

УДК 533.6

© 1999 г. А.Н. Крайко

СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОТРАЖЕНИЯ "ГРАНИЧНОЙ" ХАРАКТЕРИСТИКИ

В главном порядке исследуется структура одномерного нестационарного сферически симметричного течения разрежения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в окрестности точки отражения "граничной" C^- -характеристики. Последняя отделяет покоящийся газ от течения, вызванного выдвиганием ограничивающего газ поршня. В плоскости rt , где r – расстояние от центра симметрии, а t – время, точка отражения, совпадающая с точкой прихода на ось t граничной характеристики, совмещена с началом координат. Начальная скорость поршня может быть нулевой (при положительном ускорении) или конечной. При выдвигании двух симметричных плоских поршней на C^- -характеристике в начале координат, которое в этом случае лежит на плоскости симметрии, "выводящие" производные от всех параметров течения конечны. При выдвигании цилиндрического и сферического поршня на C^- -характеристике в начале координат выводимая производная от давления (скорости) газа обращается в минус(плюс)-бесконечность хотя и без пересечения одноименных характеристик [1–4].

Бесконечный рост производных по модулю, независимо от их знака, подчас рассматривается [5, 6] как свидетельство "градиентной катастрофы", которая, разрушая непрерывное течение, делает невозможным введенное ранее [7] и использованное в дальнейшем [8–10] изэнтропическое расширение (и сжатие) газа "из покоя в покой". Выполненное ниже исследование, представляя самостоятельный интерес, подтверждает возможность такого непрерывного изэнтропического процесса. Аналогичное исследование для цилиндрически-симметричного течения разрежения было проведено ранее [11].

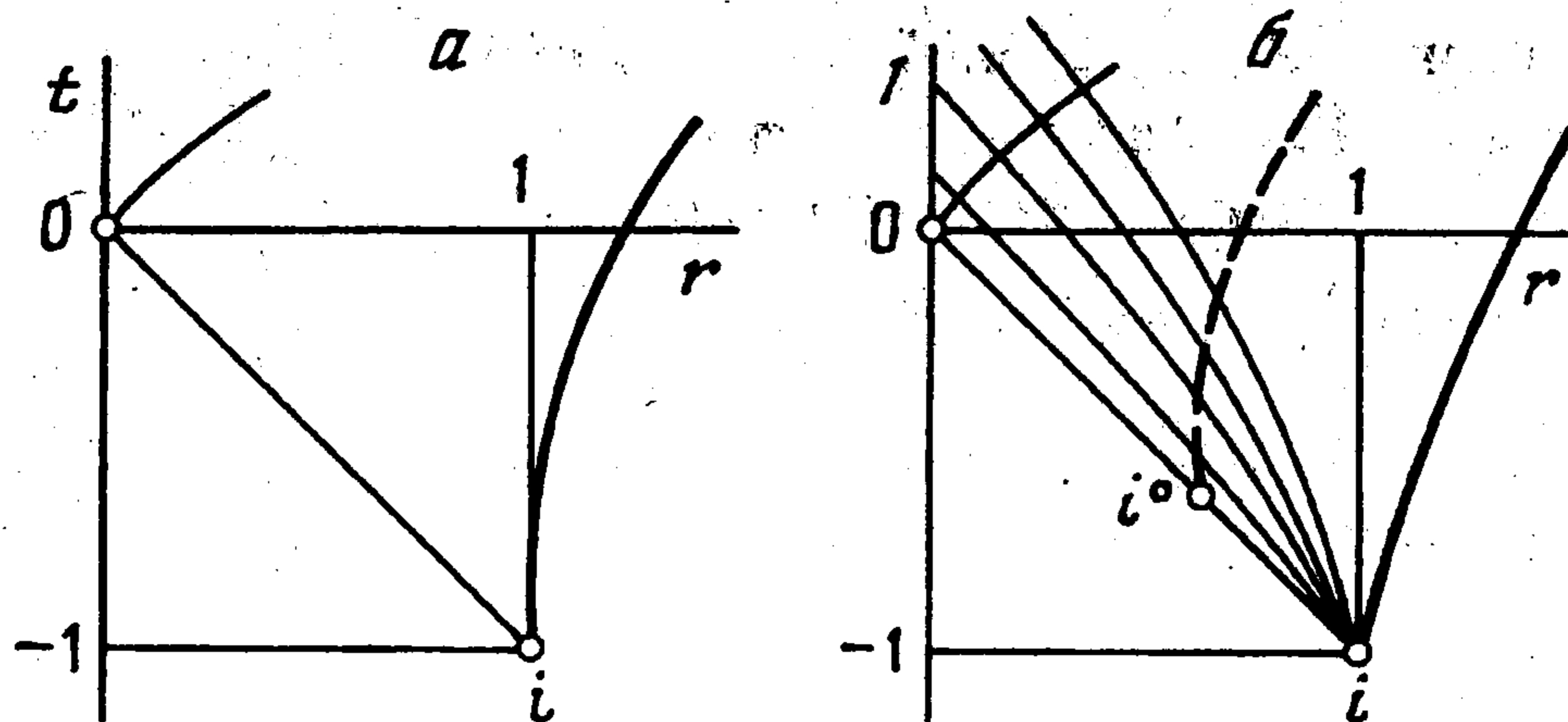
1. Поведение параметров вблизи граничной характеристики. Пусть p – давление, s и h – удельные энтропия и энтальпия, $\rho = \rho(p, s)$ – плотность, a – скорость звука, v – единственная (радиальная) компонента скорости газа. Исследуются безударные течения, начинающиеся из состояния "однородного покоя" ($v \equiv 0$, $p \equiv p_0$, $s \equiv s_0$). В силу уравнения сохранения энтропии в частице и начальной однородности энтропии $s \equiv s_0$ не только в начальный момент, а уравнения неразрывности и движения [12] можно записать в форме

