 S(z, \bar{\tau}) - Q(\tau, z)]\}$$

$$\varphi_{a1}^y(z, \tau) = -i m_1 K_{11} [-\chi_1 \ln(z, \bar{\tau}) - R(\tau, z)]$$

$$\psi_{a1}^y(z, \tau) = -i m_1 \{K_{21} \ln(z - \bar{\tau}) + K_{11} z [\chi_1 S(z, \bar{\tau}) + Q(\tau, z)]\}$$

в верхней полуплоскости

$$\varphi_{a2}^x(z, \tau) = m_1 K_{21} \ln(z - \tau)$$

$$\psi_{a2}^x(z, \tau) = m_1 \{-K_{21} z S(z, \tau) + K_{11} [\chi_1 \ln(z - \tau) - R(\bar{\tau}, z)]\}$$

$$\varphi_{a2}^y(z, \tau) = i m_1 K_{21} \ln(z - \tau)$$

$$\psi_{a2}^y(z, \tau) = i m_1 \{-K_{21} z S(z, \tau) - K_{11} [\chi_1 \ln(z - \tau) + R(\bar{\tau}, z)]\}$$

Дополнительные смещения, главный вектор сил и усилия получаются подстановкой этих функций в формулы КМ. Поскольку результирующие формулы громоздки, приведем их в явном виде лишь для ключевых величин – дополнительных смещений. Для них упомянутая подстановка дает:

в нижней полуплоскости

$$2\mu_1 u_{a1}^x(z, \tau) = -m_1 \{K_{21} \ln(\bar{z} - \tau) + K_{11} [-\chi_1^2 \ln(z - \bar{\tau}) + \chi_1 R(\tau, z) + \chi_1 R(z, \tau) + R(z, \tau)R(\bar{\tau}, \bar{z})]\}$$

$$2\mu_1 u_{a1}^y(z, \tau) = -i m_1 \{K_{21} \ln(\bar{z} - \tau) + K_{11} [-\chi_1^2 \ln(z - \bar{\tau}) - \chi_1 R(\tau, z) - \chi_1 R(z, \tau) + R(z, \tau)R(\bar{\tau}, \bar{z})]\}$$

в верхней полуплоскости

$$2\mu_2 u_{a2}^x(z, \tau) = -m_1 \{-K_{21} [\chi_2 \ln(z - \tau) - R(z, \bar{\tau})] + K_{11} [\chi_1 \ln(\bar{z} - \bar{\tau}) - R(\tau, \bar{z})]\}$$

$$2\mu_2 u_{a2}^y(z, \tau) = -i m_1 \{-K_{21} [\chi_2 \ln(z - \tau) + R(z, \bar{\tau})] + K_{11} [\chi_1 \ln(\bar{z} - \bar{\tau}) + R(\tau, \bar{z})]\}$$

Фундаментальные решения для связанных полуплоскостей представляют суммы фундаментальных решений для целой плоскости и найденных дополнительных величин: $u^x(z, \tau) = u_{1j}^x(z, \tau) + u_{aj}^x(z, \tau)$, $u^y(z, \tau) = u_{1j}^y(z, \tau) + u_{aj}^y(z, \tau)$ ($j = 1, 2$), где $u_{1j}^x(z, \tau)$, $u_{1j}^y(z, \tau)$ – комплексные фундаментальные решения для поля смещений в случае целой плоскости

$$2\mu_j u_{1j}^x(z, \tau) = -m_1 [\chi_j \ln(z - \tau) + \chi_1 \ln(\bar{z} - \bar{\tau}) - R(z, \tau) - R(\tau, z)]$$

$$2\mu_j u_{1j}^y(z, \tau) = -i m_1 [\chi_j \ln(z - \tau) + \chi_1 \ln(\bar{z} - \bar{\tau}) + R(z, \tau) + R(\tau, z)]$$

Во всех приведенных формулах коэффициенты K_{11} , K_{21} определены формулами (1.11). В частном случае одной полуплоскости, свободной от нагрузок, имеем $K_{11} = -1$, $K_{21} = 1$, и полученные результаты эквивалентны известным ранее формулам [11] (в явном виде они приведены в [10]). В случае закрепленной полуплоскости, когда $K_{11} = 1/\chi_1$, $K_{21} = -\chi_1$, а также в общем случае двух связанных полуплоскостей, эти формулы, насколько известно автору, не публиковались.

Периодическая система сил. Совершенно аналогично получаются фундаментальные решения, отвечающие периодической с периодом π системе сил, приложенных в

точках $\tau = m\pi$ нижней полуплоскости ($m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). (Для произвольного вещественного периода a достаточно во всех последующих формулах добавить множитель π/a при переменных z и τ , и соответственно, $\bar{z}$ и $\bar{\tau}$.) Исходными служат формулы для целой плоскости при том же расположении периодических систем сил, действующих в направлении оси x или y [10]. Использование этих формул по схеме разд. 1 дает выражения для функций КМ, определяющих полные напряжения. Функции КМ, определяющие смещения и главный вектор сил, получаются интегрированием этих выражений, и после подстановки результата в формулы КМ для смещений получаем выражения для искомых сингулярных решений:

