

УДК 532.529:534.2

© 1999 г. И.Ш. Ахатов, Д.Б. Хисматуллин

ДЛИННО-КОРОТКОВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПУЗЫРЬКОВЫХ ЖИДКОСТЯХ

Рассматривается взаимодействие длинных и коротких волн в разреженной монодисперсной смеси слабосжимаемой жидкости с пузырьками газа. Показывается, что уравнения, описывающие динамику возмущений в пузырьковой жидкости, допускают существование длинно-коротковолнового резонанса Бени – Захарова. Для вывода уравнений взаимодействия используется специальная модификация метода многих масштабов. В нерезонансном случае уравнения взаимодействия сводятся к нелинейному уравнению Шредингера относительно формы огибающей короткой волны, а в резонансном – к известной системе уравнений Захарова. Специфика взаимодействия длинных и коротких волн в пузырьковой жидкости состоит в том, что при некоторых значениях частоты короткой волны происходит обращение в нуль коэффициентов взаимодействия ("вырождение взаимодействия"). В случае "вырождения" строится класс новых моделей взаимодействия. На основе этих моделей проводится численное исследование вырожденного резонансного взаимодействия в пузырьковых жидкостях.

Известно, что независимое распространение одномерных длинных и коротких волн на поверхности воды и в бесстолкновительной плазме на достаточно больших временах может быть описано, соответственно, уравнением Кортевега – де Вриза [1, 2]

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial x} + \chi \frac{\partial^3 L}{\partial x^3} = 0$$

и нелинейным уравнением Шредингера [3, 4]

$$i \frac{\partial S}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \gamma |S|^2 S = 0$$

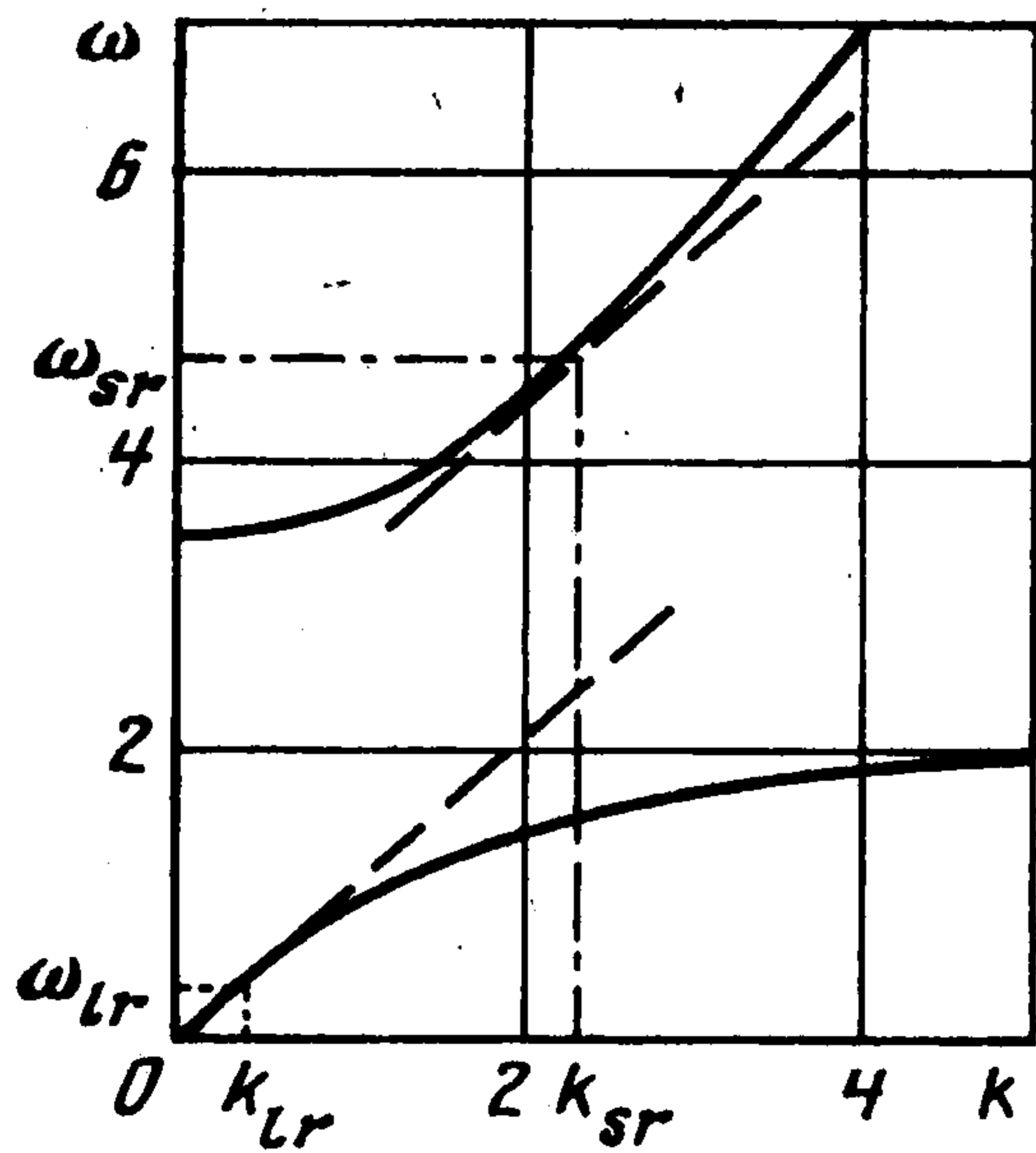
(L – профиль длинной волны, S – огибающая коротких волн).

В случае, когда амплитуда коротковолнового сигнала изменяется со временем и в пространстве, между длинной волной и огибающей коротких волн может возникать взаимодействие. Механизм такого "длинно-коротковолнового" взаимодействия был впервые изучен [5] при исследовании волн на поверхности воды. Была предложена [6] общая теория взаимодействия длинных и коротких волн, где был рассмотрен новый вид резонанса между тремя волнами с волновыми числами k_1, k_2, k_3 и частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. А именно, при выборе

$$k_1 = k_s + \epsilon k', \quad k_2 = k_s - \epsilon k', \quad k_3 \equiv k_l = 2\epsilon k', \quad k_s, k' = O(1), \quad \epsilon \ll 1$$

условие резонанса $k_1 = k_2 + k_3, \omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ может быть приведено к виду $d\omega_s/dk_s = \omega_l/k_l$. Если k_s и ω_s – волновое число и частота короткой волны, а k_l и ω_l – волновое число и частота длинной волны, то полученное условие предполагает равенство групповой скорости короткой волны $c_g(k_s) = d\omega_s/dk_s$ и фазовой скорости длинной волны $c_p(k_l) = \omega_l/k_l$ (длинно-коротковолновый резонанс).

Уравнения резонансного длинно-коротковолнового взаимодействия были впервые представлены В.Е. Захаровым для описания взаимодействия ленгмюровских колебаний с ионным звуком в плазме [4]



Фиг. 1

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \alpha \frac{\partial |S|^2}{\partial x} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \delta L S$$

Эти универсальные уравнения были получены для волн на поверхности воды [7], для модели молекулярной цепи в виде α -спирали [8].

