

УДК 533.6.12

© 1999 г. В.И. Жук

О ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В СВОБОДНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Рассматриваются крупномасштабные структуры в невязкой нелинейной под-области на дне пограничного слоя при дозвуковых и транзвуковых скоростях внешнего потока. Изучается класс локально-невязких возмущений с внутренней линией разрыва тангенциальной скорости, что приводит к появлению свободного члена в правой части уравнения Бенджамина–Оно. Форма упомянутой линии является искомой и определяется из решения системы одномерных нестационарных уравнений, в которую, помимо уравнения Бенджамина–Оно, входит кинематическое условие и уравнение для пристеночной части невязкой подобласти. Построен пример периодического нелинейного решения и сформулированы ограничения на амплитуды, обеспечивающие его реализацию.

1. Оценки масштабов возмущений. Асимптотические разложения в основной части пограничного слоя и в области потенциального потока. Пусть в пограничном слое на расстоянии L^* от передней кромки плоской пластины профили продольной компоненты скорости u^* и плотности газа ρ^* задаются функциями $U_0(Y_m)U_\infty^*$ и $R_0(Y_m)\rho_\infty^*$, где координата по нормали к пластине $Y_m = \varepsilon^{-4} y^* L^{*-1}$, $\varepsilon = Re^{-1/8}$, число Рейнольдса $Re = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^* \rightarrow \infty$. Здесь и ниже звездочками помечены размерные величины, индекс ∞ относится к параметрам невозмущенного потока на бесконечности. Начало декартовой системы координат x^*, y^* совместим с передней кромкой и примем, что набегающий со скоростью U_∞^* , числом Маха M_∞ и коэффициентом вязкости μ_∞^* поток газа направлен по оси x^* .

Если в области пограничного слоя протяженностью $x^* - L^* = \ell L^*$, $\ell \ll 1$ продольная компонента скорости $U_0 U_\infty^*$ возмущена на величину порядка αU_∞^* , $\alpha \ll 1$, то согласно уравнению неразрывности возмущение вертикальной компоненты скорости v^* имеет порядок $\alpha \varepsilon^4 \ell^{-1} U_\infty^*$. Последняя оценка справедлива, когда внутренняя переменная пограничного слоя $Y_m = O(1)$. Индуцируемое ростом толщины вытеснения избыточное давление $p^* - p_\infty^*$ во внешнем по отношению к пограничному слою потенциальном потоке ($Y_m \gg 1$) оценивается как $\alpha \varepsilon^4 \ell^{-1} \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$. С другой стороны, в нелинейной пристеночной части пограничного слоя $Y_m \ll 1$ или, более точно, $Y_m = O(\alpha)$, $U_0 = O(\alpha)$, порядок избыточного давления $\alpha^2 \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ определяется квадратичными членами уравнений движения, а время t^* имеет характерную величину $\ell \alpha^{-1} L^* U_\infty^{*-1}$. Отсюда получаем связь $\ell = \varepsilon^4 \alpha^{-1}$. Заметим, что на коротких расстояниях порядка ℓL^* зависимость функций U_0, R_0 от координаты x^* не существенна и не будет учитываться в дальнейшем.

Таким образом, для рассматриваемого класса возмущенных движений в основной толще пограничного слоя (область 2) разложения параметров газа в асимптотические последовательности имеет вид

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = U_0 + \alpha u_{1m} + \alpha^2 u_{2m} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \alpha^2 v_{1m} + \alpha^3 v_{2m} + \dots \quad (1.1)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = R_0 + \alpha \rho_{1m} + \alpha^2 \rho_{2m} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \alpha^2 p_{1m} + \alpha^3 p_{2m} + \dots$$

а аргументы T, X, Y_m искомых функций $u_{jm} = u_{jm}(T, X, Y_m)$, $v_{jm} = v_{jm}(T, X, Y_m)$, $\rho_{jm} = \rho_{jm}(T, X, Y_m)$, $p_{jm} = p_{jm}(T, X, Y_m)$ ($j = 1, 2, \dots$) определяются выражениями

$$t^* = \frac{L^*}{U_\infty^*} \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{\alpha^2} T \right), \quad x^* = L^* \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{\alpha} X \right), \quad y^* = L^* \varepsilon^4 Y_m \quad (1.2)$$

Подставим выражения (1.1), (1.2) в систему уравнений Навье–Стокса. Тогда несколько первых членов указанного разложения будут удовлетворять уравнениям, в точности совпадающим с выводимыми для промежуточной подобласти трехслойной теории свободного взаимодействия [1–5]. С учетом выписанных ранее [6] членов второго приближения получим

$$u_{1m} = A_1(T, X) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = \frac{\partial A_1}{\partial X} U_0(Y_m)$$

$$\rho_{1m} = A_1(T, X) \frac{dR_0}{dY_m}, \quad p_{1m} = p_{1m}(T, X)$$

$$u_{2m} = -M_\infty^2 U_0 p_{1m} - \int_{-\infty}^X \frac{\partial v_{2m}}{\partial Y_m} dX'$$

$$v_{2m} = -\frac{\partial A_1}{\partial T} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X_m} \frac{dU_0}{dY_m} - Y_m U_0 (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} - \quad (1.3)$$

$$-U_0 \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \int_{Y_m}^{\infty} \left[\frac{1}{R_0(Y'_m) U_0^2(Y'_m)} - 1 \right] dY'_m - \frac{\partial A_2}{\partial X} U_0(Y_m)$$

$$\rho_{2m} = M_\infty^2 R_0 p_{1m} + \frac{1}{2} A_1^2 U_0 \frac{d}{dY_m} \left(U_0^{-1} \frac{dR_0}{dY_m} \right) - \int_{-\infty}^X \frac{\partial R_0}{\partial Y_m} \left(\frac{\partial A_1}{\partial T} + v_{2m} \right) dX'$$

где функции $A_1 = A_1(T, X)$, $A_2 = A_2(T, X)$ произвольны.

Асимптотика решения (1.1) на верхнем крае пограничного слоя следует из (1.3); с учетом предельных свойств $U_0 \rightarrow 1$, $R_0 \rightarrow 1$ находим при $Y_m \rightarrow \infty$:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} \rightarrow 1 - \alpha^2 p_{1m} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} \rightarrow 1 - \alpha^2 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \dots$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \rightarrow 1 + \alpha^2 p_{1m} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} \rightarrow \alpha^2 p_{1m} + \dots \quad (1.4)$$

Что касается внешнего потенциального течения, то в области 1, примыкающей

сверху к пограничному слою, справедливы разложения

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= 1 + \alpha^2 u_{1u} + \alpha^3 u_{2u} + \dots, & \frac{v^*}{U_\infty^*} &= \alpha^2 v_{1u} + \alpha^3 v_{2u} + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= 1 + \alpha^2 \rho_{1u} + \alpha^3 \rho_{2u} + \dots, & \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} &= \alpha^2 p_{1u} + \alpha^3 p_{2u} + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Аргументы T, X искомых функций $u_{ju} = u_{ju}(T, X, Y_u)$, $v_{ju} = v_{ju}(T, X, Y_u)$, $\rho_{ju} = \rho_{ju}(T, X, Y_u)$, $p_{ju} = p_{ju}(T, X, Y_u)$ ($j = 1, 2, \dots$) заданы посредством соотношений (1.2), а переменная Y_u вводится равенством

$$y^* = L^* \varepsilon^4 \alpha^{-1} Y_u \quad (1.6)$$

Вид разложений (1.5) диктуется асимптотическими формулами (1.4), причем $Y_u = \alpha Y_m$. Представление решения уравнений Навье – Стокса посредством (1.5), (1.6) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1u}}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{1u}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1u}}{\partial Y_u} &= 0, & \frac{u_{1u}}{\partial X} + \frac{\partial p_{1u}}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial v_{1u}}{\partial X} + \frac{\partial p_{1u}}{\partial Y_u} &= 0, & \frac{\partial p_{1u}}{\partial X} &= \frac{1}{M_\infty^2} \frac{\partial \rho_{1u}}{\partial X} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом,

