

УДК 533.601

© 1999 г. С.В. Мелешко, В.П. Шапеев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ К ДВУМЕРНЫМ УРАВНЕНИЯМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Для выделения и построения отдельных классов решений двумерных уравнений газовой динамики с плоской и осевой симметрией применяется метод дифференциальных связей (ДС). Проводится классификация решений (ДП-решений), удовлетворяющих одной, двум и трем ДС первого порядка. Решение задачи Коши с данными на линии общего положения имеет в этих случаях соответственно три, две и одну произвольные функции. В случае решений с трех- и двухфункциональным произволом указаны все ДС, совместные с рассматриваемой системой. С их помощью построены отдельные ДП-решения уравнений газовой динамики. В случае однофункционального произвола найдены ДС, совместные с уравнениями газовой динамики. Указанный класс решений включает в себя известные обобщенные волны Прандтля–Майера. Построение ДП-решений этого класса сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является новым представлением этого класса решений.

Используем метод дифференциальных связей (ДС) [1] для классификации и построения частных решений системы уравнений двумерной газовой динамики. Будем опираться только на известные результаты и следовать схеме применения метода [2]; новым является объект его приложения.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую установившиеся течения газа в плоском ($v = 0$) и осесимметричном ($v = 1$) случаях

$$u\tau_x + v\tau_y - \tau u_x - \tau v_y = v\tau v / y, \quad uu_x + v u_y + \tau p_x = 0 \quad (1)$$

$$uv_x + vv_y + \tau p_y = 0, \quad up_x + v p_y + A(u_x + v_y) = -vAv / y; \quad A = c^2 / \tau$$

Здесь u, v – компоненты вектора скорости по осям x, y ; p – давление, τ – удельный объем, c – скорость звука. Систему уравнений (1) запишем в виде (система F)

$$F \equiv Lu_x + \Lambda Lu_y - Lf = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \tau \\ 0 & u & v & \tau \\ 0 & -v & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} v/u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v/u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & uv/H & \tau(q^2 - A\tau)/H \\ 0 & 0 & A/H & uv/H \end{pmatrix}$$

$$u = (\tau, u, v, p)', \quad f = \left(\frac{v\tau v A}{yH}, 0, \frac{-vuv A}{yH}, \frac{v\tau uv}{yH} \right)'$$

$$H \equiv u^2 - \tau A, \quad q^2 = u^2 + v^2$$

В записи векторов жирный шрифт используем только для вектора $\mathbf{u}$, штрих в записи векторов и матриц означает транспонирование (в отличие от штриха у функций, означающего дифференцирование).

Рассматривается задача выделения [1, 2] из всего множества решений заданной системы F таких решений, которые удовлетворяют $k = 1, 2, 3$ алгебраически независимым от F дифференциальным соотношениям (система Ψ)

$$\Psi(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}, x, y) = 0, \quad \Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k\}$$

т.е. ДС, вид которых не определен априори. Совокупная система уравнений $F = 0, \Psi = 0$ (система $F\Psi$) переопределена. Накладываются ограничения – ДП-условия на вид $\Psi(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}, x, y)$, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы соответствующая им система $F\Psi$ (ДП-система) имела решения (ДП-решения). Такие решения системы f отыскиваются зачастую легче, чем другие ее решения.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что путем дифференцирования по независимым переменным и исключения производных нельзя получить из ДП-системы новых дифференциальных уравнений первого порядка. При классификации ДП-решений последовательно рассматриваются ДП-системы с разными индексами k .

