

УДК 533.6

© 1999 г. С.П. Баутин

О ЗАДАЧЕ ПОЛУЧЕНИЯ НАПЕРЕД ЗАДАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА

На примере одномерных цилиндрически- и сферически-симметричных течений рассматривается следующая задача о получении наперед заданного распределения плотности газа: требуется с заданным известным течением газа (фоновым течением) непрерывно состыковать другое, искомое течение газа, распределение плотности которого в фиксированный момент времени описывается некоторой, наперед заданной функцией. Показывается, что эта задача является характеристической задачей Коши стандартного вида, для которой в случае аналитичности входных данных справедлив аналог теоремы Ковалевской. Рассматриваются и другие подобные задачи: в искомом течении требуется получить наперед заданное распределение скорости газа; наперед заданная плотность газа искомого течения строго больше плотности газа фонового течения (течения с разрывом). В случае аналитичности входных данных этих задач также доказываются существование и единственность решений, в том числе кусочно-аналитических решений. Доказанные теоремы переносятся на случай неодномерных течений.

В качестве содержательного примера задачи о получении наперед заданных распределений параметров газа можно привести задачу о получении наперед заданного распределения плотности, которая связана с задачей о безударном сильном сжатии газа [1] и с задачей об оптимальном сжатии газовых слоев [2, 3]. Кроме этого, получение наперед заданного распределения скорости газа можно связать с процессом получения потока газа с большими скоростями.

Ниже показано, что в задачах о получении наперед заданных распределений газодинамических параметров, непрерывно примыкающих к фоновому течению (ФТ), произвольно можно задать распределение только одного газодинамического параметра. Например, в некоторый момент времени можно получить наперед заданное распределение плотности газа, но распределения остальных газодинамических параметров тогда уже определяются однозначно. Или можно в некоторый момент времени задать произвольно скорость газа; тогда плотность и энтропия определяются в этот момент времени однозначно. Подчеркнем, что наряду с этим одним произвольно заданным распределением, также ФТ является исходным произвольным элементом рассматриваемой задачи.

Вторым важным аспектом задачи о получении наперед заданных распределений параметров газа является то, что эти задачи необходимо решать в обратном направлении изменения времени. В газовой динамике подобный подход встречается, когда вначале каким-либо способом (с использованием свойств симметрии течения, автомодельности, линейности по части переменных и т.п.) строится точное решение системы уравнений газовой динамики, а затем под это решение подбирается содержательная начально-краевая задача. Тогда рассмотрение построенного решения при обратном изменении времени однозначно приводит как к распределениям параметров газа в более ранние моменты времени, так и к законам внешнего воздействия на газ, которые "порождают" данное течение газа.

Отличие приведенного ниже подхода от традиционного состоит в следующем. Рассмотрение в обратном направлении изменения времени будет "отталкиваться" не от тех распределений, которые уже "навязаны" построенным точным решением, а от произвольно задаваемого распределения одного из газодинамических параметров, непрерывно примыкаю-

щего к заданному ФТ. Решение системы уравнений газовой динамики, как показано ниже, в этом случае строится однозначно. Тогда, варьируя наперед заданные как распределение, так и ФТ, можно будет рассматривать и другие аспекты задачи: например, область существования решения, которая определяет, в том числе, массу газа в построенном течении, или внешние энергетические затраты для получения априори заданной плотности газа, или, наконец, физическую возможность создания ФТ, к которому примыкает найденное решение.

1. Получение наперед заданного распределения плотности газа, непрерывно примыкающего к фоновому течению. Вначале для наглядности и простоты изложения рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + \delta\sigma\left(u_r + v\frac{u}{r}\right) &= 0 \\ u_t + \frac{1}{\delta}s^2\sigma\sigma_r + uu_r + \frac{2}{\gamma}\sigma^2ss_r &= 0 \\ s_t + us_r &= 0 \\ \left(\sigma = \rho^\delta > 0, \delta = \frac{(\gamma-1)}{2}, s = A(S) > 0, r = (x_1^2 + \dots + x_{v+1}^2)^{1/2}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

описывающая одномерные цилиндрически ($v = 1$) и сферически ($v = 2$) симметричные течения идеального политропного газа. Здесь ρ – плотность газа; γ – константа в уравнении состояния $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$, $\gamma > 1$, p – давление, S – энтропия, u – скорость газа. При этом скорость звука газа задается соотношением $c = s\sigma$. Заметим, что доказанные ниже теоремы переносятся также и на случай нормального газа с произвольным уравнением состояния $p = p(S, \rho)$.