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial p_{1u}}{\partial X} = \frac{\partial v_{1u}}{\partial Y_u}, \quad \frac{\partial p_{1u}}{\partial Y_u} = -\frac{\partial v_{1u}}{\partial X}$$

и функция $p_{1u}(T, X, (1 - M_\infty^2)^{-1/2} Y_s) + i(1 - M_\infty^2)^{-1/2} v_{1u}(T, X, (1 - M_\infty^2)^{-1/2} Y_s)$ является аналитической функцией комплексной переменной $X + iY_s$. Интеграл Шварца для полуплоскости в применении к упомянутой аналитической функции имеет вид

$$p_{1u}(T, X, 0) = \frac{1}{\pi} (1 - M_\infty^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{1u}(T, \xi, 0)}{\xi - X} d\xi \quad (1.8)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Если $Y_u \rightarrow 0$, то $Y_m \rightarrow \infty$, поэтому сращивание асимптотических разложений (1.1) и (1.5) в силу (1.4) приводит к условиям

$$p_{1u}(T, X, 0) = p_{1m}(T, X), \quad v_{1u}(T, X, 0) = -\frac{\partial A_1}{\partial X} \quad (1.9)$$

Подлежащая определению, наряду с давлением $p_{1m}(T, X)$, функция $A_1 = A_1(T, X)$ характеризует величину мгновенного смещения линий тока в пограничном слое относительно их невозмущенного положения при $X \rightarrow -\infty$. Возмущение давления во внешней области потенциального течения I индуцируется описываемым функцией A_1 ростом толщины вытеснения и передается, согласно первой из формул (1.9), в основную толщу пограничного слоя, оказывая, в свою очередь, влияние на его вытесняющее действие. Указанный механизм находит свое отражение в формально следующем из (1.8), (1.9) краевом условии взаимодействия [1–5]

$$p_{1m} = -\frac{1}{\pi} (1 - M_\infty^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_1(T, \xi) / \partial \xi}{\xi - X} d\xi \quad (1.10)$$

2. Асимптотические разложения в нелинейной области на дне пограничного слоя. При $Y_m = O(\alpha)$ возмущение скорости становится порядка самой скорости. Действительно, в невозмущенном пограничном слое

$$U_0 = \lambda_1 Y_m + \dots, \quad R_0 = r_0 + \dots, \quad Y_m \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Выражение для v_{2m} из (1.3) содержит расходящийся в точке $Y_m = 0$ интеграл, поведение которого в окрестности данной точки определяется не только значениями λ_1, r_0 , но зависит также от старших членов разложения функций U_0, R_0 по формуле Тейлора. Уточним поэтому формулы (2.1), считая, что поверхность термически изолирована и, следовательно, справедливы равенства $d^2 U_0(0)/dY_m^2 = 0, dR_0(0)/dY_m = 0$. Тогда в силу (1.3) разложения (1.1) в пределе $Y_m \rightarrow 0$ переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= \lambda_1 Y_m + \alpha \lambda_1 A_1 + O(\alpha^2) \\ \frac{v^*}{U_\infty^*} &= -\alpha^2 \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_m - \alpha^3 \left[\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{1}{r_0 \lambda_1} \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \right] + O(\alpha^4) \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= r_0 + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сравнение первых двух членов в выражении для u^* из (2.2) приводит к указанной выше оценке величины поперечной координаты Y_m , устанавливающей нижнюю границу области 2. Введем примыкающую снизу к области 2 область 3 толщиной $\alpha \varepsilon^4 L^*$, где нелинейные эффекты доминируют. Параметры газа в этой области представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= \alpha u_{1a} + \alpha^2 u_{2a} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \alpha^3 v_{1a} + \alpha^4 v_{2a} + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= \rho_{1a} + \alpha \rho_{2a} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \alpha^2 p_{1a} + \alpha^3 p_{2a} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем неизвестные функции $u_{ja} = u_{ja}(T, X, Y_a), v_{ja} = v_{ja}(T, X, Y_a), \rho_{ja} = \rho_{ja}(T, X, Y_a), p_{ja} = p_{ja}(T, X, Y_a)$ ($j = 1, 2, \dots$) содержат переменную $Y_a = O(1)$ в качестве одного из аргументов. Задающее переменную Y_a выражение

$$y^* = L^* \alpha \varepsilon^4 Y_a \quad (2.4)$$

делает очевидной связь $Y_m = \alpha Y_a$.

Из представления (2.3) вытекает система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial T} + \frac{\partial \rho_{1a} u_{1a}}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{1a} v_{1a}}{\partial Y_a} &= 0, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0 \\ \rho_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial T} + \rho_{1a} u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \rho_{1a} v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} &= -\frac{\partial p_{1a}}{\partial X} + \frac{\varepsilon^4}{\alpha^4} \frac{\partial}{\partial Y_a} \left(\mu \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} \right) \\ \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial T} + u_{1a} \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial X} + v_{1a} \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial Y_a} &= -\frac{\varepsilon^4}{\alpha^4} \rho_{1a} \frac{\partial}{\partial Y_a} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{1}{\rho_{1a}} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\mu = \mu^* \mu_\infty^{*-1}$ – первый коэффициент вязкости, Pr – число Прандтля.

Предельные условия при $Y_a \rightarrow \infty$, которым должны удовлетворять решения системы уравнений (2.5), следуют из асимптотических выражений (2.2), если в последних от переменной Y_m перейти к Y_a . В частности, справедливое в случае $X \rightarrow -\infty$ и $Y_a \rightarrow \infty$ (в предположениях вывода формул (2.2)) свойство

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = \rho_{1a} + O(\alpha^2)$$

позволяет принять [2, 6]

$$\rho_{1a} = r_0, \quad \rho_{2a} = 0$$

всюду в нелинейной области 3.

Трехслойная модель свободного взаимодействия [1–5], построенная для описания различных типов движений жидкости и газа в условиях, когда задачи о вязкой области течения и внешнем невязком потоке не разделяются и должны решаться одновременно, основана на асимптотических разложениях по малому параметру $\varepsilon = Re^{-1/8}$. Новыми по сравнению с предложенной ранее теорией [1–5] элементами рассматриваемого здесь подхода является введение независимого от числа Рейнольдса параметра α , который может иметь меньший порядок малости, чем параметр ε , а также иная нормировка переменных t^*, x^*, y^* . Если положить $\alpha = \varepsilon$ в разложениях (1.1), (1.5), (2.3) для областей 1, 2, 3, то, как видно из уравнений (2.5), вязкие тангенциальные напряжения в области 3 становятся столь же существенными, что и механизм нелинейности. В этом случае возвращаемся к трехслойной теории [1–5], позволяющей задачу о взаимодействующем пограничном слое свести к решению системы уравнений (2.5) с краевыми условиями

$$Y_a = 0: \quad u_{1a} = v_{1a} = 0; \quad Y_a \rightarrow \infty: \quad u_{1a} \rightarrow \lambda_1(Y_a + A_1)$$

дополненными условием (1.10) с $p_{1m} = p_{1a}$, причем $Y_m = Y_a$.