Было показано [2], что ввиду гиперболичности исходной системы ДС в данном случае следует искать в представлении

$$\Psi \equiv B_1 L \mathbf{u}_y + \psi(B_2 L \mathbf{u}_y, \mathbf{u}, y, x) = 0$$

При этом вид ДС задается выбором матриц B_1 и B_2 , в каждой строке которых только один ненулевой элемент, равный единице; матрица $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ ортогональная, в матрице B_1 k строк. ДП-условия имеют вид [2]

$$(D_x \Psi + Z \Lambda B_1' D_y \Psi - Z D_y F)|_{(F, \Psi)} = 0 \quad (2)$$

$$Z \Lambda - Z \Lambda B_1' Z = 0 \quad (3)$$

где D_x, D_y – операторы полного дифференцирования по x и y , $Z = B_1 + \psi_h B_2$, $h = B_2 L \mathbf{u}_y$ – вектор с $m - k$ -компонентами h_l ($l = 1, 2, \dots, m - k$), $\psi_h = [k \times (m - k)]$ – матрица с компонентами $(\psi_h)_{il} = \partial \psi_i / \partial h_l$ ($i = 1, 2, \dots, k; l = 1, 2, \dots, m - k$). Символом $(F\Psi)$ обозначено многообразие в пространстве переменных $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}, y, x)$, определяемое уравнениями $F = 0, \Psi = 0$ как алгебраическими соотношениями в этих переменных.

Было показано [2], что ДП-система $F\Psi$, состоящая из гиперболической системы m уравнений $F = 0$ и k ДС $\Psi = 0$, имеет $m - k$ семейств характеристик, которые входят в число m семейств характеристик системы $F = 0$. Для гиперболической системы ДС отыскиваются несколько проще, если исходная система записана в характеристической форме

$$F \equiv L_0 \mathbf{u}_x + \Lambda_0 L_0 \mathbf{u}_y - L_0 f = 0, \quad \Lambda_0 = L_0 L^{-1} \Lambda L L_0^{-1}$$

Здесь L_0 – матрица левых собственных векторов матрицы $L^{-1} \Lambda L$. Диагональные элементы матрицы Λ_0 – собственные значения матрицы $L^{-1} \Lambda L$ – в каждой точке (x, y) области определения решения системы (1) задают направления ее четырех характеристик:

$$y_1' = \frac{uv - AQ}{H} \leftrightarrow y = y_1(x), \quad y_{2,3}' = \frac{v}{u} \leftrightarrow y_{2,3} = y_{2,3}(x)$$

$$y_4' = \frac{uv + AQ}{H} \leftrightarrow y = y_4(x), \quad Q = \frac{\sqrt{\tau(q^2 - \tau A)}}{A}$$

При дозвуковых скоростях у матрицы $L^{-1}AL$ нет четырех вещественных собственных значений, есть лишь два совпавших значения, соответствующих траекториям частиц газа. Поэтому характеристическая форма для записи $F = 0$ здесь не используется.

1°. Пусть $B_1 = \parallel 1 \ 0 \ 0 \ 0 \parallel$. В этом случае ДС задает зависимость между распределением энтропии и интегралом Бернулли, в частности, для политропного газа между величинами $S = p\tau^\gamma$ и $I = q^2/2 + \gamma p\tau/(\gamma-1)$. Для данного случая из ДП-условий следует представление

$$\psi = y^v u \Phi(q^2, p, \tau), \quad q^2 \equiv u^2 + v^2$$

При этом функция $\Phi(q^2, p, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau A \Phi_q / q + \tau \Phi_\tau - A \Phi_p + A_p \Phi = 0$$

В частности, для политропного газа ($A = \gamma p$) общим решением последнего уравнения является $\Phi = \tau^{-\gamma} \phi(I, S)$ с произвольной функцией двух аргументов ϕ . На ДП-решениях через каждую точку (x, y) проходят три характеристики, при этом характеристика $y = y_2(x)$ — простая.