Из-за наличия пузырьков газа дисперсионная кривая для пузырьковой жидкости разделяется на две ветви – низкочастотную и высокочастотную [9]. Поэтому в такой среде возможно взаимное распространение длинноволновых и коротковолновых возмущений. Однако исследования по теории нелинейных волн в жидкостях с пузырьками газа ограничивались независимым рассмотрением длинных и коротких волн. В частности, было получено [10, 11] уравнение Кортевега – де Вриза для описания эволюции длинноволновых возмущений в жидкостях с пузырьками адиабатического газа. Было показано [12], что эволюция квазимонохроматических волновых пакетов коротких волн в полидисперсных пу-

зырьковых жидкостях может быть описана нелинейным уравнением Шредингера. Были построены уравнения модуляций коротких волн для пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой [13], а также с учетом межфазного теплообмена [14]. Стоит также отметить работы [15, 16], в которых были предложены модели генерации субгармоник короткой волны и проведен анализ связанных с ними эффектов параметрического усиления и генерации звука в жидкостях с пузырьками газа.

В настоящей работе впервые проводится исследование взаимодействия одномерных длинноволновых и коротковолновых возмущений в монодисперсной пузырьковой жидкости.

1. Основные уравнения. Одномерное течение идеальной слабосжимаемой жидкости с малым содержанием сферических газовых пузырьков в условиях, когда можно пренебречь тепловой диссипацией и капиллярными эффектами, описывается уравнениями [9, 17, 18]

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \rho_l \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] &= p_g - p, \quad \rho_l - \rho_{l0} = \frac{p - p_0}{C_l^2} \\ \rho &= \rho_l (1 - \alpha_g), \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\kappa} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + v \partial/\partial x$ – субстанциональная производная по времени, p, ρ, v – давление, плотность и скорость смеси, ρ_l – истинная плотность жидкости, C_l – скорость звука в чистой жидкости, p_g, α_g, a – давление, объемное содержание и радиус пузырьков, n – число пузырьков в единице объема смеси, κ – показатель политропы; нулевой индекс означает невозмущенное состояние смеси.

Переходя к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a}{a_0} - 1, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0} - 1, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l_*} \\ \rho_* &= \rho_0 \alpha_{g0}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\alpha_{g0} p_0}{\rho_0}}, \quad t_* = a_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}, \quad l_* = \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_{g0}}} \end{aligned}$$

(далее черту опускаем) и пренебрегая величинами порядка объемного газосодержания

по сравнению с единицей, систему (1.1) можно привести к виду [12],

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (1+a) \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - (1+a)^{-3\kappa} + p + 1 = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho - 1 - b^2 p + (1+a)^3 = 0, \quad b = \sqrt{p_0 (\rho_{l0} \alpha_{g0} C_l^2)^{-1}}$$

Линейный анализ системы (1.2) показывает, что ее дисперсионное соотношение имеет две ветви

$$\omega_{\pm}^2(k) = \frac{1}{2} \{ 3\kappa + (k^2 + 3)b^{-2} \pm \sqrt{[3\kappa - (k^2 + 3)b^{-2}]^2 + 36\kappa b^{-2}} \}. \quad (1.3)$$

На фиг. 1 представлена дисперсионная кривая (1.3) для смеси воды с воздушными пузырьками при нормальных условиях ($p_0 = 0,1$ МПа, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³) и объемном газо-содержании $\alpha_{g0} = 1,1 \cdot 10^{-4}$.

Длинноволновая и коротковолновая асимптотики дисперсионного соотношения (1.3) имеют вид

$$\omega_l = c_e k_l - \chi k_l^3 + O(k_l^5) \quad \text{при} \quad k_l \rightarrow 0; \quad \chi = c_e^5 / (6\kappa^2) \quad (1.4)$$

$$\omega_s = c_f k_s + O(k_s^{-1}) \quad \text{при} \quad k_s \rightarrow \infty$$

где

$$c_e = \omega_l / k_l |_{k_l \rightarrow 0} = \sqrt{(b^2 + \kappa^{-1})^{-1}}, \quad c_f = d\omega_s / dk_s |_{k_s \rightarrow \infty} = b^{-1} \quad (1.5)$$

— равновесная и замороженная скорости звука в смеси.

Дисперсионное соотношение (1.3) допускает существование длинно-коротковолнового резонанса Бенни — Захарова. Действительно, так как групповая скорость короткой волны

$$c_g = d\omega_s / dk_s = k_s \omega_s^{-1} (\omega_s^2 - 3\kappa)(2b^2 \omega_s^2 - 3\kappa c_e^{-2} - k_s^2)^{-1} \quad (1.6)$$

при стремлении k_s к нулю является бесконечно малой величиной, а из (1.5) следует, что $c_f > c_e$, то для любого достаточно малого $k_l = k_{lr}$ найдется такое $k_s = k_{sr}$, что будет выполнено условие длинно-коротковолнового резонанса Бенни — Захарова (фиг. 1)

$$c_g(k_{sr}) = c_p(k_{lr}) \quad (1.7)$$

В случае бесконечно длинных волн ($k_l \rightarrow 0$) это условие сводится к равенству

$$c_g(k_{sr}) = c_e \quad (1.8)$$

2. Метод многих масштабов. Для вывода уравнений взаимодействия длинных и коротких волн используется метод многих масштабов [19]. Этот метод предполагает разложение решения $\mathbf{z} = (a, p, \rho)$ системы (1.1) по степеням некоторого малого параметра ε (характеризующего амплитуду возмущения) на длинноволновую и коротковолновые составляющие

$$\mathbf{z} = \varepsilon^l \sum_{m \geq 1} \varepsilon^{m-1} \mathbf{z}_m^{(0)} + \varepsilon^s \sum_{m, n \geq 1} \varepsilon^{(m-1)n + (n-1)s} [\mathbf{z}_m^{(n)} e^{in\Theta} + \text{с.с.}] \quad (2.1)$$

и введение быстрых (t_0, x_0) и медленных переменных $(t_n, x_n) = \varepsilon^n(t_0, x_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) с заменой

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (2.2)$$

Здесь $\Theta = k_s x_0 - \omega_s t_0$ – фаза короткой волны; $z_m^{(0)}, z_m^{(n)}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) – длинноволновые и коротковолновые компоненты решения, зависящие только от медленных переменных; l, s – некоторые числа, которые вместе с ε характеризуют степени малости амплитуд возмущений.