3. Разделение нелинейной области на два подслоя для возмущений сравнительно большой амплитуды. Рассмотрим асимптотическую структуру возмущенного течения, считая выполненными неравенства

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1 \quad (3.1)$$

В этом случае, как видно из уравнений (2.5), нелинейная область разделяется на основной невязкий подслой $Y_a = O(1)$ и вязкий пристеночный подслой толщины $Y_a = O(\alpha^{-2}\varepsilon^2)$, причем для переменной Y_a остается справедливым выражение (2.4). Под областью 3 в возникающей четырехслойной схеме возмущенного поля скоростей по-прежнему будем понимать подслои $Y_a = O(1)$, в котором имеют место разложения (2.3), а содержащими коэффициент вязкости μ членами в уравнениях (2.5) можно пренебречь. Нижняя граница $Y_a \rightarrow 0$ области 3 служит внешним краем соприкасающейся с поверхностью пластины области 4, для которой вводится характерная вертикальная координата $Y_\ell = O(1)$, $y^* = L^* \alpha^{-1} \varepsilon^6 Y_\ell$. Разложения функций течения в области 4

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= \alpha u_{1\ell}(T, X, Y_\ell) + \dots, & \frac{v^*}{U_\infty^*} &= \alpha \varepsilon^2 v_{1\ell}(T, X, Y_\ell) + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= r_0 + \dots, & \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} &= \alpha^2 p_{1\ell}(T, X, Y_\ell) + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

приводят к системе уравнений Грандтля с граничными условиями

$$Y_\ell = 0 \quad : \quad u_{1\ell} = v_{1\ell} = 0 \quad (3.3)$$

$$Y_\ell \rightarrow \infty \quad : \quad u_{1\ell} \rightarrow u_{1a}(T, X, 0) \quad (3.4)$$

Краевые задачи для главных членов разложений параметров газа в областях 3 и 4 не будут содержать постоянных $\lambda_1, r_0, s = (M_\infty^2 - 1)^{1/2}$, а также вычисленного по температуре $R_0^{-1}(Y_m)$ невозмущенного пограничного слоя коэффициента вязкости $\mu_0 = \mu(r_0^{-1})$ при $Y_m = 0$, если совершить преобразование подобия [1-5]

$$t = b^t T, \quad x = b^x X, \quad y \equiv y_a = b^y Y_a, \quad y_\ell = b^y = Y_\ell, \quad A = b^y A_1 \quad (3.5)$$

$$u = b^u u_{1a}, \quad v = b^v v_{1a}, \quad u_\ell = b^u u_{1\ell}, \quad v_\ell = b^v v_{1\ell}, \quad p = b^p p_{1m}$$

где

$$\begin{aligned} b^t &= \lambda_1^{3/2} \mu_0^{1/2} s^{1/2}, & b^x &= \lambda_1^{5/4} r_0^{1/2} \mu_0^{1/4} s^{3/4} \\ b^y &= \lambda_1^{3/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-1/4} s^{1/4}, & b^p &= \lambda_1^{-1/2} \mu_0^{-1/2} s^{1/2} \\ b^u &= \lambda_1^{-1/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-1/4} s^{1/4}, & b^v &= \lambda_1^{-3/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-3/4} s^{-1/4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В переменных (3.5), (3.6) система уравнений (2.5) для невязкой нелинейной области 3 в предположении (3.1) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

Заменяя в (2.2) переменную Y_m на $Y_a = \alpha^{-1} Y_m$, получим предельную форму разложений (2.3) при $Y_a \rightarrow \infty$. В частности, главные члены (по параметру α) выражений (2.2) задают асимптотический вид функций $u_{1a}, v_{1a}, p_{1a}, p_{1a}$ на верхней границе области 3. Переписанные в специальной системе единиц (3.5), (3.6), упомянутые функции, как видно из (2.2), обладают при $y \rightarrow \infty$ следующим поведением:

$$u = y + A, \quad v = -\frac{\partial A}{\partial x} y - \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.8)$$

Выражения (3.8), устанавливающие асимптотические краевые условия для системы уравнений (3.7), тождественно удовлетворяют данной системе. Поэтому функции (3.8) могут быть продолжены в область конечных значений y в качестве решения системы (3.7), причем условия срачивания в пределе $y \rightarrow \infty$ асимптотических разложений в областях 2 и 3 будут удовлетворены.

Обратимся к срачиванию асимптотических разложений в областях 3 и 4 (предполагая, что на поверхности обтекаемой пластины отсутствуют неровности высоты порядка $\alpha \epsilon^4$). Из определения поперечной координаты Y_ℓ для самой нижней пристеночной области 4 следует связь $Y_\ell = \alpha^2 \epsilon^{-2} Y_a$; в силу (3.1) переменная $Y_\ell \rightarrow \infty$, когда $Y_a \rightarrow 0$. Внутренний предел при $Y_a \rightarrow 0$ разложений (2.2) должен совпадать с внешним пределом при $Y_\ell \rightarrow \infty$ разложений (3.2); это означает, в частности, что функция v_{1a} (а после перехода к переменным (3.5), (3.6) и функция v) должна иметь порядок $\alpha^{-2} \epsilon^2$ в случае $y = O(\alpha^{-2} \epsilon^2)$. Если функция v берется из решения (3.8) системы уравнений (3.7), то указанное предельное свойство может быть выполнено только при выполнении условия

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi) / \partial \xi^2}{\xi - x} d\xi \quad (3.9)$$

поскольку функции p и A зависимости от переменной y не содержат, а соотношение

(1.10) между ними в системе единиц (3.5), (3.6) приобретает вид

$$p = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A(t, \xi) / \partial \xi}{\xi - x} d\xi \quad (3.10)$$

Выражаемое уравнением (3.9) (известным как уравнение Бенджамина—Оно (УБО) [7,8]) одно из условий сращивания главных членов разложений (2.3) и (3.2) эквивалентно условию непротекания $v = 0$ при $y = 0$ в силу (3.8). Если в трехслойной теории [1–5] толщина вытеснения A и самоиндуцированное давление p могут быть определены лишь в процессе решения краевой задачи в вязком пристеночном подслое, то четырехслойная схема сводит построение двумерной картины течения в областях 1–3 к решению одномерного уравнения (3.9). Поля течения в указанных областях восстанавливаются по функции A посредством формул (1.3), (3.8), (3.10). Что касается вязкой пристеночной области 4, то фигурирующая в асимптотическом условии (3.4) функция $u_{1a}(T, X, 0)$ после замены переменных (3.5), (3.6) совпадает, как видно из (3.8), с $A = A(t, x)$. В этом смысле пристеночная область 4 играет пассивную роль, поскольку параметры течения в ней определяются по найденным независимо распределением давления и скорости на ее внешнем крае.

Указанная ранее [9] возможность описания механизма взаимодействия на основе УБО (либо уравнения Бюргерса при сверхзвуковых скоростях потока в области 1) и реализация четырехслойной структуры является следствием неравенства (3.1); предельный переход к высокочастотным пульсациям в рамках трехслойной схемы [1–5], сопровождающийся расслоением нижней пристеночной подобласти, также приводит к упомянутым уравнениям [10, 11]. Модификация рассматриваемой теории в применении к задаче обтекания малой неровности на пластине с вертикальным размером порядка $\alpha \varepsilon^4$ сводится к появлению свободного члена в правой части уравнения (3.9). Как было показано ранее [11, 12], свободный член служит источником самовозбуждающихся колебаний в виде солитонных решений даже при стационарных граничных условиях.