2°. Пусть $B_1 = \parallel 0 \ 1 \ 0 \ 0 \parallel$. В силу равенства

$$u u_y + v v_y + \tau p_y = u(u_y - v_x)$$

ДС можно взять в виде

$$u_y - v_x + y^v \psi = 0$$

Отсюда видно, что имеет место зависимость между энтропией, интегралом Бернулли и вихрем на решениях, удовлетворяющих этой ДС. Расписывая в этом случае условия (3), устанавливаем, что ψ не зависит от двух компонент вектора h : $\parallel 0 \ 0 \ 1 \ 0 \parallel Lu_y$ и $\parallel 0 \ 0 \ 0 \ 1 \parallel Lu_y$, т.е.

$$\psi = \psi(h_1, u, v, p, \tau, y, x), \quad h_1 = A\tau_y + \tau p_y$$

Условия (3) при этом принимают вид

$$[uD_x \Psi + v D_y \Psi - \psi_{h_1} (A D_y F_1 + \tau D_y F_1) - (u D_y F_2 + v D_y F_3)]|_{(F\Psi)} = 0 \quad (4)$$

Для того чтобы переопределенная система $F\Psi$ была в инволюции, необходимо, чтобы из соотношения (4) нельзя было определить производные v_y и p_y , т.е. оно должно быть тождеством по этим переменным. При учете этого требования и соотношения $\tau_y = (h_1 - \tau p_y)/A$ (расщепляя (4) по переменным v_y и p_y) получим

$$h_1 \psi_{h_1} (\tau A - u^2) A_p + \tau u^2 \psi_\tau + \tau u A \psi_u - u^2 A \psi_p + u^2 h_1 + (u^2 - \tau A) \psi = 0 \quad (5)$$

$$h_1 \psi_{h_1} v + u v \psi_u - u^2 \psi_v = v \psi \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & v [y \tau A \psi + v u^4 - A_p (u^2 y \psi + u^4)] h_1 \psi_{h_1} + h_1 u^2 v (y \psi + v u^2) + \\ & + v y \psi^2 (u^2 - \tau A) + \tau v u A (y \psi + v u^2) \psi_u + v y u^2 (u^2 - \tau A) \psi_y + \\ & + \tau v u^2 (y \psi + v u^2) \psi_\tau - v A u^2 (y \psi + v u^2) \psi_p + u^2 (u^2 - \tau A) \psi_x = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Построим общее решение уравнения (6)

$$\psi = u \Phi(w_1, w_2, p, \tau, y, x), \quad w_1 \equiv h_1 / u, \quad w_2 \equiv u^2 + v^2 \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в уравнения (5) и (7), получим

$$-w_1 A_p \Phi_{w_1} + \Phi + w_1 + 2\tau A \Phi_{w_2} + \tau \Phi_\tau - A \Phi_p = 0 \quad (9)$$

$$v w_1 \Phi_{w_1} - v \Phi + y \Phi_y + u \Phi_x / v = 0 \quad (10)$$

Рассмотрим уравнение (10). Если $v = 0$, то из соотношений (8) и уравнения (10) следует, что $\Phi_y = \Phi_x = 0$. Если $v = 1$, то общим решением уравнения (10) будет

$$\Phi = yg(\bar{w}_1, w_2, p, \tau), \quad \bar{w}_1 \equiv w_1/y$$

Поэтому общее решение уравнения (10) для обоих случаев ($v = 0$ и $v = 1$) можно записать в виде

$$\Phi = y^v g(\bar{w}_1, w_2, p, \tau), \quad \bar{w}_1 \equiv w_1/y^v \quad (11)$$

После подстановки выражения (11) в (9) имеем

$$-\bar{w}_1 A_p g_{\bar{w}_1} + 2\tau A g_{w_2} + \tau g_\tau - A g_p = -(g + \bar{w}_1) \quad (12)$$

Таким образом, вопрос определения функции ψ свелся к решению уравнения (12). При этом $\psi = uy^v g(\bar{w}_1, w_2, p, \tau)$.

В частном случае политропного газа функция

$$g = \frac{\bar{w}_1}{\gamma - 1} + \bar{w}_1^{1/\gamma} \phi\left(\frac{\bar{w}_1}{p}, I, S\right) \quad (13)$$

с произвольной функцией ϕ является общим решением уравнения (12).

У ДП-системы те же характеристики, что и в случае 1.