Введем вектор искомых функций

$$U = \begin{pmatrix} s \\ u \\ \sigma \end{pmatrix}$$

Пусть в некоторой окрестности точки $(t = t_*, r = r_*)$, $r_* > 0$ задано какое-либо фоновое течение (ФТ)

$$U = U^0(t, r)$$

где компоненты вектора $U^0(t, r)$ – функции $s^0(t, r)$, $u^0(t, r)$, $\sigma^0(t, r)$ являются решением системы (1.1). Тогда известны и звуковые характеристики $C^\pm$ заданного ФТ, проходящие через точку $(t = t_*, r = r_*)$. Выберем одну из них: $r = r_0(t)$, например, C^+ . Тогда ФТ рассматривается справа от C^+ , а новое искомое течение – слева от C^+ . При выборе в качестве разделяющей характеристику C^- имели бы ФТ слева от C^- , а искомое течение справа от C^- . На выбранной характеристике (для которой сохраним обозначение $C^\pm$) известны значения газодинамических параметров ФТ $U^0(t, r)|_{r=r_0(t)} = U_{00}(t)$, т.е.

$$s|_{C^\pm} = s_{00}(t), \quad u|_{C^\pm} = u_{00}(t), \quad \sigma|_{C^\pm} = \sigma_{00}(t) \quad (1.2)$$

К системе (1.1) присоединим "начальные данные" (1.2), а также одно дополнительное "краевое условие"

$$\sigma|_{t=t_*} = \sigma_*(r) \quad (1.3)$$

Функция $\sigma = \sigma_*(r)$ связана соотношением $\sigma_*(r) = \rho_*^\delta(r)$ с наперед заданным в момент

$t = t_*$ требуемым распределением плотности газа $\rho = \rho_*(r)$. Предполагается, что наперед заданное распределение плотности в момент времени $t = t_*$ в точке $r = r_*$ непрерывно стыкуется с плотностью газа ФТ, т.е.

$$\sigma_*(r_*) = \sigma_{00}(t_*)$$

Заметим, что для указанных в (1.2) функций выполняется [4] дифференциальная связь

$$\frac{dr_0(t)}{dt} = u_{00}(t) \pm s_{00}(t) \sigma_{00}(t) \quad (1.4)$$

Теорема 1. Задача (1.1)–(1.3) является характеристической задачей Коши (ХЗК) стандартного вида, у которой в случае аналитичности функций

$$r_0(t), s_{00}(t), u_{00}(t), \sigma_{00}(t), \sigma_*(r)$$

существует в некоторой окрестности точки $(t = t_*, r = r_*)$ единственное аналитическое решение.

Для того чтобы привести поставленную ХЗК к стандартному виду [5, 6], делается замена переменных $x = r - r_0(t)$, $y = t - t_*$ с якобианом, равным единице при условии конечности значения $r'_0(t)$. При этой замене характеристика $C^\pm$ становится координатной осью $x = 0$, а момент $t = t_*$ – осью $y = 0$. В результате рассматриваемая ХЗК перейдет в следующую задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \sigma_x + \delta \sigma u_x + \sigma_y + v \delta \frac{\sigma u}{[x + r_0(y)]} &= 0 \\ \delta s^2 \sigma \sigma_x + \tilde{u} u_x + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_x + u_y &= 0 \\ \tilde{u} s_x + s_y &= 0 \\ \sigma(x, y)|_{x=0} &= \sigma_{00}(y), \quad u(x, y)|_{x=0} = u_{00}(y) \\ s(x, y)|_{x=0} &= s_{00}(y), \quad \sigma(x, y)|_{y=0} = \sigma_*(x), \quad \sigma_*(0) = \sigma_{00}(0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\tilde{u} = u - r'_0(y)$.