Стационарный аналог системы уравнений (3.7) описывает одну из подобластей в асимптотической задаче о присоединении сверхзвукового потока [13], а также окрестность точки отрыва пограничного слоя на движущейся вниз по потоку стенке [14]. Обтекание сверхзвуковым потоком пластины с периодически колеблющимся щитком и распространение вдоль плоской поверхности клина возмущений, вызванных внезапным изменением донного давления, были рассмотрены [15] в качестве примеров нестационарных локально-невязких течений со взаимодействием.

4. Структура области 3 при наличии тангенциального разрыва скорости. Рассмотрим подвижный контур, задаваемый уравнением

$$y^* = \alpha \varepsilon^4 L^* G_1(T, X) \quad (4.1)$$

T и X определены формулами (1.2); компоненты его внешней нормали

$$n_x = -\frac{\kappa}{1 + \kappa^2}, \quad n_y = \frac{1}{1 + \kappa^2}; \quad \kappa = \frac{\partial y^*}{\partial x^*} = \alpha^2 \frac{\partial G_1}{\partial X}$$

Скорость контура по нормали к себе v_n^* с точностью до величин порядка α^5 можно заменить производной функции (4.1) по времени t^* (имеющей порядок α^3).

Поставим на контуре (4.1) условие непротекания, считая контур линией тока. Поскольку он отстоит от твердой стенки на расстояние, равное по порядку величины толщине невязкой нелинейной области 3, в которой задаваемая посредством (2.4) координата $Y_a = O(1)$, то в условии непротекания $u^* n_x + v^* n_y = v_n^*$ в качестве скоростей газа u^* v^* следует взять функции первого приближения асимптотических рядов (2.3), ограничиваясь главными членами разложений компонент нормали n_x , n_y по параметру

α. Таким образом, кинематическое условие на линии (4.1) в специальной системе единиц (3.5), (3.6) для области 3 примет вид

$$y = G : \quad \frac{\partial G}{\partial t} = v + u \frac{\partial G}{\partial x} \quad (4.2)$$

где $G(t, x) = b^y G_1(T, X)$, коэффициент b^y определен в (3.6).

Полученное аналитическим продолжением из области 2 решение (3.8) будем считать справедливым в подобласти $G(t, x) < y < +\infty$ области 3 вплоть до ее нижней границы $y = G(t, x)$. Тогда подстановка в (4.2) выражений (3.8) приводит к соотношению

$$\frac{\partial(A+G)}{\partial t} + (A+G) \frac{\partial(A+G)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ оператор, действие которого на функцию $f(t, x)$ выражается через интеграл типа Коши

$$\mathcal{H}\{f\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f d\xi}{\xi - x}$$

В силу (3.10) условие (4.3) имеет следствием УБО

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} \right\} - \phi(t, x) \quad (4.4)$$

относительно функции $\tilde{A} = A + G$, причем свободный член в правой части (4.4) определяется функцией $G = G(t, x)$ следующим образом:

$$\phi(t, x) = \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right\} \quad (4.5)$$

Пусть поверхность обтекаемого тела (представляющего собой плоскую пластину) имеет неровность высоты порядка $\alpha \varepsilon^4 L^*$. Тогда в переменных, в которых выписаны уравнения (3.7), форма твердой поверхности может быть задана уравнением $y = F(x)$. Уравнения (3.7) означают сохранение завихренности

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y}$$

вдоль линии тока

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

В подобласти $F(t, x) < y < G(t, x)$ области 3, рассмотрим решение системы уравнений (3.7) с постоянной завихренностью $\omega = \Omega_0$

$$u = \Omega_0 y + \Theta(t, x) \quad (4.6)$$

Условие непротекания на твердой поверхности $y = F(x)$ приводит к выражению

$$v = -y \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial F \Theta}{\partial x} + \frac{\Omega_0}{2} \frac{\partial F^2}{\partial x} \quad (4.7)$$

Подставим (4.6), (4.7) в кинематическое условие (4.2), тогда

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(G - F) \Theta + \frac{\Omega_0}{2} (G^2 - F^2) \right] = 0 \quad (4.8)$$

Градиент давления восстанавливается с помощью первого уравнения системы (3.7):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(F \Theta + \frac{\Omega_0}{2} F^2 \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.9)$$

На линии $y = G(t, x)$ касательная к ней компонента скорости, вообще говоря, терпит разрыв.

5. Некоторые точные решения УБО. Пусть $A(t, x)$ – решение однородного УБО (3.9). Можно проверить, что при любом значении параметра ρ функция

$$A_\rho(t, x) = (1 - \rho)A[(1 - \rho)t, x]$$

удовлетворяет УБО с неоднородной правой частью

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial t} + A_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial x} = \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial x^2} \right\} - \Phi(t, x)$$

если свободный член

$$\Phi(t, x) = \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} \right\}, \quad B_\rho(t, x) = \rho A_\rho(t, x)$$

Рассмотрим периодическое с пространственной длиной волны $2\pi k^{-1}$ и частотой k решение однородного уравнения УБО

$$A(t, x) = \frac{2k^2}{c} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cos[k(x - ct)] \right\}^{-1} \quad (5.1)$$

зависящее от двух параметров: волнового числа k и фазовой скорости c . Функция (5.1) четная относительно k , поэтому будем считать $k > 0$. Что касается знака c , то выражение (5.1) только при $c < 0$ задает решение УБО, представляющее, таким образом, волну, всегда бегущую вверх по потоку.

Если $A(t, x)$ – решение однородного УБО, то

$$\mathcal{C}A(\mathcal{C}^2 t, \mathcal{C}x) \quad (5.2)$$

и

$$\mathcal{D} + A(t, x - \mathcal{D}t) \quad (5.3)$$

– тоже решения при любых $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

Применение к периодическому решению (5.1) уравнения УБО преобразования (5.2) эквивалентно изменению волнового числа и фазовой скорости: $k \rightarrow \mathcal{C}k$, $c \rightarrow \mathcal{C}c$ и, таким образом, не увеличивает количества входящих в данное решение параметров.

Преобразование (5.3) (переход в движущуюся со скоростью $-\mathcal{D}$ систему координат) приводит к трехпараметрическому решению

$$A(t, x) = \mathcal{D} - \frac{2k^2}{|c|} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{|c|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cos[k(x + (|c| - \mathcal{D})t)] \right\}^{-1} \quad (5.4)$$

Напомним, что в (5.1) всегда $c < 0$. Ввиду (5.2), (5.3) без ограничения общности можно рассматривать стационарное решение с периодом 2π , положив $\mathcal{D} = |c|$, $k = 1$ и ограничиться одним параметром, взяв в качестве которого

$$0 < \varepsilon_0 = \left(1 - \frac{k^2}{|c|^2} \right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

Итак, функция

$$A(t, x) = A_0(x) = \frac{1}{(1 - \varepsilon_0^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{2(1 - \varepsilon_0^2)}{1 - \varepsilon_0 \cos x} \right] \quad (5.5)$$

является решением однородного УБО. Экстремальные значения функции (5.5) в точках $x = 0$ и $x = \pi$

$$A_{\min} = -\frac{1 + 2\varepsilon_0}{(1 - \varepsilon_0)^{1/2}}, \quad A_{\max} = -\frac{1 - 2\varepsilon_0}{(1 - \varepsilon_0)^{1/2}} \quad (5.6)$$