ДП-решения с одной ДС имеют произвол в три функции. В частности, в эти два класса ДП-решений входят все решения с постоянным интегралом Бернулли ($I = \text{const}$), все изэнтропические решения ($S = \text{const}$) и все безвихревые решения $u_y - v_x = 0$. Но в этих классах, очевидно, есть и более общие решения уравнений газовой динамики с переменными названными величинами. Других ДП-решений с одной ДС первого порядка у системы (1) нет. Случаи $B_1 = \|0, 0, 1, 0\|$ и $B_1 = \|0, 0, 0, 1\|$ приводят к противоречивым определяющим системам.

3°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Эти ДС определяют зависимость распределения энтропии и вихря от функции тока. Для компонент вектора $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ из ДП-условий следует представление

$$\psi_1 = y^v u \Phi_1(w_2, p, \tau), \quad \psi_2 = y^v u \Phi_2(w_2, p, \tau)$$

с функциями Φ_1, Φ_2 , удовлетворяющими уравнениям

$$2\tau A \Phi_{1w_2} + \tau \Phi_{1\tau} - A \Phi_{1p} + A_p \Phi_1 = 0$$

$$2\tau A \Phi_{2w_2} + \tau \Phi_{2\tau} - A \Phi_{2p} + \Phi_2 = \Phi_1$$

Для политропного газа последние уравнения имеют общее решение

$$\Phi_1 = (\gamma - 1)\tau^{-\gamma} \phi_1(I, S), \quad \Phi_2 = -\tau^{-\gamma} \phi_1(I, S) + \tau^{-1} \phi_2(I, S)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции своих аргументов, задают общее решение последней системы уравнений. У ДП-системы два семейства характеристик $y = y_1(x)$ и $y = y_4(x)$.

4°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ДР-условия выполнены только при $v = 0$. При этом

$$\psi_1 = u^2 \Phi, \quad \psi_2 = -\frac{u^3}{v\tau} \Phi$$

где либо $\Phi = 0$, либо $\Phi = v/[u(y-g)]$ с функцией $g = g(\alpha, \beta)$, удовлетворяющей уравнению Холфа

$$g_\alpha + gg_\beta = 0; \quad \alpha \equiv v/u, \quad \beta \equiv x + u\alpha$$

В этом известном классе течений газа вихрь, модуль скорости, плотность и давление постоянны вдоль линий тока, которые являются концентрическими окружностями. У ДП-системы $y = y_2(x)$ и $y = y_3(x)$ являются кратной характеристикой.

Других ДП-решений с двумя ДС первого порядка у системы (1) нет.

ДП-решения с двумя ДС обладают двухфункциональным произволом. По сравнению с общим решением системы (1) их произвол существенно сужен, его ограничивают одновременно две ДС. В частности, из п. 3° видно, что к этому классу относятся течения с постоянными энтропией и интегралом Бернулли одновременно. Было показано [2], что к ним через характеристики и через линии разрывов могут примыкать более общие ДП-решения с одной ДС или более вырожденные с тремя ДС, которые рассмотрим далее.

5°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

В этом случае не будем приводить развернутой записи ДП-условий ввиду их громоздкости. Из второй части ДП-условий следует, что

$$\psi_3 = \pm[\tau(u^2 + v^2 - A\tau)/A]^{1/2} p_y + \omega(u, y, x)$$

Выяснить вопрос об общем их решении пока не удалось. При $v = 0$ и однородных связях ($\psi_1 = \psi_2 = \omega = 0$) видно, что ДП-условия выполнены. ДП-решением в этом случае является волна Прандтля – Майера [6]. Найдены и другие отдельные решения ДП-условий, например, в случае политропного газа при $v = 0$ имеем

$$\psi_1 = (\gamma - 1)u\tau^{-\gamma} f(I, S), \quad \psi_2 = u[(\gamma - 1)I/(\gamma S\tau) - \tau^{-\gamma}] f(I, S), \quad \omega = 0$$

f – произвольная функция своих аргументов. ДС неоднородные. В общем случае характеристики уравнений газовой динамики на таких решениях криволинейны. У ДП-системы одно семейство характеристик: либо $y = y_1(x)$, либо $y = y_4(x)$ в зависимости от знака $(\psi_3)_{p_y}$.