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial r} + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad a^{-2} = \rho_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (1.1)$$

Кроме траекторий частиц система (1.1) имеет два семейства характеристик

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \pm a$$

где верхний (нижний) знак отвечает $C^+(C^-)$ -характеристикам. Как и ранее [3, 11], воспользуемся полухарактеристическими переменными $r\xi$ с ξ , постоянной вдоль C^- -харак-



Фиг. 1

теристик. В таких переменных первые два уравнения системы (1.1) и уравнение для t принимают вид

$$h_r - av_r + \frac{2a^2v}{(v-a)r} = 0, \quad h_\xi + av_\xi + (a-v)(vv_r + h_r)t_\xi = 0, \quad t_r = \frac{1}{v-a} \quad (1.2)$$

$$\varphi_r = (\partial\varphi/\partial r)_\xi, \quad \varphi_\xi = (\partial\varphi/\partial\xi)_r$$

На фиг. 1, а и б траектории поршня $r = R(t)$, начинающего движение из точки i , изображены жирными, а характеристики – тонкими линиями. Граничная C^- -характеристика $i0$ (ГХ) отделяет возмущенный газ над ней от однородного покоящегося газа под ней. Параметрам однородного покоящегося газа приписывается индекс 0, а отличным от них величинам в точке i – индекс i . В частности, $r_i = R(t_i)$ – начальная координата поршня, а $w_i = R''(t_i)$ – его начальное ускорение. Прямолинейная C^- -характеристика $i0$ является линией разрыва производных $t_\xi, v_\xi, h_\xi, \dots$ при непрерывных и равных нулю $v, v_r, h_r, \dots$. Все переменные – безразмерные с $r_i^\circ, r_i^\circ/a_0^\circ, a_0^\circ, \rho_0^\circ, a_0^{\circ 2}, \rho_0^\circ a_0^{\circ 2}$ и $a_0^{\circ 2}/r_i^\circ$ в качестве масштабов длины, времени, скорости, плотности, удельной энтальпии, давления и ускорения поршня. "Градус" приписан размерным величинам. В соответствии с этим $r_i = 1, t_i = -1, a_0 = \rho_0 = 1$. Для совершенного газа $h_0 = 1/(\gamma - 1)$, а $p_0 = 1/\gamma$, где γ – показатель адиабаты. Фиг. 1, а отвечает выдвиганию поршня с нулевой начальной скоростью и с начальным ускорением $w_i > 0$, а фиг. 1, б – выдвиганию поршня с конечной начальной скоростью и с бесконечным ускорением. Вторая возможность получается из первой предельным переходом $w_i \rightarrow \infty$, а первая из второй – переходом на фиг. 1, б от траектории поршня с пучком C^- -характеристик в точке i к траектории частицы, пересекающей ГХ в произвольной точке i° с $0 < r_{i^\circ} < r_i = 1$.

При $t \geq 0$ из точки 0 выходит "отраженная" C^+ -характеристика (ОХ), на которой рвутся выводные производные. Скорость ОХ в точке 0 равна $a_0 = 1$.

При $w_i < \infty$ в области возмущенного газа положим $\xi = t - t_i = t + 1$ в точке выхода данной C^- -характеристики с траектории поршня. При таком выборе газ покоится при $\xi < 0$ и возмущен при $\xi > 0$, причем

$$t_{\xi i} = 1, \quad v_{\xi i} \equiv w_i = R''(t_i) \quad (1.3)$$

Над ГХ (при $\xi = +0$) в силу второго уравнения из (1.2) и принятого способа обезразмеривания

$$h_\xi = -v_\xi \quad (1.4)$$

Продифференцировав первое уравнение из (1.2) по ξ , а второе по r , исключив из них $h_{\xi r}$, а с помощью (1.4) – h_ξ , найдем, что $v_{\xi r} = -v_\xi/r$ при $\xi = +0$. Проинтегрировав это уравнение с учетом начального условия из (1.3), получим

$$v_\xi = w_i/r \quad (1.5)$$

Аналогично уравнение для t_ξ при $\xi = 0$, получается дифференцированием по ξ третьего уравнения из (1.2) с учетом того, что $a = a(p, s)$ и $s \equiv s_0$. После исключения h_ξ с помощью (1.4) и подстановки v_ξ из (1.5) оно принимает вид

$$t_{\xi r} = -\alpha w_i / r; \quad \alpha = \omega_{pp0} / 2, \quad \omega_{pp} = (\partial^2 \omega / \partial p^2)_s \quad (1.6)$$