Подставив вместо ε_0 в (5.5) параметр δ_0 , равный размаху нелинейных колебаний

$$\delta_0 = A_{\max} - A_{\min}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\delta_0}{(\delta_0^2 + 16)^{1/2}}$$

получим еще одно представление 2π -периодического стационарного решения УБО

$$A_0(x) = \frac{(\delta_0^2 + 16)^{1/2}}{4} - \frac{8}{(\delta_0^2 + 16)^{1/2} - \delta_0 \cos x} \quad (5.7)$$

Для $\delta_0 \rightarrow 0$ (5.7) задает нейтральную волну Толлмина – Шлихтинга в системе координат, движущейся вниз по потоку со скоростью $|c| \rightarrow 1 + 0$

$$A_0(x) = -1 - \frac{\delta_0}{2} \cos x + O(\delta_0^2)$$

Для $\delta_0 \rightarrow \infty$ предельный вид (5.6)

$$A_{\max} = \frac{\delta_0}{4} + O\left(\frac{1}{\delta_0}\right), \quad A_{\min} = -\frac{3\delta_0}{4} + O\left(\frac{1}{\delta_0}\right)$$

показывает, что решение (5.7) знакопеременно, причем отклонение функции $A_0(x)$ вниз от нулевого значения в три раза превышает отклонение вверх.

Перепишем решение (5.7) в предположении стремящегося к бесконечности размаха колебаний $\delta_0 \rightarrow \infty$

$$A_0(x) = \frac{\delta_0}{4} + \frac{2}{\delta_0} + O\left(\frac{1}{\delta_0^3}\right) - \frac{8}{\delta_0} \left[1 - \cos x + \frac{8}{\delta_0^2} + O\left(\frac{1}{\delta_0^4}\right) \right]^{-1} \quad (5.8)$$

В случае $1 - \cos x = O(1)$ асимптотика решения (5.7) для $\delta_0 \rightarrow \infty$ определяется выражением

$$A_0(x) = \frac{\delta_0}{4} + O\left(\frac{1}{\delta_0}\right) \quad (5.9)$$

Таким образом, в изучаемом пределе больших амплитуд решение (5.7) стремится снизу к постоянной, равной его максимальному значению. Однако в узких областях $1 - \cos x = O(\delta_0^{-2})$, как видно из (5.8), асимптотическое представление (5.9) теряет силу. Вследствие периодичности решения ограничимся его рассмотрением в окрестности нуля. Разлагая входящую в (5.8) функцию $\cos x$ в ряд Маклорена до $O(x^4)$ при $x \rightarrow 0$, находим

$$A_0(x) = \frac{\delta_0}{4} - \delta_0 \left[1 + \frac{\delta_0^2}{16} x^2 + O\left(\frac{1}{\delta_0}\right) \right]^{-1} \quad (5.10)$$

Асимптотический вид (5.10) решения (5.7) представляет собой уединенную стоячую волну на ненулевом фоне $\delta_0/4$ (солитон на пьедестале). Формула (5.10) справедлива в областях $x \pm 2\pi n = O(\delta_0^{-1})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), задавая, таким образом, решение в виде узких шипов.

6. Спектральное разложение нелинейного периодического решения УБО. Разложение по системе эквидистантных солитонов. Укажем другие формы представления периодического решения (5.1). Пусть

$$\operatorname{sh} \mathcal{Q} = \frac{k}{|c|} \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \operatorname{ch} \mathcal{Q} = \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (6.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A(t, x) &= -\frac{2k \operatorname{sh} \mathcal{Q}}{\operatorname{ch} \mathcal{Q} - \cos[k(x + |c|t)]} = -2 \operatorname{Im} \left\{ ik \frac{1 + \exp[-\mathcal{Q} - ik(x + |c|t)]}{1 - \exp[-\mathcal{Q} - ik(x + |c|t)]} \right\} = \\ &= -2 \operatorname{Im} \left\{ ik \left[1 + 2 \sum_{N=1}^{\infty} \exp[-(\mathcal{Q} + ik(x + |c|t))N] \right] \right\} = \\ &= -2k \left\{ 1 + 2 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{|c| - k}{|c| + k} \right)^{N/2} \cos[kN(x + |c|t)] \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

(при получении последнего равенства в цепочке исключили при помощи (6.1) величину $\exp(-\mathcal{Q})$ и выделили мнимую часть).

Как видно из спектрального состава (6.2) солитонной когерентной структуры, амплитуды спектральных мод периодического решения (5.1) в фурье-пространстве образуют геометрическую прогрессию. В то же время в физическом пространстве решение (5.1) распадается на сильно нелинейные локализованные структуры при любых соотношениях параметров $|c|$ и k , а не только для описываемого формулой (5.10) предела $|c|/k \rightarrow \infty$ ($\epsilon_0 \rightarrow 0$, $\delta_0 \rightarrow \infty$). Последнее утверждение было сформулировано ранее [16] и основано на рассмотрении интеграла

$$I = \oint \left[\left(\eta - 2 \frac{\pi \mathcal{Z}}{k} \right)^2 + \zeta^2 \right]^{-1} \frac{d\mathcal{Z}}{\exp(2\pi i \mathcal{Z}) - 1} \quad (6.3)$$

по замкнутому контуру Γ на комплексной плоскости $\mathcal{Z}$.

Пусть контур Γ — окружность $|\mathcal{Z}| = R_N = N + \frac{1}{2}$ ($N = 1, 2, \dots$). Тогда, представляя интеграл (6.3) в виде суммы вычетов в полюсах подынтегральной функции и учитывая, что эта сумма стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, получим

$$-\frac{2k \operatorname{th} k\zeta}{1 - \sqrt{1 - \operatorname{th} k\zeta} \cos k\eta} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\zeta \left[\left(\eta - 2 \frac{n\pi}{k} \right)^2 + \zeta^2 \right]^{-1} \quad (6.4)$$

Левая часть этого равенства в случае

$$\operatorname{th} k\zeta = \frac{k}{|c|}, \quad \eta = x + |c|t$$

представляет собой решение (5.1) УБО. Нелинейное периодическое решение (5.1) может быть представлено как сумма равноотстоящих друг от друга солитонов

$$A(t, x) = -\frac{2k^2}{|c|} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{|c|^2} \right]^{1/2} \cos[k(x + |c|t)] \right\}^{-1} =$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4|c|\theta}{1+|c|^2 \theta^2 (x+|c|t-2n\pi/k)^2}, \quad \theta = \frac{k}{|c|} \operatorname{arcth}^{-1} \frac{k}{|c|} \quad (6.5)$$

Заметим, что всегда $\theta < 1$, поэтому каждый член суммы (6.5) лишь в пределе $\theta \rightarrow 1$, достигаемом при $k/|c| \rightarrow 0$, является точным решением [7, 8]

$$A(t, x) = - \frac{4|c|}{1+|c|^2 (x+|c|t)^2} \quad (6.6)$$

УБО в виде уединенной волны (солитона). Решение (6.6) получается применением преобразования $x \rightarrow x + |c|t$, $A \rightarrow A - |c|$ к решению (5.10), причем в последнем следует положить $\delta_0 = 4|c|$.

7. Пример периодической вихревой структуры при наличии тангенциального разрыва в потоке. Согласно сделанному в начале разд. 5 замечанию, введение линии тангенциального разрыва скорости

$$y = G(t, x) = \rho \tilde{A}(t, x), \quad \tilde{A}(t, x) = (1 - \rho)A[(1 - \rho)t, x] \quad (7.1)$$

позволяет утверждать, что уравнение

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.2)$$

будет удовлетворено, если

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} \right\} - \phi(t, x), \quad \phi(t, x) = \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right\} \quad (7.3)$$

причем в (7.1) $A(t, x)$ – какое-либо решение уравнения УБО (3.9).