6°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Из второй части ДП-условий следует, что

$$(\psi_1)_h = (\psi_2)_h = 0, \quad (\psi_3)_h = \pm[\tau(u^2 + v^2 - ft)/f]^{-1/2}, \quad h = -vu_y + uv_y$$

В этом случае ДС совпадают с ДС предыдущего случая (подслучай функциональной зависимости энтропии от компонент скорости неинтересен с точки зрения анализа ДС и здесь не рассматривается). При $v = 0$ однородные ДС удовлетворяют ДП-условиям. У ДП-системы одно семейство характеристик $y = y_1(x)$.

7°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Из второй части ДП-условий следует, что

$$(\psi_1)_h = (\psi_3)_h = 0, \quad h = \tau p_y + A \tau_y$$

Отсюда устанавливаем, что при $v = 0$ и однородных ДС ДП-условия выполнены. У ДП-системы одно семейство характеристик $y = y_2(x)$.

8°. Пусть

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Из второй части ДП-условий следует, что

$$(\psi_2)_h = (\psi_3)_h = 0, \quad h = uu_y + vv_y + \tau p_y$$

и при $v = 0$ однородные ДС удовлетворяют ДП-условиям. Если $(\psi_1)_h \neq 0$, то в этом основном случае с точностью до обозначения функциональной зависимости ДС совпадают с ДС п. 7°. Случай $(\psi_1)_h = 0$ — отдельный. Другие решения не найдены. У ДП-системы одно семейство характеристик $y = y_2(x)$.

Вернемся к ДП-системе п. 5°, которая получается на основе решения ДП-условий, указанных в конце п. 5°. Пусть у системы $F \Psi$ из двух возможных семейств характеристик будет семейство $y = y_4(x)$. Вдоль характеристики ДП-системы имеет место обычное соотношение вдоль четвертого семейства характеристик системы F

$$l^4 \left(f_s - \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (14)$$

и три соотношения

$$B_1 L_0 \left(f_s - \frac{du}{dx} \right) + B_1 (\Lambda_0 - y'_{x,4} E_4) B_1^* \Psi = 0 \quad (15)$$

— следствия трех ДС системы $F \Psi$ [2] (l^4 — четвертый собственный вектор матрицы L_0). Эти четыре соотношения вместе с соотношением

$$y'_{x,4} = (uv + AQ) / H \quad (16)$$

являются системой пяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пяти неизвестных $u(x)$, $v(x)$, $p(x)$, $\tau(x)$, $y(x)$.

Приведем более подробную запись соотношений (14), (15)