Поскольку на характеристике $C^\pm$ выполняется условие (1.4), то

$$\tilde{u}|_{x=0} = \mp s_{00}(y) \sigma_{00}(y) \neq 0$$

в некоторой окрестности точки $y = 0$. Поэтому функция $\tilde{u}^{-1}$ будет аналитической в некоторой окрестности точки $(x = 0, y = 0)$. Тогда с помощью третьего уравнения задачи (1.5) можно исключить из второго уравнения производную s_x . Переставив местами уравнения (для удобства дальнейших выкладок), систему уравнений из задачи (1.5) запишем в виде

$$AU_x + BU_y = C \quad (1.6)$$

$$U = \begin{pmatrix} s \\ u \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \tilde{u} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} & \frac{1}{\delta} s^2 \sigma \\ 0 & \delta \sigma & \tilde{u} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\gamma} \frac{s \sigma^2}{\tilde{u}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \sigma \frac{\sigma u}{x + r_0(y)} \end{pmatrix}$$

Для получившейся задачи (система (1.6) и начально-краевые условия задачи (1.5)) проверим выполнение условий аналога теоремы Ковалевской [6].

Аналитичность всех входных данных задачи следует из вида системы и из предположения об аналитичности функций σ_{00} , u_{00} , s_{00} , σ_* , r_0 . В матрице A в левом верхнем углу стоит отличный от нуля определитель размером 2×2 . В качестве матриц $T_1(y)$, $T_2(y)$, с помощью которых далее преобразуется система (1.6), берутся следующие:

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta\sigma_{00}(y) & \tilde{u}_{00}(y) \end{vmatrix}$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\delta}s_{00}^2(y)\sigma_{00}(y) \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{00}(y) \end{vmatrix}$$

$$\det T_1|_{y=0} = \det T_2|_{y=0} = \tilde{u}_{00}(y)|_{y=0} \neq 0, \quad \tilde{u}_{00}(y) = u_{00}(y) - r'_0(y)$$

Тогда матрица $(T_1 A T_2)|_{x=0}$ имеет нужный вид, т.е. в ней равны нулю все элементы, окаймляющие левый верхний минор размером 2×2 . В матрице $(T_1 B T_2)|_{x=0}$ элемент, стоящий в правом нижнем углу, равен $2s_{00}^2(y)\sigma_{00}^2(y)$, т.е. отличен от нуля при $y = 0$. Вектор новых неизвестных функций

$$V = T_2^{-1}U = \frac{1}{\tilde{u}_{00}} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{u}_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u}_{00} & \frac{s_{00}^2\sigma_{00}}{\delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s \\ u \\ \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s \\ u + \frac{s_{00}^2\sigma_{00}}{\delta\tilde{u}_{00}}\sigma \\ \frac{1}{\tilde{u}_{00}}\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$$

таков, что задание при $y = 0$ условия для функции σ эквивалентно заданию при $y = 0$ условия для функции v_3 .

Следовательно, рассматриваемая для системы (1.6) ХЗК, а значит ХЗК (1.5) и ХЗК (1.1)–(1.3), есть ХЗК стандартного вида, для которых справедлив аналог теоремы Ковалевской [6].

Теорема 1 обеспечивает существование аналитического решения ХЗК (1.1)–(1.3) в некоторой полной окрестности рассматриваемой точки ($t = t_*$, $r = r_*$). Но, как уже отмечалось выше, этим решением надо будет пользоваться только в "четверти" указанной окрестности: по одну сторону от характеристики $C^\pm$ (по другую сторону от $C^\pm - \Phi T$) и при $t \leq t_*$ (цель рассматриваемой задачи – получить к моменту времени $t = t_*$ нужное распределение $\sigma_*(r)$).