3. Нерезонансное и резонансное взаимодействия. Для построения модели нерезонансного взаимодействия положим $(l, s) = (2, 1)$, подставим (2.1) и (2.2) в (1.2) и расцепим получившееся выражение по гармоникам. Ограничимся порядками ε^4 для нулевой и ε^3 для первой гармоник и введем обозначения $L = p_1^{(0)}$ для профиля давления в длинной волне, $S = p_1^{(1)}$ для огибающей короткой волны давления. Тогда, переходя в систему координат, бегущую во времени t_1 с групповой скоростью короткой волны $c_g(k_s)$, получим уравнения нерезонансного взаимодействия

$$\Phi(\xi) = \Phi_0 + \frac{\alpha}{c_g^2 - c_e^2} |S|^2, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \gamma |S|^2 S = \delta \Phi S \quad (3.1)$$

Здесь

$$L = L_0(\eta_1) + L_0(\eta_2) + \Phi(\xi), \quad \tau = t_2, \quad \xi = x_1 - c_g t_1, \quad \eta_{1,2} = x_1 \pm c_e t_1 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{c_e^2 c_g^2}{\kappa(\omega_s^2 - 3\kappa)^2} [\omega_s^2 - 9\kappa(\kappa + 1)] \\ \beta &= \frac{c_g}{2k_s} \left[1 + \frac{c_g}{\omega_s^2 - 3\kappa} \{4k_s \omega_s + c_g(k_s^2 + 3(1 + \kappa b^2) - 6b^2 \omega_s^2)\} \right] \\ \delta &= -\frac{c_g \omega_s^2}{2\kappa k_s (\omega_s^2 - 3\kappa)^2} [\omega_s^2 - 9\kappa(\kappa + 1)] \\ \gamma &= -\frac{[\omega_s^2 - 3\kappa(3\kappa + 1)]\delta}{(\omega_s^2 - 3\kappa)^2} - \frac{c_g(b^2 \omega_s^2 - k_s^2)}{4k_s \omega_s^2 (\omega_s^2 - 3\kappa)^3} [-\omega_s^4 + 27\kappa^2(\kappa + 1)\omega_s^2 + 27\kappa^2(\kappa + 1)^2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

(L_0 – начальное распределение длинной волны); c_g определяется из (1.6), c_e – из (1.5).

Полученная модель описывает процесс образования безинерционной длинной волны волновым пакетом коротких волн и дальнейший процесс их взаимодействия.

Система уравнений (3.1) сводится к нелинейному уравнению Шредингера относительно функции $\tilde{S} = S \exp\{-i\delta\Phi_0\tau\}$

$$i \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2} + \gamma' |\tilde{S}|^2 \tilde{S} = 0, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\alpha\delta}{c_g^2 - c_e^2} \quad (3.4)$$

В случае длинно-коротковолнового резонанса $c_g = c_e$ первое уравнение (3.1) становится несправедливым из-за обращения в бесконечность коэффициента $\alpha(c_g^2 - c_e^2)^{-1}$. Это означает, что резонансное взаимодействие требует выбора других значений (l, s) . Таким выбором может быть $(l, s) = (2, 3/2)$.

Предположим, что все неизвестные зависят только от переменных $\xi = x_1 - c_g t_1$, $\zeta = x_2 - c_g t_2$, $\tau = t_2$. Подставим выражения (2.1) и (2.2) в систему (1.2) с указанным выше выбором (l, s) , расцепим получившееся по гармоникам, и учтем члены до порядка ε^5 для нулевой и $\varepsilon^{7/2}$ для первой гармоник. Тогда при выполнении условия резонанса (1.8) возникнет система уравнений Захарова [4]

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{2c_e} \frac{\partial |S|^2}{\partial \xi} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = \delta L S \quad (3.5)$$

Здесь $L = p_1^{(0)}$, $S = p_1^{(1)}$, коэффициенты α , β и δ определяются из (3.3).

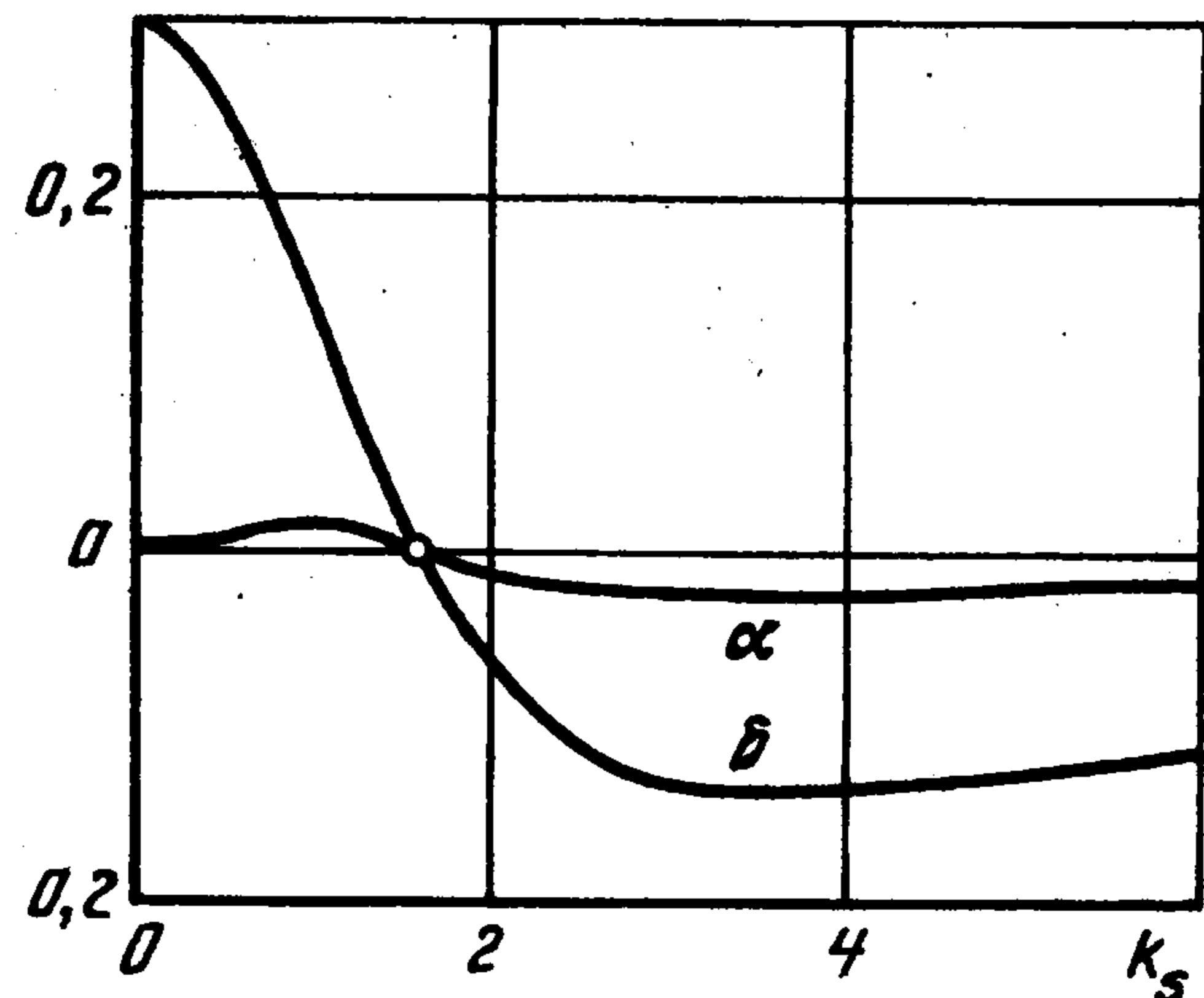
4. Вырождение взаимодействия. Анализ коэффициентов (3.3) показывает, что коэффициенты взаимодействия α и δ одновременно обращаются в нуль при условии

$$\omega_s^2 = 9\kappa(\kappa + 1) \quad (4.1)$$

При этом взаимодействие длинных и коротких волн "вырождается", так как уравнения (3.1), (3.2) становятся несвязанными и принимают вид

$$L = L_0(\eta_1) + L_0(\eta_2), \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \gamma |S|^2 S = 0 \quad (4.2)$$

На фиг. 2 изображена зависимость коэффициентов α и δ от безразмерного волнового числа k_s для смеси воды с воздушными пузырьками при нормальных условиях и объемном газосодержании $\alpha_{g0} = 2,2 \cdot 10^{-4}$. Светлая точка – точка вырождения.