где $\omega = 1/\rho$ – удельный объем. Для совершенного газа $\alpha = (\gamma + 1)/2$. Интегрирование уравнения (1.6) с учетом условия для t_ξ из (1.3) дает известную формулу [1, 3, 4]

$$t_\xi = 1 - \alpha w_i \ln r \quad (1.7)$$

Согласно соотношениям (1.6) и (1.7) для "нормального" газа, у которого $\omega_{pp} > 0$, при выдвигании поршня ($w_i > 0$) производные $h_\xi \rightarrow -\infty$, $v_\xi \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, но t_ξ из (1.7) на ГХ в нуль не обращается. Пересечению C^- -характеристик отвечают точки плоскости rt , в которых якобиан $D(r, t)/D(r, \xi) \equiv t_\xi = 0$. Поэтому, как уже отмечалось, на ГХ градиентная катастрофа не происходит.

В силу (1.4), (1.5) и (1.7) на ГХ при $\xi = +0$ имеем

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r = -\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_r = -\frac{v_\xi}{t_\xi} = \frac{-w_i}{r(1 - \alpha w_i \ln r)} \approx \frac{1}{\alpha r \ln r} \quad (1.8)$$

Последнее равенство справедливо в достаточно малой окрестности начала координат для значений r , удовлетворяющих условию

$$r \ll r_* = \exp(-1/(\alpha w_i)) \quad (1.9)$$

Дальнейшее исследование проводится именно для таких r . В случае выдвигания поршня с конечной начальной скоростью ($v_i > 0$, $w_i = \infty$) в (1.9) $r_* = 1$. Это – максимальная величина r_* .

При выполнении условия (1.9) выражения, аналогичные последней формуле из (1.8), справедливы на $i=0$ для частных производных по времени от всех параметров газа, в частности, от p и a . Согласно этому в окрестности начала координат, между ГХ и ОХ, т.е. при $-1 \leq \tau \equiv t/r \leq 1$ и для r , удовлетворяющих условию (1.9), будем искать v , h и a в "главном порядке" в форме

$$v(r, \tau) \approx \frac{V(\tau)}{\alpha \ln r}, \quad h(r, \tau) \approx h_0 + \frac{H(\tau)}{\alpha \ln r}, \quad a(r, \tau) \approx 1 + \frac{A(\tau)}{\alpha \ln r} \quad (1.10)$$

Согласно определению $\tau = -1$ на ГХ, где $v = 0$, $h = h_0$, $a = 1$, а при r из (1.9) "выводящие" частные производные от v и h даются последним равенством в формуле (1.8). Поэтому, предположив, что в главном порядке равенства (1.10) допускают дифференцирование по r и по t , получим такие начальные условия для V и H :

$$V(-1) = H(-1) = 0, \quad -V'(-1) = H'(-1) = 1 \quad (1.11)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по τ .

2. Решение между граничной характеристикой и осью времени. Определив из соотношений (1.10) необходимые частные производные и подставив их в уравнения (1.1), найдем, что функции $V(\tau)$ и $H(\tau)$ при $-1 \leq \tau \leq 1$ подчиняются уравнениям

$$H' - \tau V' + 2V = 0, \quad V' - \tau H' = 0 \quad (2.1)$$

Подставив H' из первого уравнения этой системы во второе, придем к уравнению, решение которого, удовлетворяющее двум условиям (для V и V') из (1.11), имеет вид: $V(\tau) = (\tau^2 - 1)/2$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (2.1) и проинтегрировав получившееся в результате уравнение с учетом условия для H из (1.11), найдем, что $H(\tau) = \tau + 1$. Условие для H' из (1.11) удовлетворяется авто-

матически как следствие выполнения при $\tau = -1$ соответствующих условий для V и V' и уравнений (2.1). Возможность же удовлетворить при решении дифференциального уравнения первого порядка для V двум условиям из (1.11) есть следствие того, что для этого уравнения отвечающая ГХ точка $\tau = -1, V = 0$ – узел. Узлом является и точка $\tau = 1, V = 0$, отвечающая ОХ, но это – результат решения.