В окрестности точки ($t = t_*$, $r = r_*$) решение можно единственным образом представить в виде двойного ряда по степеням $(t - t_*)^k(r - r_*)^l$, коэффициенты такого ряда будут постоянными. Решение ХЗК (1.1)–(1.3) можно [6] также единственным образом представить в виде ряда по степеням $[r - r_0(t)]^k$, коэффициенты в этом случае будут функциями от t . И если ΦT является однородным покоящимся газом, то, используя методику работ [7, 8], можно доказать неограниченность по переменной t области сходимости этого ряда. В некоторых редких случаях решение ХЗК (1.1)–(1.3) выписывается в квадратурах или даже в виде конечной формулы.

Еще раз подчеркнем, что теорема 1 носит локальный характер и поэтому не исключается возможность появления вне указанных окрестностей особенностей в течении. Например, бесконечных градиентов и, как следствие, ударных волн.

Используя решение ХЗК (1.1)–(1.3), являющееся единственным, можно однозначно восстановить законы внешнего воздействия на газ, которые и приводят в моменты времени $t = t_*$ к наперед заданному распределению плотности $\rho = \rho_*(r)$.

Например, в области существования решения ХЗК (1.1)–(1.3) на характеристике $C^\pm$ выбирается точка $(t = t_0, r = r_0(t))$, $t_0 < t_*$ и решается задача Коши

$$\frac{dr^0(t)}{dt} = u(t, r^0(t)), \quad r^0(t_0) = r_0(t_0) = r_0^0$$

Если в правой части в качестве функции $u(t, r)$ фигурирует скорость газа течения, построенного при решении ХЗК (1.1)–(1.3), то, во-первых, такая задача имеет единственное аналитическое решение, а во-вторых, функция $r = r^0(t)$ описывает траекторию движения некоторой частицы газа. Эту траекторию можно взять за траекторию движения непроницаемого поршня, стартующего в момент времени $t = t_0$ из точки $r = r_0(t_0)$ и к моменту времени $t = t_*$ создающего наперед заданное распределение плотности.

Пусть зафиксировано ФТ (например, однородный покой) и пусть решение ХЗК (1.1)–(1.3) есть волна сжатия со строго монотонным распределением (1.3) плотности газа в момент $t = t_*$. Нетрудно доказать, что тогда можно точку (t_0, r_0^0) взять так близко к точке (t_*, r_*) , что указанная траектория движения частицы газа при $t_0 \leq t \leq t_*$ не выйдет из области существования решения ХЗК (1.1)–(1.3). Это связано с тем, что локально решение ХЗК (1.1)–(1.3), а следовательно, и скорость газа этого решения, определяются первыми слагаемыми рядов, анализ которых и приводит к данному утверждению.

Если решением ХЗК (1.1)–(1.3) является волна разрежения, то решение последнего дифференциального уравнения надо строить в обратном направлении изменения времени из точки (t_*, r_1^0) , лежащей в области существования решения ХЗК (1.1)–(1.3) достаточно близко к точке (t_*, r_*) . Тогда траектория движения рассматриваемой частицы газа в некоторый момент $t = t_0 < t_*$ пересечет характеристику $C^\pm$ и также не выйдет из области существования решения ХЗК (1.1)–(1.3).

Заметим, что в обоих случаях в момент $t = t_0$ к поршню будет примыкать только ФТ, являющееся произвольным элементом (например, однородным покоем) в задаче о получении наперед заданных распределений.

В некоторых физических экспериментах легче просто в заданной точке пространства поддерживать необходимое давление. Для того чтобы узнать требуемую закономерность, достаточно рассмотреть решение ХЗК (1.1)–(1.3) в фиксированной точке $r = r_0^0$, лежащей по соответствующую сторону от характеристики $C^\pm$.