Фиг. 2

В нерезонансном случае вырождение приводит к тому, что коротковолновые возмущения будут инициировать длинную волну со значительно меньшей амплитудой. Это следует из того, что связанные уравнения взаимодействия можно получить, если при подстановке разложения (2.1), (2.2) в уравнения (1.2) вместо $(l, s) = (2, 1)$ взять степени малости (3,1). При замене координат $x_1 \rightarrow \xi = x_1 - c_g t_1$ и применении условия вырождения (4.1) эти уравнения принимают вид

$$\Phi(\xi) = i \frac{\lambda}{c_g^2 - c_e^2} \left(S \frac{\partial S^*}{\partial \xi} - S^* \frac{\partial S}{\partial \xi} \right), \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \gamma |S|^2 S = 0 \quad (4.3)$$

$$L = L_0(\eta_1) + L_0(\eta_2) + \Phi(\xi), \quad S = S(\tau, \xi), \quad \tau = t_2, \quad \eta_{1,2} = x_1 \pm c_e t_1$$

$$\lambda = (\kappa + 1)^{1/2} c_e^2 c_g^3 / (3\kappa^{5/2} (3\kappa + 2)^2)$$

(коэффициент λ всегда отличен от нуля).

В случае вырождения резонансного взаимодействия, т.е. при выполнении условий резонанса (1.8) и вырождения (4.1), система уравнений взаимодействия становится однопараметрической и определяется лишь параметром κ . Во-первых, это следует из условия вырождения (4.1), согласно которому частота ω_{sr} зависит только от κ . Во-вторых, при подстановке условия вырождения (4.1) в дисперсионное соотношение (1.3) получается соотношение, не содержащее ω_{sr} и связывающее величины k_{sr} , b и κ . Вместе с условием резонанса (1.8), в котором также учитывается условие (4.1), это соотношение составляет систему из двух алгебраических уравнений относительно k_{sr} и b с параметром κ . Таким образом, остается один свободный параметр κ , так как остальные три (ω_{sr} , k_{sr} , b) полностью выражаются через него

$$\omega_{sr} = 3\sqrt{\kappa(\kappa + 1)}, \quad k_{sr} = \frac{3(\kappa + 1)}{\sqrt{\kappa(3\kappa + 2)}}, \quad b = \frac{\sqrt{3\kappa(\kappa + 1) + 1}}{\kappa(3\kappa + 2)} \quad (4.4)$$

Если рассматривать в качестве пузырьковой жидкости смесь воды с воздушными пу-

зырьками радиуса $a_0 = 1$ мм при давлении $p_0 = 0,1$ мПа, то вырождение резонансного взаимодействия будет возникать при инициировании возмущения с частотой $\Omega_{sr} \approx 55$ КГц, при условии, что объемное газосодержание $\alpha_{g0} \approx 3 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим как модифицируются уравнения резонансного взаимодействия в случае вырождения при различных выборах чисел l, s .

Случай $(l, s) = (2, 3/2)$. При выполнении условия (4.4) уравнения Захарова (3.5) сводятся к системе линейных несвязанных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.5)$$

из которой следует неизменность начального профиля длинной волны с течением времени. Второе уравнение (4.5) является дисперсионным с дисперсионным соотношением вида $\Omega^2 = \beta^2 K^4$. Из-за дисперсии волновой пакет огибающей будет расплываться с течением времени.

Система (4.5) допускает пространственно-однородное решение $L = L_0, S = S_0$. Зададим в начальный момент времени некоторые возмущения к этим решениям. Тогда из уравнений (4.5) следует, что возмущения для L будут распространяться без изменения своей формы и амплитуды, а для S – расплываться по всему пространству, уменьшаясь по амплитуде на больших временах. Амплитуда волнового пакета коротких волн будет уменьшаться как $1/\sqrt{\tau}$, т.е. во времени $t_3 = \varepsilon \tau$ амплитуда возмущений огибающей короткой волны будет величиной порядка $\varepsilon^{1/2}$. Из-за уменьшения этой амплитуды возрастает вклад членов взаимодействия следующего порядка по ε .

При подстановке выражений (2.1), (2.2) в систему (1.2) учтем все члены до порядка ε^6 для нулевой и $\varepsilon^{3/2}$ для первой гармоник. Будем полагать, что $L = p_1^{(0)}, L_1 = p_2^{(0)}$ и $S = p_1^{(1)}, S_1 = p_2^{(1)}$ – функции $\xi = x_1 - c_g t_1, \tau = t_2$, причем L_1 и S_1 по аналогии с L и S эволюционируют во времени τ согласно (4.5), т.е. справедливы уравнения

$$\frac{\partial L_1}{\partial \tau} = 0, \quad i \frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.6)$$

Также положим $p_3^{(0)} = L_2(\xi)$ и $p_3^{(1)} = S_2(\xi)$. Тогда, используя соотношения (4.4) и (4.5), получим систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \varepsilon \left[\chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} - i\lambda \left(S^* \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 S^*}{\partial \xi^2} \right) \right] = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - i\beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial^3 S}{\partial \xi^3} + i\gamma S^2 S^* - \mu L \frac{\partial S}{\partial \xi} - \nu S \frac{\partial L}{\partial \xi} \right) = 0$$

Все коэффициенты системы (4.7) зависят только от параметра κ и при $\kappa \geq 1$ положительны

$$c_g = c_e = \frac{\kappa(3\kappa+2)}{(3\kappa+1)(\kappa+1)^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{\kappa(3\kappa+2)^3}{4(3\kappa+1)^3(\kappa+1)^{1/2}}$$

$$\lambda = \frac{\kappa^{3/2}}{6(3\kappa+1)^4(3\kappa+2)(\kappa+1)^{3/2}} (27\kappa^3 + 18\kappa^2 + 18\kappa + 4)$$

$$\beta = \frac{3\kappa^{5/2}(3\kappa+2)}{2(3\kappa+1)^3(\kappa+1)^{3/2}} (3\kappa^2 + 3\kappa + 2)$$

$$\eta = \frac{\kappa^3(3\kappa+2)}{6(3\kappa+1)^5(\kappa+1)^{5/2}}(81\kappa^4 + 54\kappa^3 + 81\kappa^2 + 60\kappa + 28) \quad (4.8)$$

$$\gamma = \frac{(\kappa+1)^{1/2}}{12\kappa^{1/2}(3\kappa+1)(3\kappa+2)^2}(9\kappa-2), \quad \chi = \frac{\kappa^3(3\kappa+2)^5}{6(3\kappa+1)^5(\kappa+1)^{5/2}}$$

$$\mu = 2\nu = \frac{\kappa(3\kappa+2)}{(3\kappa+1)^2(\kappa+1)^{1/2}}$$

Отметим, что коэффициент при линейном члене первого уравнения (4.7) χ совпадает с коэффициентом второго члена разложения низкочастотной ветви дисперсионного соотношения (1.3) в области длинных волн (см. (1.4)), а коэффициент при линейном члене второго уравнения

$$\eta = -\frac{1}{6} \frac{d^3 \omega_s}{dk_s^3}$$

Если положить $S = 0$, то система уравнений (4.7) сводится к уравнению Кортевега-де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial L}{\partial \tau_1} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} + \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.9)$$

описывающего распространение длинноволновых возмущений в пузырьковой жидкости. Здесь $\tau_1 = t_3 = \varepsilon^3 t$.