Будем искать решение системы уравнений (4.3), (4.8), (4.9), (7.3) в виде бегущей волны с фазовой скоростью c , тогда

$$p = c\tilde{A} - \tilde{A}^2/2 + \mathcal{K}_1 \quad (7.4)$$

В дальнейшем ограничимся случаем $F = F_0 = \text{const}$. Из (4.9) имеем

$$p = c\Theta - \Theta^2/2 + \Omega_0 F_0 \Theta + \mathcal{K}_2 \quad (7.5)$$

Если положить

$$\Theta = \tilde{A} - \Omega_0 F_0 \quad (7.6)$$

то непрерывность давления на линии тангенциального разрыва $y = G$ обеспечивается следующим выбором постоянных $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ из (7.4), (7.5):

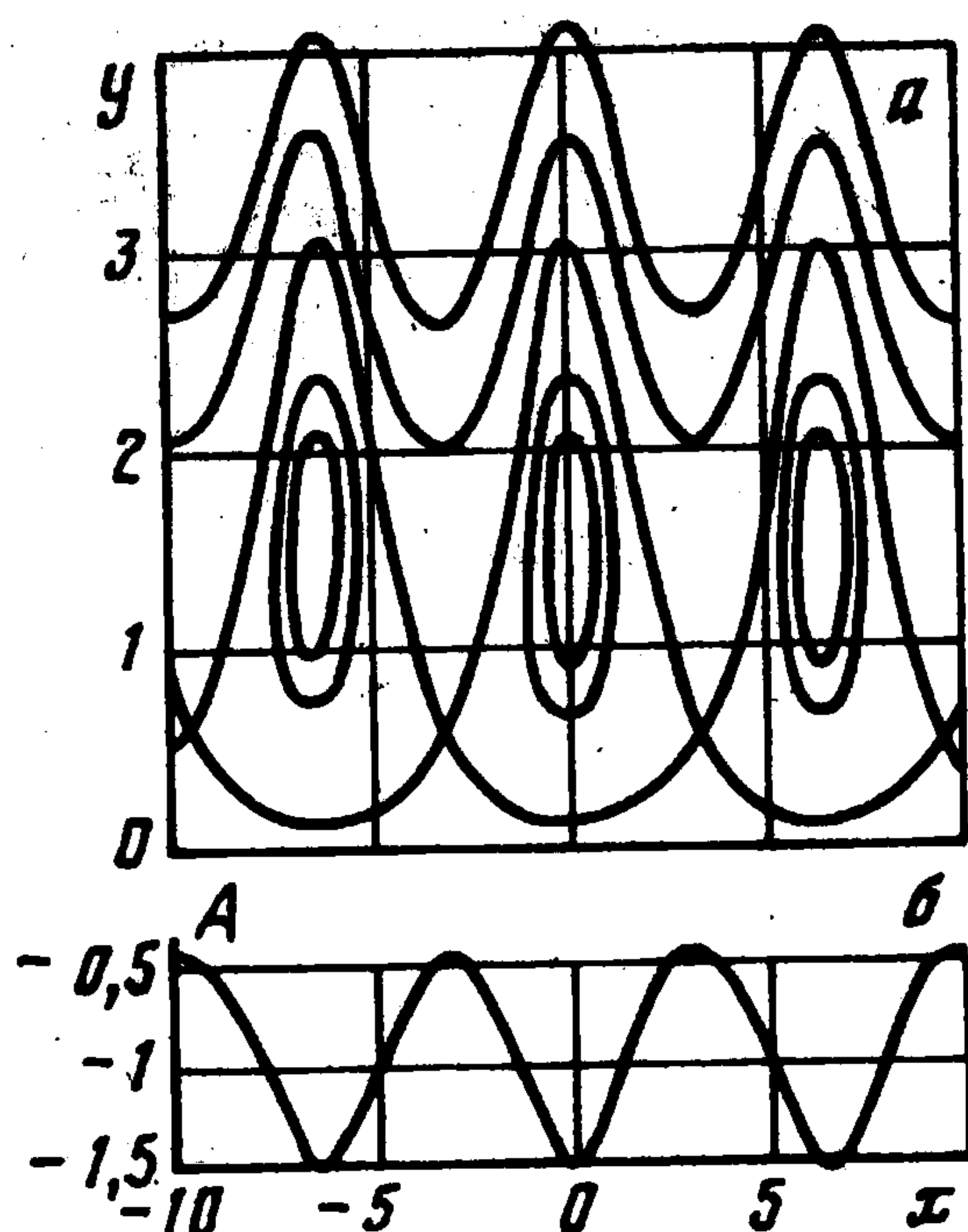
$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 = c\Omega_0 F_0 - \Omega_0^2 F_0^2/2$$

Обратимся теперь к уравнению (4.8) относительно функции G . Предположение об автомодельности его решения типа бегущей со скоростью c волны устанавливает соотношение

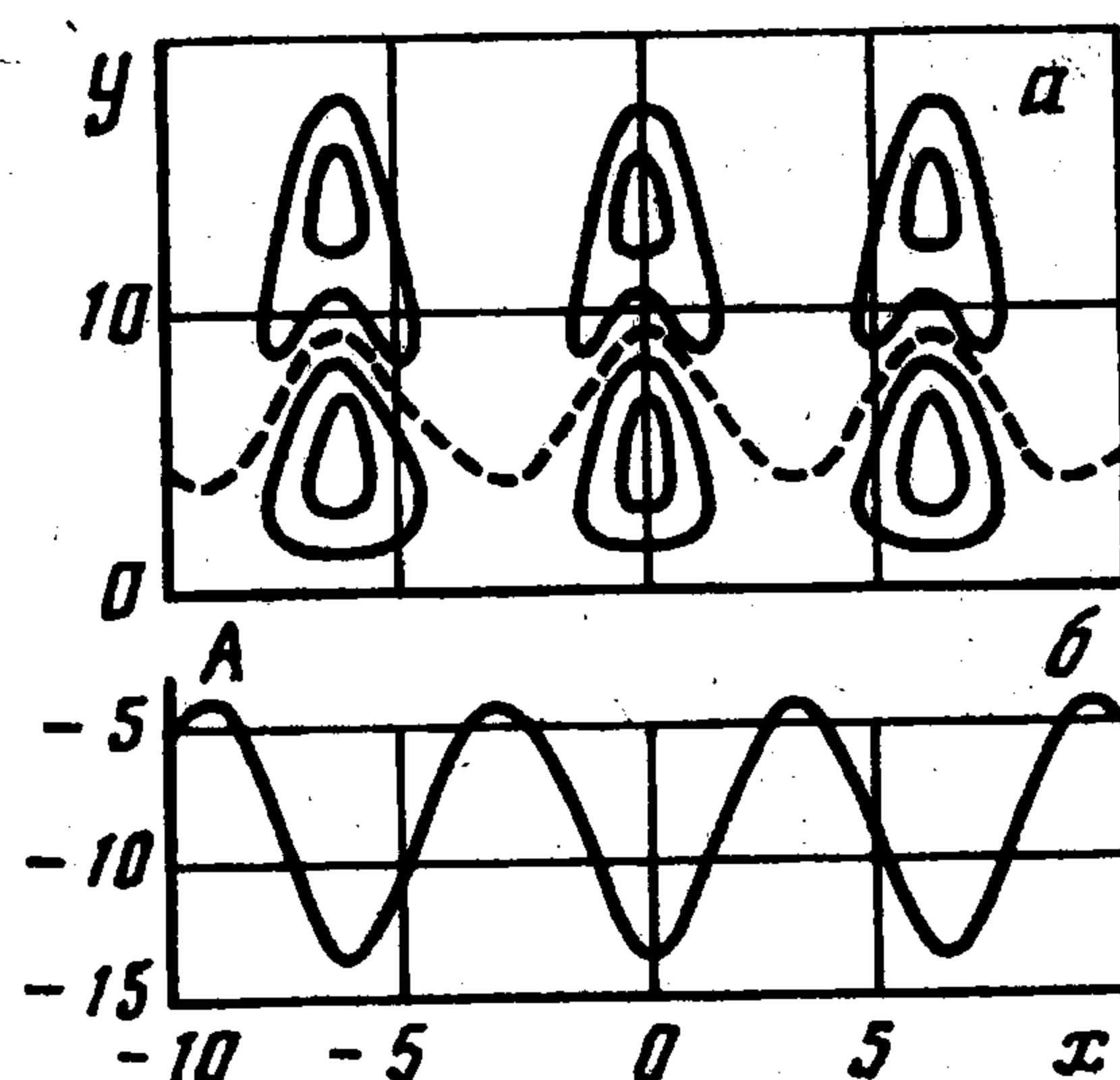
$$cG - \Theta G + \Theta F_0 - \Omega_0 G^2/2 = \mathcal{K}_3 \quad (7.7)$$