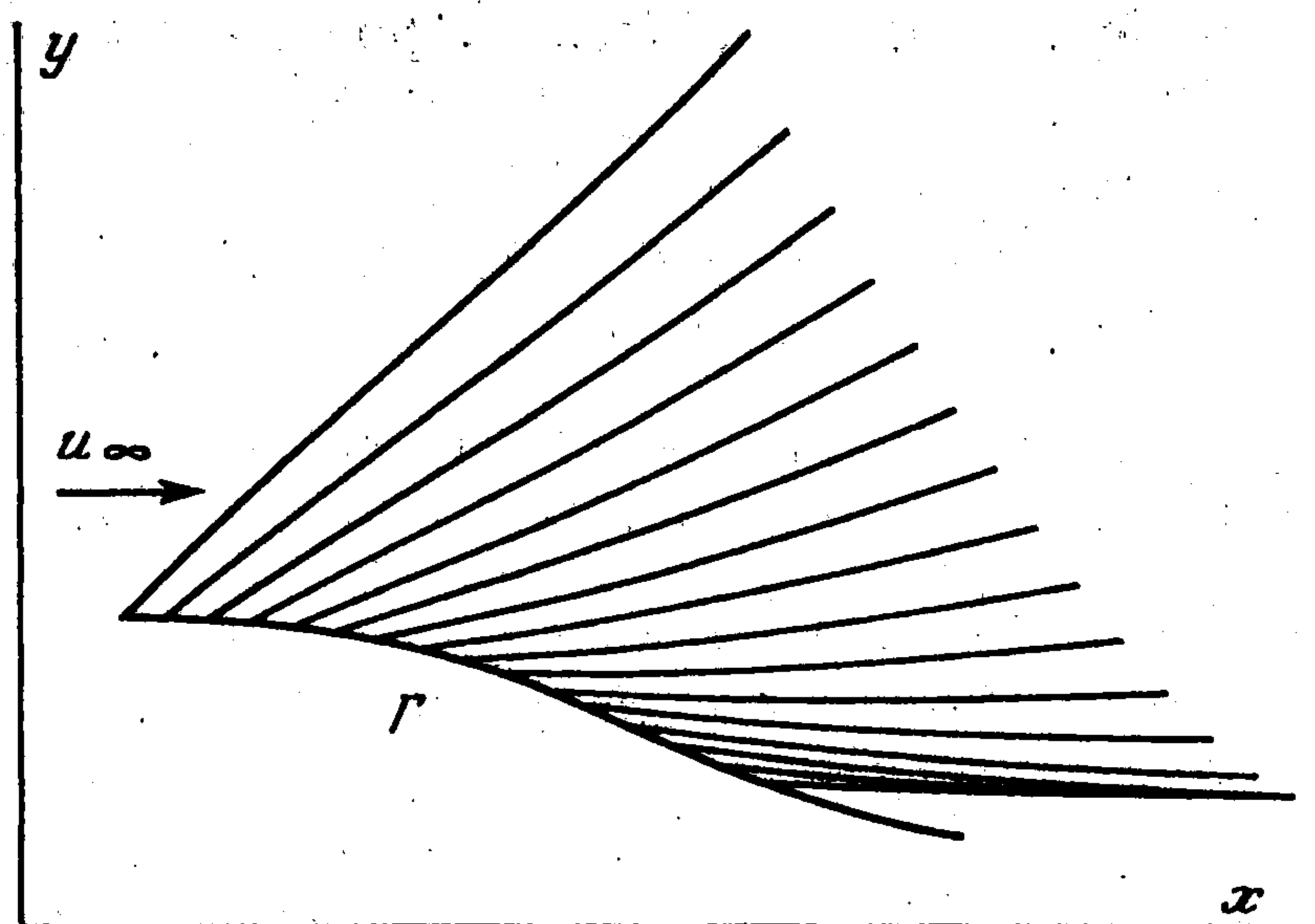
$$\frac{du}{dx} = \frac{A}{q^2 H} [Q(u\omega - u\psi_2) - \tau(u\omega + v\psi_2)], \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{A}{uq^2 H} (u\omega + v\psi_2)(Qu + v\tau)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{A\omega}{H}, \quad \frac{d\tau}{dx} = -\frac{u\tau\omega + \psi_1(Qu + v\tau)}{uH}$$

Эта система позволяет решить задачу Коши и вдоль характеристики y_4 определить вектор u , если он задан в некоторой начальной точке (y_0, x_0) . Функции ψ_1 , ψ_2 , ω находятся как решения ДП-системы. Для случая неоднородных ДС частное решение ψ_1 , ψ_2 , ω приведено в 5°.

Пусть вдоль какой-нибудь линии $\Gamma: y = y(x)$, не являющейся характеристикой четвертого семейства, даны значения вектора u . Используя их как данные Коши в точках линии Γ , в примыкающей к ней области локально строим решение системы $F \Psi$ [2], покрыв ее характеристиками семейства y_4 , начало которых на Γ .