Случай $(l, s) = (1, 1)$. При данном выборе, в случае вырождения резонансного взаимодействия (4.4), также возникает нетривиальная система уравнений (в порядке ε^2 для первой гармоники и ε^4 для нулевой гармоники).

Как обычно, предположим, что

$$p_1^{(0)} = L(\tau, \xi), \quad p_2^{(0)} = L_1(\tau, \xi) \quad \text{и} \quad p_1^{(1)} = S(\tau, \xi), \quad p_2^{(1)} = S_1(\tau, \xi)$$

Будем также считать, что L_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial L_1}{\partial \tau} + 2\sigma \frac{\partial L L_1}{\partial \xi} = 0$$

Тогда будет справедлива следующая модель взаимодействия:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} + \varepsilon \left[\chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} + \varsigma \frac{\partial L^3}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial L |S|^2}{\partial \xi} - i\lambda \left(S^* \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 S^*}{\partial \xi^2} \right) \right] = 0 \quad (4.10)$$

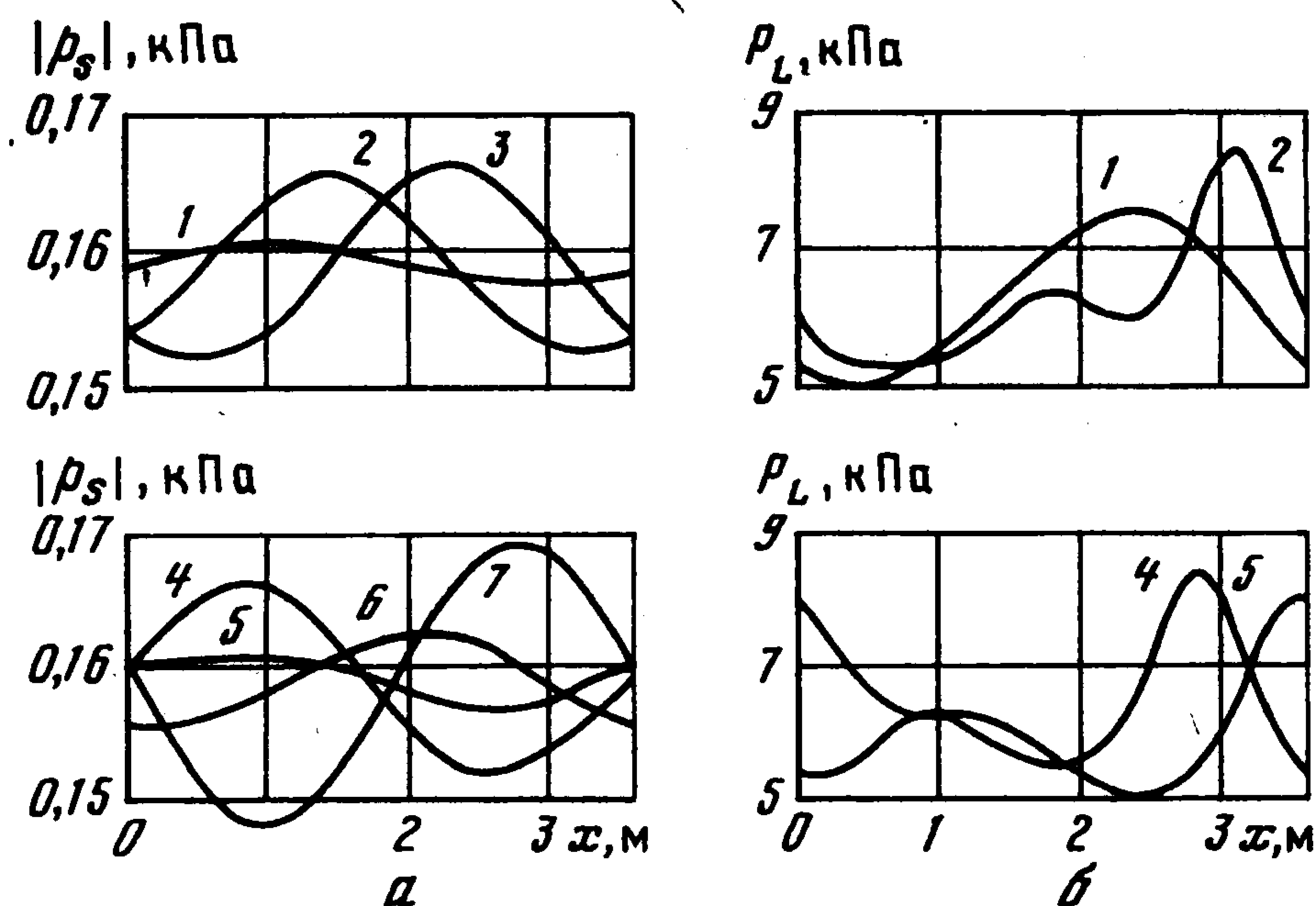
$$i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - \gamma S^2 S^* = i\mu L \frac{\partial S}{\partial \xi} + i\nu S \frac{\partial L}{\partial \xi} + \tilde{\delta} L^2 S$$

Здесь

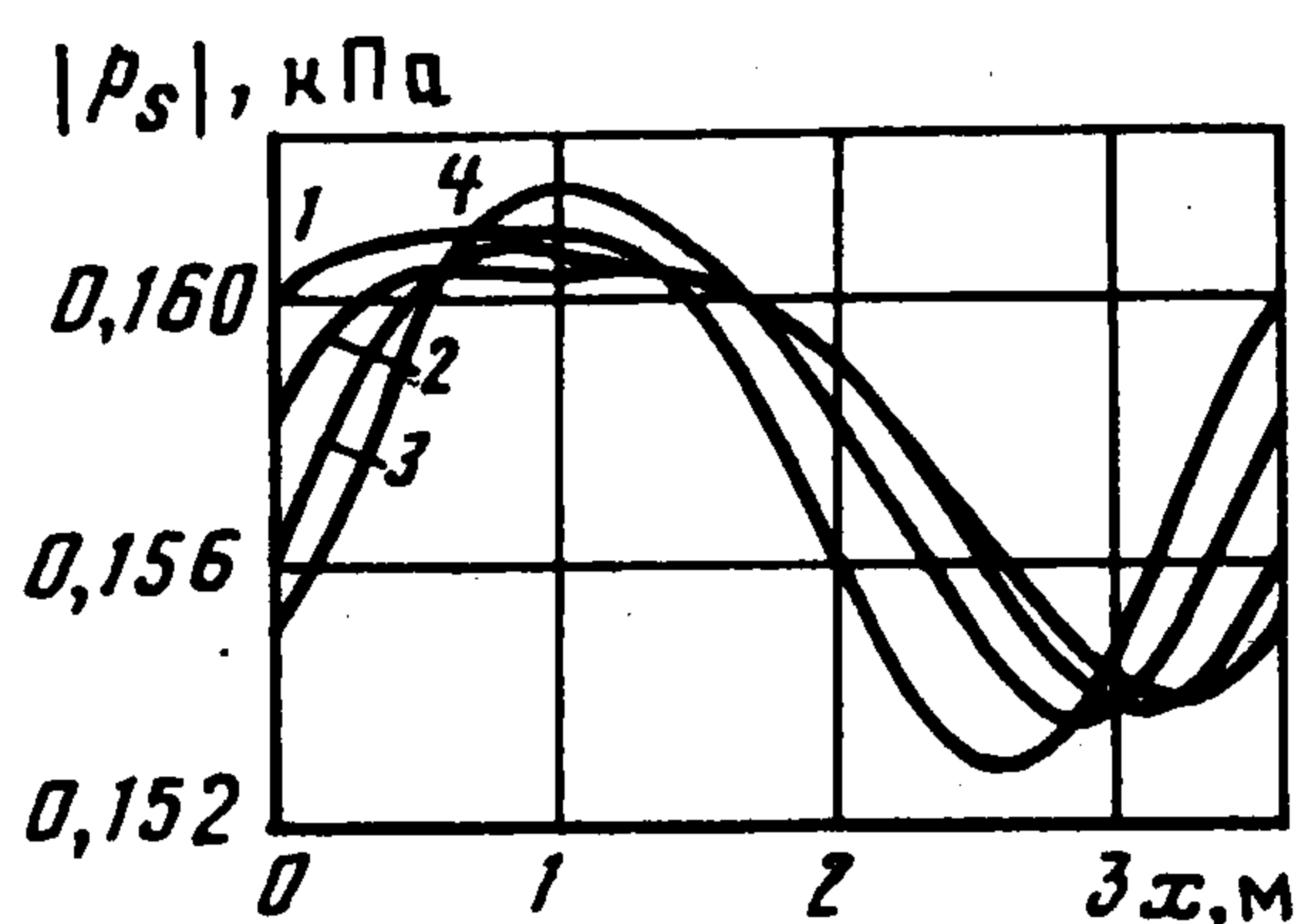
$$\tilde{\delta} = \frac{(3\kappa+2)^2}{36\kappa^{1/2}(3\kappa+1)(\kappa+1)^{1/2}}$$