В силу полученных выражений для V и H и изэнтропичности течения в малой в смысле (1.9) окрестности начала координат при $-1 \leq \tau \leq 1$ для v, h, p и a в главном порядке справедливы представления

$$v \approx \frac{\tau^2 - 1}{2\alpha \ln r}, \quad h \approx h_0 + \frac{\tau + 1}{\alpha \ln r}, \quad p \approx p_0 + \frac{\tau + 1}{\alpha \ln r}, \quad a \approx 1 + \frac{(\alpha - 1)(\tau + 1)}{\alpha \ln r} \quad (2.2)$$

Над ОХ решение (2.2) несправедливо уже потому, что дает бесконечные значения параметров на оси t . Последнее понятно, ибо при его получении не использовалось условие симметрии в центре заполненного газом сферического объема: $v = 0$ при $r = 0$. В силу этого условия ОХ при непрерывных параметрах будет, как видно из дальнейшего, линией разрыва их выводящих производных. Чтобы учесть эти особенности решения, в области между ОХ и осью t перейдем от τ к $\eta = 1/\tau = r/t$, а распределения v, h и a для $0 \leq \eta \leq r$ из (1.9) в главном порядке будем искать в форме

$$v(r, \eta) \approx \frac{V^\circ(\eta)}{\alpha \ln t}, \quad h(r, \eta) \approx h_0 + \frac{H^\circ(\eta)}{\alpha \ln t}, \quad a(r, \eta) \approx 1 + \frac{A^\circ(\eta)}{\alpha \ln t} \quad (2.3)$$

На ОХ $\eta = \tau = 1$, а $t = r$. Поэтому согласно формулам (2.2) параметры на ней будут непрерывны, если потребовать выполнения условий

$$V^\circ(1) = 0, \quad H^\circ(1) = 2 \quad (2.4)$$

Непрерывность иных, отличных от энтальпии термодинамических параметров следует при выполнении условий (2.4) из непрерывности энтальпии и постоянства энтропии. Соответствующие линейные связи между малыми приращениями энтальпии, давления и скорости звука (при постоянной энтропии) уже использовались при получении формул для p и a из (2.2).

Поступая так же, как при получении системы (2.1), придем к уравнениям

$$\eta \dot{V}^\circ - \eta^2 \dot{H}^\circ + 2V^\circ = 0, \quad \dot{H}^\circ - \eta \dot{V}^\circ = 0 \quad (2.5)$$

в которых точка означает дифференцирование по η .

Подставив $\dot{H}^\circ$ из второго уравнения системы (2.5) в первое, придем к уравнению, решение которого, удовлетворяющее первому условию из (2.4), имеет вид: $V^\circ(\eta) = C(\eta^2 - 1)/\eta^2$. Постоянная интегрирования C появилась в формуле для V° благодаря тому, что точка $\eta = 1, V^\circ = 0$ – узел. В силу упоминавшегося выше условия симметрии $C = 0$ и $V^\circ \equiv 0$. Таким образом, в малой окрестности начала координат над ОХ "в главном порядке" газ покоится. Подставив $V^\circ \equiv 0$ в любое из уравнений (2.5), получим $\dot{H}^\circ = 0$. Следовательно, в силу второго условия из (2.4) $H^\circ \equiv 2$. С учетом этого аналогично формулам (2.2) найдем, что в малой окрестности начала координат в смысле (1.9) над ОХ (при $0 \leq \eta \leq 1$) для v, h, p и a в главном порядке справедливы представления

$$v \approx 0, \quad h \approx h_0 + \frac{2}{\alpha \ln t}, \quad p \approx p_0 + \frac{2}{\alpha \ln t}, \quad a \approx 1 + \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha \ln t} \quad (2.6)$$

При фиксированном r поведение скорости C^+ -характеристик $D = a + v$ зависит от величины $\alpha = \omega_{pp0}/2$. Если $\alpha > 1$, что, в частности, справедливо для совершенного газа, то, как следует из (2.2) и (2.6), D при пересечении ОХ в направлении роста t

монотонно убывает. Следовательно, S^+ -характеристики здесь расходятся, обеспечивая, как и в задаче о выдвигании цилиндрического поршня [11], непрерывность течения. Отличие от цилиндрического случая состоит в том, что там выводящие производные от D при $\tau = 1$ обращаются в бесконечность, в силу чего отраженная волна разрежения получается "короткой". Здесь эти производные конечны.

Если от v, p и других параметров перейти к их "нормированным" приращениям: $\delta\phi = (\phi - \phi_0)K_\phi(\alpha)$ с $K_v(\alpha) = K_p(\alpha) = K_h(\alpha) = \alpha$ и с $K_a(\alpha) = \alpha/(\alpha - 1)$, то, как следует из формул (2.2) и (2.6), их поля не зависят от "термодинамики" газа. Согласно полученным ранее результатам [11] в окрестности "начала координат" такой же автомодельностью обладают течения разрежения с плоскими и цилиндрическими волнами. В них, однако, множители K_ϕ зависят не только от α , но и от начального ускорения поршня w_i . Независимость от w_i сферически-симметричного течения разрежения в малой окрестности начала координат аналогична автомодельности решения Гудерлея о схлопывании сферических и цилиндрических ударных волн [13–15].