Заметим, что если в момент $t = t_*$ надо получить наперед заданное распределение не функции σ , а функции u , т.е.

$$u(t, r)|_{t=t_*} = u_*(r), \quad u_*(r_*) = u_{00}(t_*)$$

то такая новая ХЗК

$$\tilde{u}s_x + s_y = 0$$

$$\tilde{u}\sigma_x + \delta\sigma u_x + \sigma_y + v\delta \frac{\sigma u}{[x + r_0(y)]} = 0$$

$$\frac{1}{\delta} s^2 \sigma \sigma_x + \tilde{u}u_x - \frac{2}{\gamma} \frac{s\sigma^2}{\tilde{u}} s_y + u_y = 0$$

$$s(x, y)|_{x=0} = s_{00}(y), \quad \sigma(x, y)|_{x=0} = \sigma_{00}(y), \quad u(x, y)|_{x=0} = u_{00}(y)$$

$$u(x, y)|_{y=0} = u_*(x), \quad u_*(0) = u_{00}(0)$$

тоже будет являться ХЗК стандартного вида, для которой справедлив аналог теоремы Ковалевской [5, 6]. Убедиться в этом можно непосредственно, взяв за новые матрицы $T_1^1(y)$, $T_2^1(y)$ такие:

$$T_1^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta\sigma_{00} & \tilde{u}_{00} \end{vmatrix}, \quad T_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\sigma_{00} \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{00} \end{vmatrix}$$

И наконец, отметим последний факт, связанный с ХЗК (1.1)–(1.3). Если систему уравнений (1.6) умножить слева на T_1 и положить $x = 0$, то в третьем уравнении коэффициенты перед всеми выводящими с поверхности $x = 0$ производными s_x , u_x , σ_x будут тождественными нулями. Поэтому получившееся соотношение будет необходимым условием разрешимости ХЗК с начальными данными на звуковой характеристике для системы уравнений газовой динамики в цилиндрически- и сферически-симметричном случае

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \sigma_{00} s'_{00} + s_{00} \sigma'_{00} + v \delta \frac{s_{00} \sigma_{00} u_{00}}{r_0} \pm \delta u'_{00} = 0 \quad (1.7)$$

которое связывает только внутренние для поверхности $x = 0$ производные от искомых функций. При выводе этого равенства учитывалось соотношение (1.4) и то, что в рассматриваемых задачах $\sigma_{00}(y) > 0$.

Напомним, что в равенстве (1.7) функции σ_{00} , s_{00} , u_{00} фактически зависят от времени ($y = t - t_*$), и они задают значения газодинамических параметров на звуковой характеристике $C^\pm$: $r = r_0(y)$. Если функции σ_{00} , s_{00} , u_{00} – значения какого-то решения системы уравнений газовой динамики, рассматриваемого на $C^\pm$, то для них равенство (1.7) выполняется автоматически. Если же эти функции взяты произвольными, то помимо условия (1.4) (обеспечивающего то, что линия $r = r_0(t)$ является звуковой характеристикой), на функции σ_{00} , s_{00} , u_{00} необходимо накладывать дополнительную дифференциальную связь – условие (1.7).

Доказательство теоремы 1 (и ее аналога при задании $u|_{t=t_*}$) практически дословно повторяется в многомерном случае, когда вектор искомых функций U зависит от t , x_1 , x_2 или от t , x_1 , x_2 , x_3 . Для этого соответствующим образом [5] делается переход в пространство новых независимых переменных (в котором поверхность $C^\pm$ становится координатной плоскостью) и показывается, что получившаяся ХЗК также является ХЗК стандартного вида.

2. Получение наперед заданного разрывного распределения плотности газа. Пусть, как и выше, в некоторой окрестности точки $(t = t_*, r = r_*)$ задано ФТ U^0 , его звуковая характеристика $C^\pm$ и (1.2) – значения параметров ФТ на $C^\pm$. Также задана и функция (1.3), но в отличие от рассмотренного случая пусть имеет место неравенство

$$\sigma_*(r_*) > \sigma_{00}(t_*)$$

т.е. наперед заданное распределение плотности в момент $t = t_*$ в точке $r = r_*$ строго больше плотности ФТ в точке состыковки.

Для того чтобы в момент времени $t = t_*$ получить разрывное распределение функции

$$\sigma(t, r)|_{t=t_*} = \begin{cases} \sigma_{00}(r) & \text{для } r \text{ из области определения ФТ} \\ \sigma_*(r) & \text{для } r \text{ из области определения искомого течения} \end{cases}$$

надо будет к ФТ пристыковать два новых течения газа.