$$\varsigma = \frac{(3\kappa+2)^3}{36(3\kappa+1)^5(\kappa+1)^{3/2}}(27\kappa^4 + 62\kappa^3 + 45\kappa^2 + 7\kappa - 2)$$

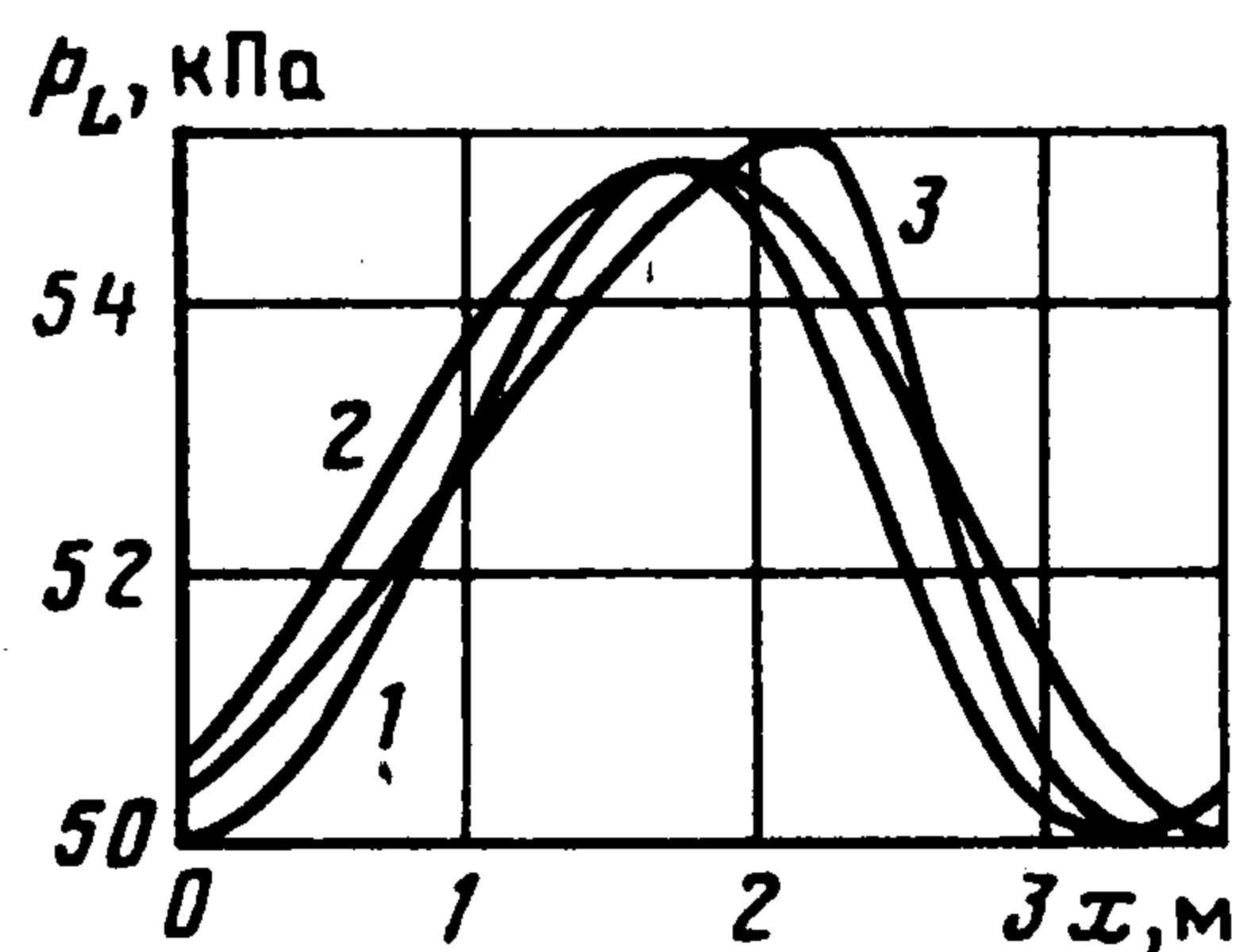
$$\rho = \frac{1}{6(3\kappa+1)^5(3\kappa+2)(\kappa+1)^{1/2}}(27\kappa^3 + 36\kappa^2 - 4)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

остальные коэффициенты определяются из (4.8).

Если в первом уравнении (4.10) не учитывать члены порядка ϵ , то уравнения взаимодействия будут состоять из уравнения Хопфа для L и нелинейного уравнения Шредингера с членами взаимодействия для S

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - \gamma S^2 S^* = i \mu L \frac{\partial S}{\partial \xi} + i \nu S \frac{\partial L}{\partial \xi} + \tilde{\delta} L^2 S \quad (4.11)$$