Примем, что константа $\mathcal{K}_3 = \Omega_0 F_0^2/2 - cF_0$, тогда соотношение (7.7) удовлетворяется для функции

$$G = \rho(\Theta - c) - F_0 \quad (7.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

при условии

$$\rho = -2/\Omega_0 \quad (7.9)$$

Возьмем в качестве решения уравнения УБО функцию (5.1). Тогда периодическое решение уравнения (4.4)

$$\tilde{A}(t, x) = \frac{2k^2(1-\rho)}{c} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{c^2} \right]^{1/2} \cos[k(x - c(1-\rho)t)] \right\}^{-1} \quad (7.10)$$

соответствует такому свободному члену (4.5), который индуцируется линией тангенциального разрыва следующего вида:

$$y = G(t, x) = F_0 - c\rho(1-\rho) \left\{ 1 - \frac{2k^2}{c^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{c^2} \right]^{1/2} \cos[k(x - c(1-\rho)t)] \right\}^{-1} \right\} \quad (7.11)$$

Выражение во внешних фигурных скобках из (7.11) отрицательно в случае

$$\sqrt{3}|c|/2 < k < |c| \quad (7.12)$$

Для (7.12) линия разрыва не пересекает твердую стенку, если $\rho(1-\rho) < 0$; таким образом, условие

$$\rho < 0 \text{ или } \rho > 1 \quad (7.13)$$

совместно с условием (7.12) обеспечивают реализуемость модели течения с расположенной в потоке линией тангенциального разрыва скорости.

Теоретическая модель рециркуляционной зоны, имеющей характерную длину L^* порядка хорды тонкого тела, предложена ранее [17]. В предположении, что ширина отрывной зоны h^* не превышает толщину тела, выведена система уравнений, где в качестве одной из неизвестных функций фигурирует форма границы (представляющей собой контактный разрыв) вихревой области. Показано, что существенно нелинейные нестационарные возмущения приводят к разрушению в конечный момент времени такой двуслойной структуры путем фокусировки и выброса вихря. Если αU_∞^* – порядок скорости в зоне отрыва, то

рассмотренная выше структура в применении к модели течения [17] реализуется в случае $h^* L^{*-1} = O(\alpha Re^{-1/2})$.

На фиг. 1, а изображена картина линий тока для области 3 в отсутствие разрывов скорости, если в качестве решения УБО (описывающего нелинейное движение в данной области) взята функция (5.7) с $\delta_0 = 1$. Само решение (5.7) представлено на фиг. 1, б.

Фиг. 2, а иллюстрирует конфигурацию линий тока для течения в области 3 с контактнм разрывом (нанесенным штриховой линией) в движущейся системе координат, где соответствующее решение системы уравнений (4.3), (4.8), (4.9), (7.3) стационарно. В (7.1) положено $\rho = -2$, а функция $A = \tilde{A} - G$ (связанная с самоиндуцированным давлением по формуле (3.10)) показана на фиг. 2, б.

8. Характер неустойчивости разрывных решений асимптотических уравнений в коротковолновом пределе. Неустойчивость тангенциального разрыва в однородной среде по отношению к бесконечно малым возмущениям [18] без учета конечной вязкости такова, что коэффициент усиления возмущений неограниченно возрастает с увеличением волнового числа.

Будем искать решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A+G)}{\partial t} + (A+G) \frac{\partial(A+G)}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[G\Theta + \frac{\Omega_0}{2} G^2 \right] = 0$$

$$p = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A(t, \xi) / \partial \xi}{\xi - x} d\xi$$

в линейном приближении. Положим

$$(A, G, \Theta, p) = (A_0, G_0, \Theta_0, p_0) + (A', G', \Theta', p') a e^{ik(x-ct)} \quad (8.2)$$

где амплитудный множитель a считается малым. Рассматривая коротковолновые возмущения, примем величины A_0, G_0, Θ_0, p_0 постоянными. Подставляя выражения (8.2) в систему (8.1) и пренебрегая членами порядка a^2 , получим линейную однородную систему уравнений относительно A', G', Θ', p' , из равенства нулю определителя которой следует, что

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \text{sign } \Omega_0 [(\Theta_0 - c)^2 + G_0(\tilde{A}_0 - c)]^{-1} (\Theta_0 - c) \times \\ &\times \{i\Omega_0 G_0 - (\Theta_0 - c)(\tilde{A}_0 - c) + [(i\Omega_0 G_0 + (\Theta_0 - c)(\tilde{A}_0 - c))^2 + \\ &+ 4i\Omega_0 G_0(\tilde{A}_0 - c)^2]^{1/2}\}, \quad \tilde{A}_0 = A_0 + G_0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Выражение (8.3) получено с учетом равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\xi}}{\xi - x} d\xi = i \text{sign } k e^{ikx} \quad (8.4)$$

позволяющего последнее уравнение системы (8.1) переписать в виде

$$p' = |k| A' \quad (8.5)$$

В (8.1)–(8.5) волновое число возмущений k предполагается действительным. Для

$|k| \rightarrow \infty$ из (8.3) находим

$$c = k - i\Omega_0 G_0 / k \quad (8.6)$$

Как видно из (8.6), невязкая неустойчивость (по отношению к бесконечно малым возмущениям) течений рассматриваемого класса с линией тангенциального разрыва такова, что мнимая часть фазовой скорости стремится к нулю с увеличением k . В этом смысле поведение изучаемых здесь возмущений качественно отличается от описываемой полными уравнениями Эйлера картины неустойчивости контактного разрыва в идеальной жидкости [18], где рост k сопровождается неограниченным возрастанием коэффициента усиления возмущений. Причина столь существенного замедления роста возмущений объясняется тем, что в системе уравнений (8.1) заложен механизм взаимодействия между изменением формы линии разрыва и внешним потенциальным потоком через основную толщу пограничного слоя. Другими словами, даже в коротковолновом пределе модель (8.1) остается нелокальной (в направлении по нормали к обтекаемой поверхности).