При движении с нулевой начальной скоростью и с отличным от нуля (отрицательным) ускорением сферического поршня пересечение одноименных характеристик с ГХ и возникновение на ней идущей к центру ударной волны происходит для любых $w_i < 0$, а при движении цилиндрического поршня то же самое происходит, если $w_i < w_* < 0$, где w_* – некоторая "критическая" величина ускорения. При движении с конечной скоростью распространяющаяся к центру или к оси симметрии ударная волна, естественно, образуется сразу в начальной точке траектории поршня. Во всех перечисленных случаях интенсивность образовавшейся ударной волны при $r \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Благодаря этому течение вблизи точки прихода ударной волны в центр или на ось симметрии ($r = 0, t = t^S < 0$), содержащее отраженный скачок, описывается не зависящим от "предыстории" (от значений v_i и w_i) упомянутым выше автомодельным решением. Как и в рассматриваемом сферически-симметричном течении разрежения, в таких течениях сжатия предыстория определяет лишь значения r и t – размеры области автомодельности в окрестности точки: $r = 0, t = t^S$. При этом исключительными (неавтомодельными вплоть до $r = 0$, правда, не по закону нарастания интенсивности ударной волны, а по распределениям параметров за ней) будут течения сжатия, отвечающие специальным траекториям поршня. Последние должны обеспечить фокусировку в той же точке: $r = 0, t = t^S$ пучка догоняющих скачок S^- -характеристик.

3. Эволюция решений с изменением типа симметрии. Используя формулы (2.2) и (2.6) и аналогичные результаты, полученные для случаев плоской и цилиндрической симметрии [11], сравним распределения δv и δp в малой окрестности начала координат при выдвигании плоского, цилиндрического и сферического поршней.

В случае симметричного выдвигания двух плоских поршней в указанной окрестности при соответствующим образом введенных нормирующих множителях K_v и K_p -функциях α и w_i в главном порядке имеем [11]

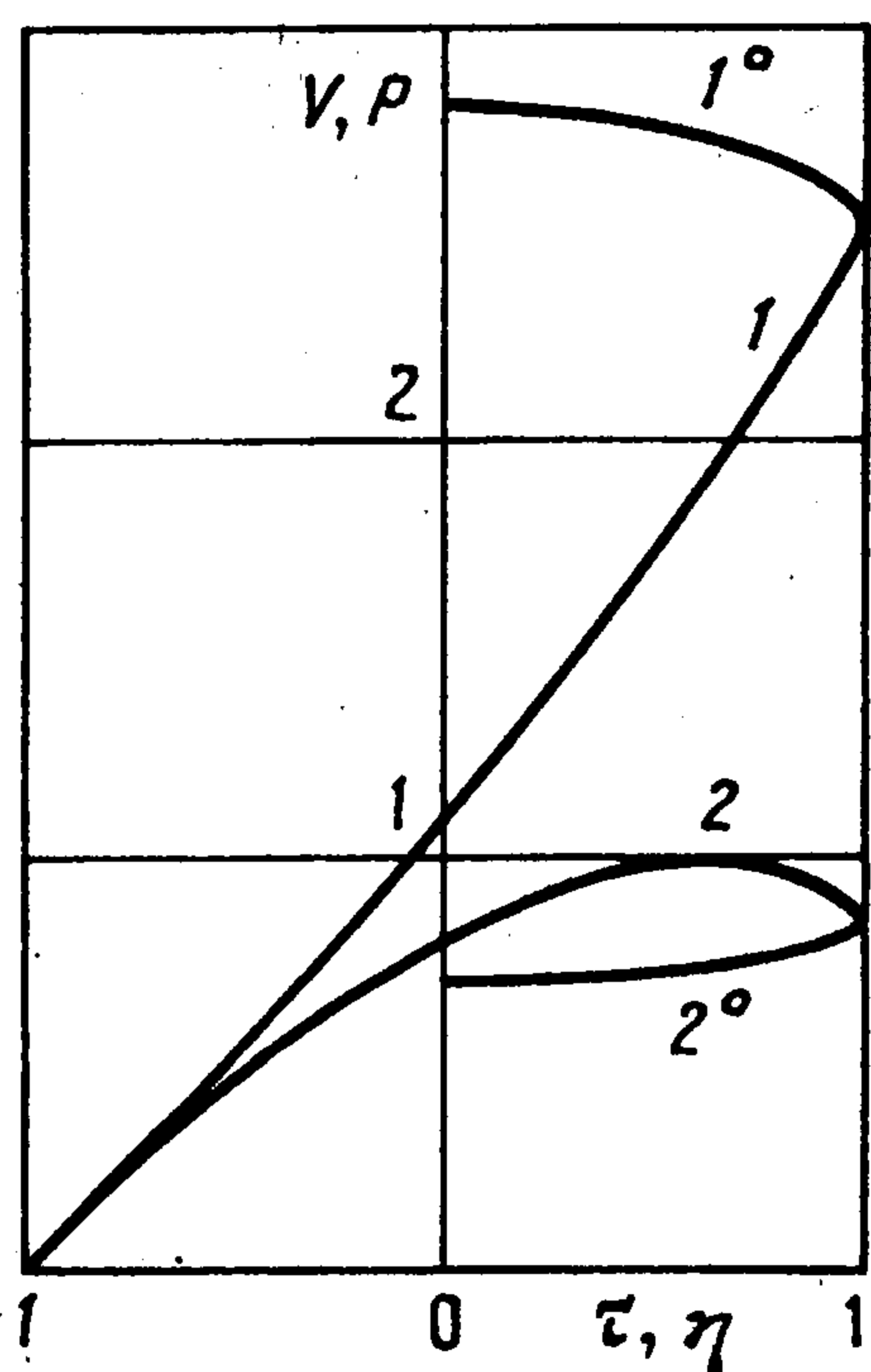
$$\delta p \approx (1 + \tau)r = r + t, \quad \delta v \approx -(1 + \tau)r = -(r + t) \quad (-1 \leq \tau \leq 1) \quad (3.1)$$