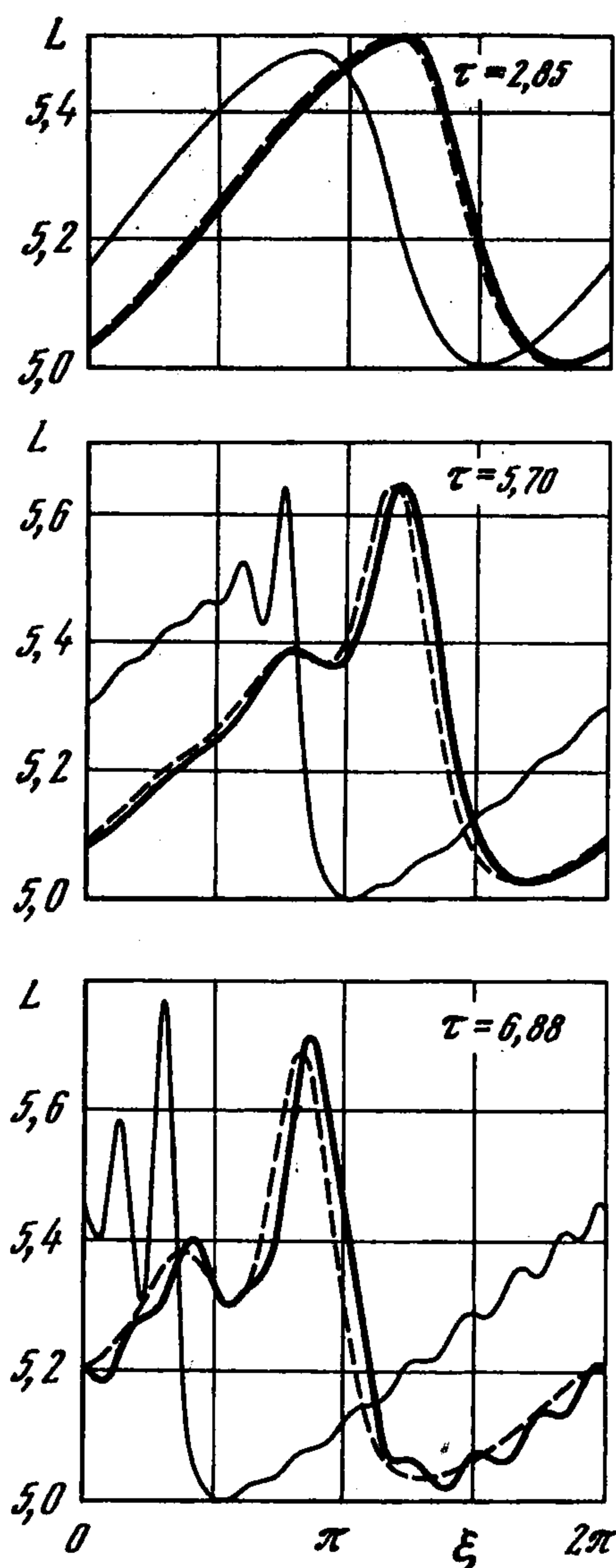
Уравнение Хопфа (первое уравнение (4.11)) описывает процесс образования ударной волны из первоначально гладкого профиля. Поэтому, если не учитывать члены порядка ϵ в первом уравнении (4.10), то в некоторый момент времени производная L по ξ станет бесконечной. Так как при образовании ударной волны члены порядка ϵ , содержащие производные L и S по ξ , становятся большими, то они начинают существенно влиять на динамику длинно-коротковолнового взаимодействия.

5. Численное исследование вырожденного резонансного взаимодействия. Случай $(l, s) = (2, 3/2)$. Численное интегрирование системы уравнений (4.7) проводится с использованием трехслойной явной схемы с четвертым порядком аппроксимации по координате, предложенной ранее [20] для численного решения уравнения КдВ. При интегрировании применяются периодические краевые условия и начальное условие вида

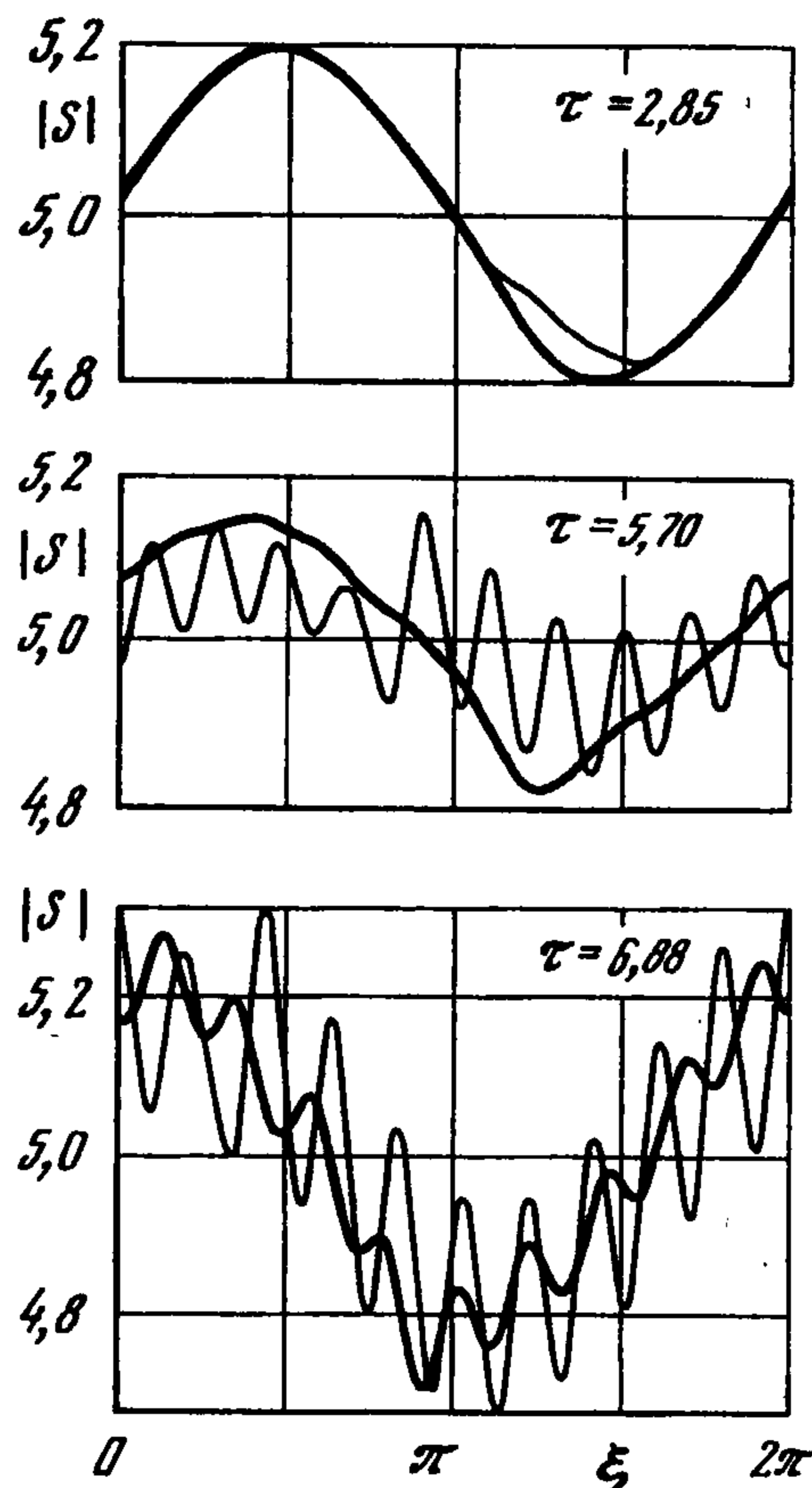
$$L = L_0(1 + \Delta L[1 - \cos \xi]), \quad S = S_0 \quad (5.1)$$

где $L_0 = 5$, $\Delta L = 0,25$, $S_0 = 5$.