На решении системы $F \Psi$ между четырьмя компонентами вектора u на произ-



вольной линии Γ имеют место три соотношения, отличающиеся от (15) тем, что в них величина y' равна тангенсу угла наклона касательной к Γ . В частности, вдоль линии тока $y' = v/u$. Если одну из компонент вектора u задать в виде функции от x , то указанные три уравнения вместе с уравнением для $y(x)$ позволяют вдоль выбранной линии построить данные Коши, не противоречащие системе $F\Psi$. Если вдоль Γ вектор u брать переменным, то линия получается кривой. Около вогнутой стенки характеристики начинают пересекаться в области течения. Достоинством построенного с помощью процедур высокой точности (Рунге – Кутта) численного решения-теста является то, что точка пересечения характеристик – начало висячего скачка уплотнения, как и другие особенности решений, передается относительно плохо общими численными методами решения краевых задач для уравнений с частными производными.

Замечание. ДП-решения данного класса в общем случае имеют криволинейные характеристики, вдоль которых вектор u переменный. Но в частных случаях на характеристиках u может быть постоянно, и они прямолинейны. В этом случае ДП-решения являются обобщенными волнами Прандтля – Майера. В общем же случае ранее известная техника построения обобщенных волн Прандтля – Майера [7, 8] для построения ДП-решений данного класса не проходит. Соотношения (14) – (16) вместе с данными Коши на линии Γ , не противоречащими ДС, определяют представление ДП-решений данного класса в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в осесимметричном случае удастся построить решение ДП-условий, аналогичное представление получится и в осесимметричном случае, и позволит строить решения одним способом в обоих случаях.

На фигуре приведено поле характеристик, полученное в одном из численных расчетов рассматриваемого ДП-решения. Начальная линия Γ является линией тока. Расчет проведен согласно изложенной здесь схеме построения численного решения. Пока остается открытым вопрос, какое решение будет примыкать к построенному решению через висячий скачок и характеристику, выходящую из начала висячего скачка и падающую на обтекаемую стенку.

Было показано [2], что с помощью отдельных ДП-решений из различных классов (здесь из числа, указанных в разных пунктах) путем непрерывного примыкания через характеристики системы F или с разрывом значений u на линии разрыва и выполнением законов сохранения можно строить обобщенные решения системы F . Здесь много случаев возможных примыканий перечисленных решений.

В приложениях метода ДС весьма полезно применение компьютерной алгебры [2, 9–11]. В данной работе для проведения аналитических выкладок на всех этапах вплоть до перевода полученных арифметических выражений в операторы языка программирования для численного решения задачи использовалась система компьютерной алгебры REDUCE [12].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00515).

ЛИТЕРАТУРА

1. Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. Л.: Наука, 1964. Т. 2. С. 613–621.
2. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
3. Cartan E. Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris: Hermann, 1945. 215 p.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 432 с.
5. Kuranishi M. Lectures on involutive systems of partial differential equations. Sao Paulo: Publ. Soc. Math., 1967. 77 p.
6. Meyer R.E. On waves of finite amplitude in ducts. I. Wave fronts. II. Waves of moderate amplitude // Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1952. T. 5. Pt. 3. P. 257–291.
7. Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y.: Acad. press, 1958. 514 p.
8. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
9. Шурыгин В.А., Яненко Н.Н. О реализации на электронных вычислительных машинах алгебраическодифференциальных алгоритмов // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1961. Вып. 6. С. 33–43.
10. Арайс Е.А., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214. № 4. С. 737–738.
11. Ganzha V.G., Meleshko S.V., Shapeev V.P. Automation of Compatibility Analysis of Quasilinear PDE Systems with the Aid of the REDUCE System // Computer Algebra and Its Applications to Mechanics. N.Y.: Nova Science Publishers, 1993. P. 89–96.
12. Hearn A.C. REDUCE Users' Manual. Stanford, Calif., 1967. [3] 53 p.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.II.1999

e-mail: shapeew @ itam. nsc.ru
meleshko @ itam. nsc.ru