Первое из искомых течений будет обобщением простой центрированной волны Римана на случай цилиндрически- и сферически-симметричных течений. В качестве

"начальных условий" это течение должно удовлетворять равенствам (1.2), а "краевое условие", заданное в момент $t = t_*$, должно описать вертикальную прямую в плоскости (r, σ)

$$r = r_*, \quad \sigma \geq \sigma_{00}(t_*) \quad (2.1)$$

Решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) также передает получение наперед заданного распределения плотности, непрерывно примыкающего к заданному ФТ. Однако в этом течении к моменту $t = t_*$ будет происходить неограниченное сжатие газа: при $t_1 \rightarrow t_* - 0$ график функции $\sigma = \sigma(t, r)|_{t=t_1}$ переходит в прямую (2.1).

Ясно, что решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) в пространстве переменных t, r будет иметь особенность.

Чтобы раскрыть эту особенность, поменяем ролями зависимые и независимые переменные: t, σ возьмем за новые независимые переменные, а новыми искомыми функциями тогда будут r, u, s . При такой замене задача (1.1), (1.2), (2.1) перейдет в задачу

$$\begin{aligned} r(u - r_t) + \delta \sigma(r u_\sigma + v u r_\sigma) &= 0 \\ r_\sigma u_t + (u - r_t) u_\sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_\sigma + \frac{1}{\delta} \sigma s^2 &= 0 \\ r_\sigma s_t + (u - r_t) s_\sigma &= 0 \\ r(t, \sigma)|_{C^\pm} &= r_0(t), \quad u(t, \sigma)|_{C^\pm} = u_{00}(t) \\ s(t, \sigma)|_{C^\pm} &= s_{00}(t), \quad r(t, \sigma)|_{t=t_*} = r_*, \quad r_* = \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где звуковая характеристика $C^\pm$ задана в виде $\sigma = \sigma_{00}(t)$ и функции $r_0(t), \sigma_{00}(t), s_{00}(t), u_{00}(t)$ удовлетворяют соотношениям (1.4), (1.7).

Теорема 2. Задача (2.2) является ХЗК стандартного вида, у которой в случае аналитичности функций

$$r_0(t), \quad \sigma_{00}(t), \quad u_{00}(t), \quad s_{00}(t)$$

существует в некоторой окрестности точки $(t = t_*, \sigma = \sigma_{00}(t_*))$ единственное аналитическое решение.

Доказательство теоремы 2 приведено в [9], где решение задачи (2.2) применено для описания истечения газа в вакуум.

Если решение ХЗК (2.2) представить в виде рядов по степеням $(t - t_*)^k$ (коэффициенты таких рядов будут функциями от σ), то методикой из работ [7–9] доказывается, что по переменной σ ($\sigma \geq 0$) область сходимости этих рядов неограничена.

Тогда для любого конечного значения $\sigma^* = \sigma_*(r_*)$ можно рассмотреть задачу

$$r_t(t, \sigma_1(t)) + r_\sigma(t, \sigma_1(t)) \frac{d\sigma_1(t)}{dt} = u(t, \sigma_1(t)) \pm s(t, \sigma_1(t)) \sigma_1(t) \quad (2.3)$$

$$\sigma_1(t)|_{t=t_*} = \sigma^*$$

Функции $r(t, \sigma), u(t, \sigma), s(t, \sigma)$ являются решением ХЗК (2.2).

Можно показать, что поскольку ХЗК (2.2) имеет аналитическое решение, то и задача (2.3) имеет аналитическое решение. Функция $\sigma = \sigma_1(t)$, являющаяся решением этой задачи, задает в пространстве независимых переменных t, σ характеристику $C_1^\pm$ решения ХЗК (2.2), выходящую из точки $(t = t_*, \sigma = \sigma^*)$. Эту кривую $\sigma = \sigma_1(t)$ необходимо строить при $t \leq t_*$. Тогда функция $r = r(t, \sigma_1(t)) \equiv r_1(t)$ определяет характеристику $C_1^\pm$ построенного течения в пространстве независимых переменных t, r .