На фиг. 3 показаны распределения огибающей коротковолнового возмущения $|p_s|$ и профиля длинноволнового возмущения p_L ($\epsilon = 0.1$) по пространственной переменной x для



Фиг. 6



Фиг. 7

воды с воздушными пузырьками радиуса $a_0 = 1$ мм при нормальных условиях, причем параметры смеси удовлетворяют условию резонансного вырождения ($\Omega_s = 55$ кГц, $\alpha_{g0} = 3,02 \cdot 10^{-4}$). Кривые 1–7 соответствуют следующим моментам времени: $t = 0,019$ с; $0,171$ с; $0,209$ с; $0,294$ с; $0,437$ с; $0,532$ с; $0,722$ с. Видно, что для огибающей коротковолнового возмущения формируется синусоидальный профиль. До момента $t = 0,294$ с амплитуда этого профиля увеличивается, затем она резко снижается при $t = 0,437$ с, и через некоторое время опять возрастает, достигая максимального значения при $t = 0,722$ с (фиг. 3, а). При синусоидальных начальных условиях нет воздействия короткой волны на длинную, и длинноволновое возмущение распространяется в согласии с уравнением КдВ (4.9). Важно отметить, что увеличение амплитуды короткой волны происходит при образовании второго горба в профиле длинной волны (двухсолитонное решение уравнения КдВ), а уменьшение — при его исчезновении (фиг. 3, б). Из этого можно заключить, что в период формирования двугорбового профиля наблюдается значительный переток энергии от длинной волны к короткой, из-за чего, несмотря на сильную дисперсию, возрастает амплитуда короткой волны. Проходя через периоды увеличения и спада, эта амплитуда в целом растет, что видно, например, при сравнении распределения короткой волны для времен $t = 0,209$ с и $t = 0,722$ с (кривые 3 и 7 на фиг. 3, а). Следует отметить существенную малость и кратковременность нелинейных искажений коротковолнового профиля. Наиболее сильно они проявляются при уменьшении амплитуды короткой волны (см. фиг. 4, где кривые 1–4 соответствуют $t = 0,4557$ с; $0,4652$ с; $0,4747$ с; $0,4842$ с).

Полученным результатам можно дать следующую физическую интерпретацию. Предположим, что в пузырьковой жидкости возбуждаются немонахроматические высокочастотные колебания, а также низкочастотные колебания. В общем случае эти возмущения будут распространяться в среде в виде волнового пакета коротких волн и длинной волны. При выполнении условия длинно-коротковолнового резонанса между ними возникает взаимодействие, подчиняющееся уравнениям Захарова (3.5). Известно, что при указанных выше

начально-краевых условиях эта система описывает образование солитонной структуры [21]. Поэтому при резонансе форма короткой волны подвергается значительным нелинейным искажениям. Однако в пузырьковой жидкости существует выделенная частота короткой волны – частота "вырождения", при которой резонансное взаимодействие имеет совершенно иной характер. Во-первых, длинная волна распространяется независимо от короткой и подчиняется уравнению КдВ. Во-вторых, благодаря воздействию длинной волны на короткую формируется синусоидальный профиль коротковолновой огибающей, который в процессе эволюции испытывает лишь ничтожные и кратковременные нелинейные искажения. Это означает, что практически вся энергия короткой волны будет содержаться в ее первой гармонике. В-третьих, из-за перетока энергии от длинной волны в короткую происходит рост амплитуды короткой волны.

Случай $(l, s) = (1, 1)$. Численное интегрирование уравнений (4.10) производили с применением той же численной схемы и краевых условий, что и для уравнений (4.7). Начальное условие брали в виде (5.1), где $L_0 = 5$, $\Delta L = 0,05$, $S_0 = 5$.

На фиг. 5 показано (при тех же значениях параметров, что и для модели (4.7)) распределение длинноволнового возмущения p_L по x в моменты времени $t = 0$ с; 0,133 с; 0,285 с (кривые 1, 2, 3 соответственно). Видно, что длинная волна распространяется с укручением своего профиля, так как без учета членов порядка ϵ уравнение для длинной волны представляет собой уравнение Хопфа (первое уравнение (4.11)).

На фиг. 6 и 7 в безразмерном виде показана дальнейшая эволюция длинноволновых и коротковолновых возмущений при $\epsilon = 0,1$ (жирная линия), $\epsilon = 0,01$ (тонкая линия). Ударный профиль для длинной волны не формируется. Это связано с вкладом членов порядка ϵ первого уравнения (4.10). При этом, если не генерировать коротковолновые возмущения ($S_0 = 0$), то длинная волна будет распространяться в виде асимптотически устойчивой волны (фиг. 6, штриховая линия). В случае ненулевой коротковолновой амплитуды ($S_0 \geq 0$) происходит разрушение длинноволнового профиля. С уменьшением ϵ это разрушение становится еще более значительным. Аналогичный процесс наблюдается и для короткой волны (фиг. 7).

Таким образом, длинно-коротковолновое взаимодействие в случае резонансного вырождения и равенства порядков малостей длинноволновых и коротковолновых возмущений $(l, s = 1, 1)$ приводит к развитию нелинейной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // *Phil. Mag.* 1895. V. 5. № 39. P. 422–443.
2. Gardner C.S., Morikawa G.K. Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves. New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., Res. Rep. TID-6184. 1960.
3. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // *J. Phys. Soc. Japan.* 1972. V. 33. № 3. P. 805–811.
4. Захаров В.Е. Коллапс лэнгмюровских волн. // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 62. Вып. 5. С. 1745–1759.
5. Benney D.J. Significant interactions between small and large scale surface waves // *Stud. Appl. Math.* 1976. V. 55. № 2. P. 93–106.
6. Benney D.J. A general theory for interactions between short and long waves. // *Stud. Appl. Math.* 1977. V. 56. № 1. P. 81–94.
7. Djordjevic V.D., Redekopp L.G. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Pt 4. P. 703–714.
8. Davydov A.S. Solitons in molecular systems // *Phys. Scr.* 1979. V. 20. № 3–4. P. 387–394.
9. Нугматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
10. Wijngaarden L. van. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. P. 465–474.
11. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. 237 с.
12. Гумеров Н.А. О квазимонохроматических слабонелинейных волнах в пузырьковой среде с малой диссипацией // *ПММ.* 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 58–67.
13. Гаврилюк С.Л. Уравнения модуляций для пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой // *ПМТФ.* 1989. № 2. С. 86–92.

14. *Gumerov N.A.* Equations describing the propagation of nonlinear modulation waves in bubbly liquids // *Bubble Dynamics and Interface Phenomena*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 131–140.
15. *Заболотская Е.А.* Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа // *Тр. ИОФАН*. 1989. Т. 18. С. 121–155.
16. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
17. *Иорданский С.В.* Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. // *ПМТФ*. 1960. № 3. С. 102–110.
18. *Кедринский В.К.* Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // *ПМТФ*. 1968. № 4. С. 29–34.
19. *Jeffrey A., Kawahara T.* Asymptotic methods in nonlinear wave theory. London: Pitman, 1982. 256 p.
20. *Березин Ю.А.* Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1977. 109 с.
21. *Ma Y.-C.* The complete solution of the long-wave–short-wave resonance equations // *Stud. Appl. Math.* 1978. V. 59. № 3. P. 201–221.

Уфа
e-mail: damir-k@anrb.ru

Поступила в редакцию
29.XII.1998