в нижней полуплоскости

$$2\mu_1 u^x(z, \tau) = -m_1 \{ \chi_1 \ln \sin(z - \tau) + \chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} - [(z - \bar{z}) - (\tau - \bar{\tau})] \operatorname{ctg}(\bar{z} - \bar{\tau}) + \\ + K_{21} \overline{\ln \sin(z - \bar{\tau})} + K_{11} [-\chi_1^2 \ln \sin(z - \bar{\tau}) - \chi_1 (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{ctg}(z - \bar{\tau}) + (z - \bar{z})(\chi_1 \operatorname{ctg}(\bar{z} - \tau) + \\ + (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{cosec}^2(\bar{z} - \tau))] \}$$

$$2\mu_1 u^y(z, \tau) = -i m_1 \{ \chi_1 \ln \sin(z - \tau) + \chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} + [(z - \bar{z}) - (\tau - \bar{\tau})] \operatorname{ctg}(\bar{z} - \bar{\tau}) + \\ + K_{21} \overline{\ln \sin(z - \bar{\tau})} + K_{11} [-\chi_1^2 \ln \sin(z - \bar{\tau}) + \chi_1 (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{ctg}(z - \bar{\tau}) + (z - \bar{z})(-\chi_1 \operatorname{ctg}(\bar{z} - \tau) + \\ + (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{cosec}^2(\bar{z} - \tau))] \}$$

в верхней полуплоскости

$$2\mu_2 u^x(z, \tau) = -m_1 \{ \chi_2 \ln \sin(z - \tau) + \chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} - [(z - \bar{z}) - (\tau - \bar{\tau})] \operatorname{ctg}(z - \tau) - \\ - K_{21} [\chi_2 \ln \sin(z - \tau) - (z - \bar{z}) \operatorname{ctg}(z - \tau)] + K_{11} [\chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} + (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{ctg}(z - \tau)] \}$$

$$2\mu_2 u^y(z, \tau) = -i m_1 \{ \chi_2 \ln \sin(z - \tau) + \chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} + [(z - \bar{z}) - (\tau - \bar{\tau})] \operatorname{ctg}(z - \tau) - \\ - K_{21} [\chi_2 \ln \sin(z - \tau) + (z - \bar{z}) \operatorname{ctg}(z - \tau)] + K_{11} [\chi_1 \overline{\ln \sin(z - \tau)} - (\tau - \bar{\tau}) \operatorname{ctg}(z - \tau)] \}$$

В частных случаях нижней полуплоскости со свободной ($K_{11} = -1, K_{21} = 1$) и с закрепленной ($K_{11} = 1/\chi_1, K_{21} = -\chi_1$) границей получаются фундаментальные решения, совпадающие с полученными ранее результатами [16] с точностью до членов, отвечающих однородному состоянию полуплоскости.

Исследование показывает, что комплексные смещения $u^x(z, \tau)$, определяемые приведенными формулами, в обеих полуплоскостях имеют циклическую постоянную iA ; смещения $u^y(z, \tau)$ имеют циклическую постоянную $-A$, где

$$A = (K_{21} + \chi_1^2 K_{11}) / [4\mu_1 (\chi_1 + 1)] = [\chi_2 (1 - K_{21}) - \chi_1 (K_{11} + 1)] / [4\mu_2 (\chi_1 + 1)]$$

(последняя часть равенства записана при учете соотношений (1.11)).

Заметим, что все формулы для периодической системы сил могут быть получены из соответствующих формул для изолированных сил формальной заменой $\ln \zeta$ на $\ln(\sin \zeta)$, $1/\zeta$ на $\operatorname{ctg} \zeta$ и $1/\zeta^2$ на $1/\sin^2 \zeta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-05-64191).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи теории упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.

3. Stress Intensity Factors Handbook. V. 1 / Ed. Y. Murakami. Oxford et al.: Pergamon press, 1987 = Справочник по коэффициентам напряжений / Под ред. Ю. Мураками. Т. 1. М.: Мир, 1990. 448 с.
4. Греков М.А. Плоские задачи теории трещин. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1997. 127 с.
5. Mogilevskaya S.G. Complex singular and hypersingular integral equations for the system of openings, cracks and inclusions in a half-plane // Proc. Intern. Symp. on Boundary Element Methods / Ed. M. Bonnet. Paris: Ecole Polytechnique, 1998. P. 153–154.
6. Mogilevskaya S.G., Linkov A.M. Complex fundamental solutions and complex variables boundary element method in elasticity // Comput. Mech. 1998. V. 22. № 1. P. 88–92.
7. Линьков А.М. Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1294–1297.
8. Линьков А.М. Плоские задачи о статическом нагружении кусочно-однородной линейно-упругой среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 644–657.
9. Linkov A.M., Mogilevskaya S.G. Complex hypersingular integrals and integral equations in plane elasticity // Acta Mech. 1994. V. 105. № 1–4. P. 189–205.
10. Linkov A.M., Mogilevskaya S.G. Complex hypersingular BEM in plane elasticity problems // Singular Integrals in Boundary Element Methods / Eds V. Sladek and J. Sladek. Southampton: Computational Mechanics Publ., 1998. P. 299–364.
11. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1992. 457 p.
12. Греков М.А. Функции Грина для периодических задач упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 173–178.
13. Линьков А.М. Задачи теории упругости для плоскости с конечным числом криволинейных разрезов // Исследования по упругости и пластичности. Вып. 11. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. С. 3–11.
14. Шерман Д.И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах // Докл. АН СССР. 1940. Т. 28. № 1. С. 25–28.
15. Шерман Д.И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 911–913.
16. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248 с.

Санкт-Петербург
e-mail: vzoubkov@por3.rcom.ru

Поступила в редакцию
10.XI.1998