$$\delta p \approx 2t, \quad \delta v \approx -2r \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

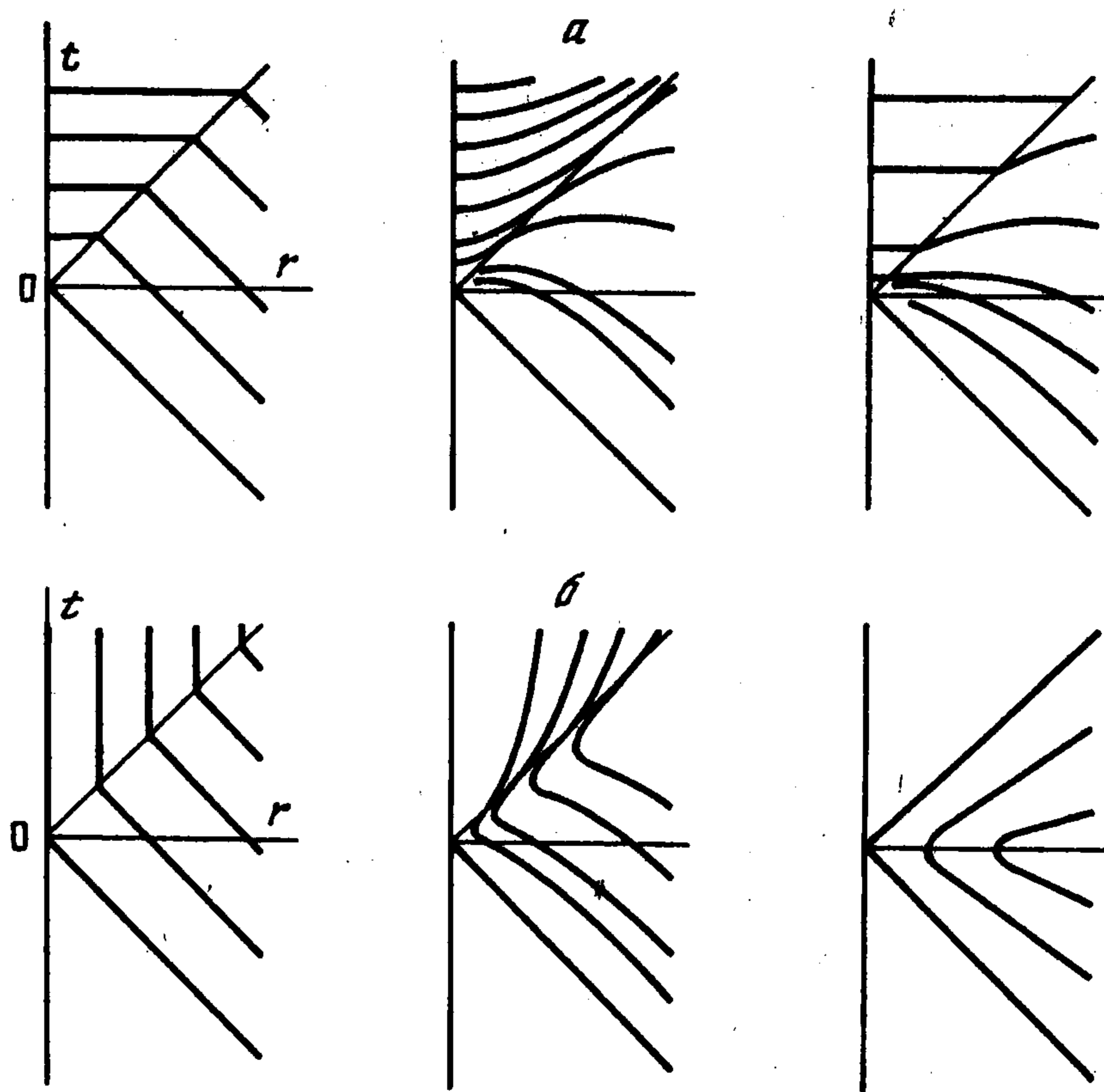
Аналогично, переписав в принятых выше обозначениях полученные ранее результаты [11] для выдвигания цилиндрического поршня, будем иметь