Разумеется, формальное рассмотрение (на основе уравнений Эйлера) малой окрестности, содержащей небольшую часть линии разрыва и в которой поток можно считать однородным, приводит к идентичному [18] выводу, что тангенциальный разрыв неустойчив всегда. Однако в применении к исследуемому течению такое рассмотрение лишено смысла, поскольку в пределе больших волновых чисел становится существенной вязкая структура контактного разрыва, в действительности представляющего собой слой смешения толщины порядка $\Delta y = \text{Re}^{-1/4} \alpha^{-2} \ll 1$.

9. Четырехслойная асимптотическая схема течения при трансзвуковых скоростях внешнего потока. Распространим введенную выше модель течения на случай трансзвукового набегающего из бесконечности потока: $M_\infty^2 - 1 = O(\delta K_\infty)$, где $\delta \rightarrow 0$, $K_\infty = O(1)$. Если теперь вместо (1.1), (1.2) рассмотреть возмущения в основной толще пограничного слоя вида

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = U_0 + \delta u_{1m} + \delta^2 u_{2m} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^{5/2} v_{1m} + \delta^{7/2} v_{2m} + \dots \quad (9.1)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = R_0 + \delta \rho_{1m} + \delta^2 \rho_{2m} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1m} + \delta^3 p_{2m} + \dots$$

при условии, что аргументы T, X, Y_m искомых функций $u_{jm} = u_{jm}(T, X, Y_m)$, $v_{jm} = v_{jm}(T, X, Y_m)$, $\rho_{jm} = \rho_{jm}(T, X, Y_m)$, $p_{jm} = p_{jm}(T, X, Y_m)$ ($j = 1, 2, \dots$) определяются выражениями

$$t^* = \frac{L^*}{U_\infty^*} \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{\delta^{5/2}} T \right), \quad x^* = L^* \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{\delta^{3/2}} X \right), \quad y^* = L^* \varepsilon^4 Y_m \quad (9.2)$$

то поле скоростей снова приобретает многослойную структуру. Порядковое соотношение $\delta = \varepsilon^{8/9}$ (где, по-прежнему, $\varepsilon = \text{Re}^{-1/8}$) соответствует типу взаимодействия с трансзвуковым внешним потоком, впервые проанализированному в [19], и характеризуется трехслойной картиной возмущенного движения. По сравнению со случаем, когда число Маха отличается от единицы на конечную величину, особенность теории [19] состоит в том, что условие взаимодействия в ней становится динамическим (зависящим от времени).

Увеличение амплитуды пульсаций, а именно, выполненные неравенства

$$\varepsilon^{8/9} \ll \delta \ll 1 \quad (9.3)$$

приводит к возникновению четырехслойной асимптотической структуры, поскольку нижняя подобласть нелинейного движения разделяется на невязкую часть и непосредственно примыкающий к поверхности вязкий пристеночный подслой. Был рассмотрен [20] пограничный слой с самоиндуцированным давлением в трансзвуковом потоке при наличии в нем возмущений сравнительно большой амплитуды вида (9.1)–(9.3). Было показано [20], что в специальной безразмерной системе единиц для локально-невязких возмущений справедлива система уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + K_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_u^2} = 0 \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial(A+G)}{\partial t} + (A+G) \frac{\partial(A+G)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x, 0)}{\partial x} = -p(t, x), \quad \frac{\partial \varphi(t, x, 0)}{\partial y_u} = -\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} \quad (9.6)$$

Потенциал $\varphi(t, x, y_u)$ внешнего поля скоростей подчиняется уравнению (9.4), в котором трансзвуковой параметр $K_\infty = O(1)$ характеризует величину $(M_\infty^2 - 1)\delta^{-1}$. Предел $y_u \rightarrow 0$ соответствует переходу из потенциальной части потока в основную толщу пограничного слоя, причем соотношения (9.6) представляют собой условия сращивания с (9.1) на его внешнем крае при $Y_m \rightarrow \infty$.

Если зависимость всех функций течения от времени и пространственной координаты задается автомодельной переменной $x - ct$, то из (9.4) имеем

$$(c - K_\infty) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_u^2} = 0 \quad (9.7)$$

Следовательно, $\partial \varphi / \partial \eta_u + i \partial \varphi / \partial x$, где $\eta_u = (c - K_\infty)^{1/2} y_u$, является аналитической функцией комплексной переменной $x + i \eta_u$. Интеграл Шварца для верхней полуплоскости в применении к данной аналитической функции удобно записать в форме

$$\frac{\partial \varphi(t, x, 0)}{\partial x} = -\frac{1}{\pi(c - K_\infty)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(t, x, 0) / \partial y_u}{\xi - x} d\xi \quad (9.8)$$

Подставляя в (9.8) граничные значения (9.6), получаем условие взаимодействия, отличающееся от (3.10) лишь коэффициентом $(c - K_\infty)^{-1/2}$ в правой части. В частности, периодическое решение системы уравнений (9.4)–(9.6) находится посредством замены

$$x \rightarrow x(c - K_\infty)^{1/2}, \quad t \rightarrow t(c - K_\infty)^{1/2}, \quad k \rightarrow k(c - K_\infty)^{-1/2}$$

в формуле (7.10). Таким образом, все указанные в разд. 4–7 (а также обсуждаемые в [21–23]) решения солитонного типа имеют место и для уравнений, описывающих свободное взаимодействие пограничного слоя с трансзвуковым внешним потоком.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00341).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
2. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Applied Mechanics. N.Y., etc. Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.

3. Рубан А.И., Сычев В.В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики. 1979. Т. 2. Вып. 4. С. 57–95.
4. Smith F.T. On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
5. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В. и др. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 255 с.
6. Рыжов О.С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1035–1052.
7. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 3. P. 559–592.
8. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 4. P. 1082–1091.
9. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
10. Smith F.T., Burggraf O.R. On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 399. № 1816. P. 25–55.
11. Жук В.И., Попов С.П. О решениях неоднородного уравнения Бенджамина – Оно // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 12. С. 1852–1862.
12. Жук В.И., Попов С.П. Моделирование нелинейных волн в пограничных слоях на основе уравнений Бюргерса, Бенджамина – Оно и Кортевега – де Вриза // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 7. С. 96–109.
13. Нейланд В.Я. К асимптотической теории присоединения сверхзвукового потока // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1650. С. 3–17.
14. Крапивский П.Л., Нейланд В.Я. Отрыв пограничного слоя от подвижной поверхности тела в сверхзвуковом потоке газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 3. С. 32–42.
15. Липатов И.И., Нейланд В.Я. К теории нестационарного отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 1. С. 36–49.
16. Miloh T., Tulin M.P. Periodic solutions of the DABO equation as a sum of repeated solitons // J. Phys. A: Mathem. and General. 1989. V. 22. № 7. P. 921–923.
17. Brown S.N., Cheng H.K., Smith F.T. Nonlinear instability and break-up of separated flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 191–216.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
19. Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
20. Жук В.И. Нелинейные возмущения, индуцирующие собственный градиент давления в пограничном слое на пластине в трансзвуковом потоке // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 68–78.
21. Рыжов О.С. Об образовании упорядоченных вихревых структур из неустойчивых колебаний в пограничном слое // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 12. С. 1804–1814.
22. Рыжов О.С. Возникновение упорядоченных вихревых структур в пограничном слое // Проблемы прикладной математики и информатики. Ч. I. Механика и математическая физика. М.: ВЦ РАН, 1992. С. 67–90.
23. Bogdanova-Ryzhova E.V., Ryzhov O.S. Solitary-like waves in boundary-layer flows and their randomization // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 352. № 1700. P. 389–404.