$$\delta p \approx P(\tau)\sqrt{r}, \quad \delta v \approx -V(\tau)\sqrt{r} \quad (-1 \leq \tau \leq 1) \quad (3.2)$$

$$\delta p \approx P^\circ(\eta)\sqrt{t}, \quad \delta v \approx -\eta V^\circ(\eta)\sqrt{t} \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

с функциями $P(\tau)$, ... из [11], представленными на фиг. 2. При этом во второй формуле для δv в (3.2) исправлена описка, допущенная в [11] при введении, но не при вычислении $V^\circ(\eta)$. На фиг. 2 кривые 1 и 2 дают функции $P(\tau)$ и $V(\tau)$, а кривые 1° и 2° – функции $P^\circ(\eta)$ и $V^\circ(\eta)$.

В окрестности начала координат изолинии давления и скорости, отвечающие плоскому случаю, в силу формул (3.1) – параллельные прямые, претерпевающие излом на ОХ. Они показаны на левых картинках фиг. 3, а и б соответственно. На фиг. 3 изолинии, в том числе, ГХ и верхняя часть оси ординат, – жирные сплошные линии, а ОХ – тонкая прямая.

Согласно формулам (3.2) для δp при выдвигании цилиндрического поршня в окрестности начала координат на изобарах

$$\frac{dt}{dr} = \frac{2\tau P' - P}{2P'} \quad (-1 \leq \tau \leq 1), \quad \frac{dt}{dr} = \frac{2\dot{P}^\circ}{2\eta \dot{P}^\circ - P^\circ} \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

Так как правые части полученных выражений – функции только τ или η , то все изобары пересекают каждый луч, идущий из начала координат, под одинаковым углом. Качественно это свойство учтено на средней картинке фиг. 3, а, построенной с учетом поведения кривых 1 и 1° фиг. 2.

Аналогично в силу формул (3.2) на линиях $\delta v = \text{const}$ имеем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{2\tau V' - V}{2V'} \quad (-1 \leq \tau \leq 1), \quad \frac{dt}{dr} = \frac{2(V^\circ + \eta \dot{V}^\circ)}{\eta(V^\circ + 2\eta \dot{V}^\circ)} \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

Изолинии скорости, построенные с учетом поведения кривых 2 и 2° фиг. 2, приведены на средней картинке фиг. 3, б. Согласно фиг. 2 и выражениям, полученным ранее [11], при $\tau = \eta = 1$ производные, входящие в полученные выше формулы для наклона изобар и линий постоянной скорости, обращаются в бесконечность. Поэтому изображенные на средних картинках фиг. 3 изолинии пересекают ОХ, касаясь ее.

Согласно (2.2) при выдвигании сферического поршня в окрестности начала координат при $-1 \leq \tau \leq 1$ вдоль изобар

$$\frac{dt}{dr} = \tau + \frac{\tau + 1}{\ln r}$$

В малой окрестности начала координат $\ln r < 0$, а $|\ln r| \gg 1$. Поэтому в главном порядке под ОХ и при подходе к ней снизу наклон изобары слегка меньше (с учетом знака) наклона луча $t = \tau r$, проходящего в ту же точку. В том же порядке над ОХ в силу (2.6) изобары – отрезки прямых, параллельные оси абсцисс. Качественно эти особенности изобар сферически-симметричного течения разрежения передает правая картинка фиг. 3,а.

Аналогично в силу (2.2) вдоль изолиний скорости при выдвигании сферического поршня для $-1 \leq \tau \leq 1$, т.е. между ГХ и ОХ

$$\frac{dt}{dr} = \tau + \frac{\tau^2 - 1}{2\tau \ln r}$$

В силу этой формулы наклон изолиний скорости над осью r , где $(\tau^2 - 1)/\tau < 0$, больше, а под осью r , где $(\tau^2 - 1)/\tau > 0$, меньше наклона лучей $t = \tau r$. Наклоны изолиний скорости и лучей $t = \tau r$ различаются сильно лишь в малой окрестности оси абсцисс, при приближении к которой наклон изолиний стремится к бесконечности. Качественно эти особенности изолиний скорости отражает правая картинка фиг. 3,б. Напомним, что согласно (2.6) в главном порядке над ОХ $\delta v = 0$.

При очевидном отличии изолиний течений разрежения с плоской, цилиндрической и сферической симметрией их эволюция при переходе от левых к правым картинкам фиг. 3,а и б представляется естественной. Последнее важно, ибо найденные выше и в [11] распределения параметров опираются на предположение о дифференцируемости представлений (1.10), (2.3) и их аналогов в [11]. В случае цилиндрически-симметричного течения результаты [11] подтверждаются выполненным в [16] анализом решения обратной задачи. Для значений δr , заданных на полуоси $t > 0$ согласно (3.2), при $\delta r = 0$ для $t < 0$ свойства решений прямой [11] и обратной [16] задач идентичны.

Так, для указанного распределения δr в [16], как и в [11], в первом приближении на ОХ выводящие производные, будучи непрерывны, имеют логарифмическую особенность. В следующей итерации она "гасится" такой же особенностью производных от скорости S^+ -характеристик D . В то же время исследованная в [16] сферически-симметричная обратная задача с заданным априори на полуоси $t > 0$ степенным распределением p в силу (2.6) принципиально отличается от прямой задачи, возникающей при выдвигании поршня.

4. Заключение. Неограниченный рост производных параметров сферически- и цилиндрически-симметричных течений при приближении к точке отражения ГХ от оси t является свойством, которое в общем случае присуще не только этой, но и любой "разрывной" S^- -характеристике. Здесь "разрывной" называется либо характеристика, выходящая из такой точки траектории поршня, в которой рвется его ускорение или скорость, либо характеристика порожденная отражением от траектории поршня S^+ -характеристики, несущей разрывы первых или вторых производных параметров. Очевидно, что такие разрывные S^- -характеристики являются в указанном смысле исключительными в отличие от континуума S^- -характеристик течения разрежения, возникающего при обтекании начального (разгонного) участка траектории поршня, а при конечной начальной скорости поршня – центрированной волны разрежения. Вдоль них производные от всех параметров при приближении к оси t , естественно, остаются конечными. В задаче изэнтропического разрежения или сжатия из покоя в покой (второе получается из первого изменением знаков скорости и времени) полные производные вдоль прямолинейной замыкающей S^+ -характеристики равны нулю всюду, включая точку ее выхода с оси t . Отсюда сразу следует, что в этой точке производные конечны и под, и над замыкающей S^- -характеристикой начального течения разрежения. Конечность указанных производных при разрывной (по первым выводящим производным) замыкающей S^- -характеристике обеспечивается специальным выбором траектории поршня, которая находится из решения соответствующей задачи Гурса.

Сферически-симметричные разрежение и сжатие из покоя в покой интересны не только сами по себе, но и как один из способов решения обсуждавшейся в [6] задачи о возможности такого же перехода для произвольного пространственного объема. Для организации такого перехода ограниченный непроницаемыми стенками начальный пространственный объем достаточно описать сферой, рассматриваемой затем как сферический поршень. При законе движения стенок идеально гибкого пространственного поршня, которые по рассчитанному сферически симметричному течению удобно определять с использованием лагранжевой переменной [12], конечная форма получившегося объема будет подобна начальной.

Автор признателен С.П. Баутину и А.Ф. Сидорову, дискуссии с которыми стимулировали данное исследование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00659, 99-01-01211 и 96-15-96158).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffrey A. The development of jump discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables // Arch. Rat. Mech. Anal. 1963. V. 14. № 1. P. 27–37.
2. Jeffrey A. On the formation of a converging shock wave in a gas of variable density // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 13. № 1. P. 179–193.
3. Крайко А.Н. О возникновении ударных волн при неравновесных течениях // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 794–803.
4. Сидоров А.Ф. О разрушении потенциальных течений газа, примыкающих к области покоя // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 482–491.
5. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 160 с.
6. Баутин С.П. О возможности изэнтропического перехода от однородного покоя в другое однородное покоящееся состояние идеального газа // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 5. С. 621–624.
7. Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 35–51.
8. Крайко А.Н. О свободном нестационарном расширении идеального газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 155–163.
9. Крайко А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1000–1007.
10. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 1. С. 120–128.
11. Крайко А.Н. Структура течений разрежения и сжатия в окрестности точки отражения "граничной" характеристики // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 187–195.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
13. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1942. Bd. 19. Lfg. 9. S. 302–312.
14. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. N.Y., etc.: Wiley, 1974 = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Chen Yu Why. Flows through nozzles and related problems of cylindrical and spherical waves // Commun. Pure and Appl. Math. 1953. V. 6. № 2. P. 179–229 = Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1954. Вып. 4 (26). С. 3–31; Вып. 5 (27). С. 41–58.

Москва
e-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию
18.II.1999