$C_1^\pm$ выходит из точки $(t = t_*, r = r_*)$ в обратном направлении изменения времени. На этой характеристике $C_1^\pm$ значения параметров газа – аналитические функции

$$\sigma = \sigma_1(t), \quad u = u(t, \sigma_1(t)) \equiv u_1(t), \quad s = s(t, \sigma_1(t)) \equiv s_1(t)$$

определяемые из решения ХЗК (2.2).

Еще раз подчеркнем, что ХЗК (2.2) решается в пространстве независимых переменных t, σ и особенностей не имеет. В пространстве переменных t, r решение ХЗК (2.2) описывает течение, являющееся обобщением простой центрированной волны Римана и имеющее в точке $(t = t_*, r = r_*)$ особенность – предельные значения газодинамических параметров в этой точке разные на разных прямых, входящих в эту точку.

Теперь в задаче о получении заданного разрывного распределения плотности газа построим второе течение.

Для этого к системе (1.1) присоединим как "начальные условия"

$$\sigma(t, r)|_{C_1^\pm} = \sigma_1(t), \quad u(t, r)|_{C_1^\pm} = u_1(t), \quad s(t, r)|_{C_1^\pm} = s_1(t) \quad (2.4)$$

поставленные на характеристике $C_1^\pm: r = r_1(t)$, так и "краевое условие" (1.3).

Поскольку $\sigma_1(t_*) = \sigma_*(r_*)$, то получившаяся ХЗК (1.1), (2.4), (1.3) попадает под действие теоремы 1 и следовательно, у нее имеется единственное аналитическое решение. Это решение, во-первых, в момент времени $t = t_*$ имеет наперед заданное распределение плотности, а во-вторых, через звуковую характеристику $C_1^\pm$ непрерывно примыкает к обобщению простой центрированной волны Римана – к решению ХЗК (2.2).

Таким образом, последовательное решение задачи (2.2) и задачи (1.1), (2.4), (1.3) дает решение задачи о получении наперед заданного разрывного распределения плотности.

Если в момент времени $t = t_*$ необходимо получить наперед заданное разрывное распределение скорости газа

$$u(t, r)|_{t=t_*} = u_*(r), \quad u_*(r_*) \neq u_{00}(t_*) \quad (2.5)$$

то можно поступить следующим образом. В решении ХЗК (2.2) при $t = t_*$ параметры газа связаны соотношением

$$u(t, \sigma)|_{t=t_*} = \pm \frac{1}{\delta} s_0^0 \sigma + u_0^0$$

где $s_0^0 = \text{const} = s_{00}(t_*)$, $u_0^0 = \text{const} = u_{00}(t_*) \mp s_0^0 \sigma_{00}(t_*) / \delta$. Поэтому для решения ХЗК (2.2) по значению $u_*(r_*)$ однозначно определится величина σ^* , такая, что $u(t_*, \sigma^*) = u_*(t_*)$. Эту величину и надо будет брать в качестве начального условия задачи (2.3), при решении которой определяется характеристика $C_1^\pm$. После нахождения $C_1^\pm$ и значений решения ХЗК (2.2) на этой характеристике, будет строиться решение задачи (1.1), (2.4), (2.5), которое и описывает получение нужного распределения скорости газа.

При рассмотрении многомерных задач о получении наперед заданных разрывных распределений параметров газа для построения первого течения можно воспользоваться построенными ранее [10, 11] обобщениями простой центрированной волны Римана.

В заключение отметим, что более детальное исследование содержательных приложений задачи о получении наперед заданных распределений параметров газа несомненно представляется интересным и заслуживает отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 159 с.
2. Сидоров А.Ф. Безударное сжатие баротропного газа // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 769–779; Письмо в редакцию // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 698.
3. Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 35–51.
4. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
5. Баутин С.П. Сведение некоторых задач газовой динамики к характеристической задаче Коши стандартного вида // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 4–22.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2052–2063.
7. Баутин С.П. Исследование области сходимости специальных рядов, решающих некоторые задачи газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-е ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 4. С. 5–17.
8. Баутин С.П. Схлопывание одномерной полости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 50–59.
9. Баутин С.П. Одномерное истечение газа в вакуум // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-е ВЦ СО АН СССР, 1983. Т. 14. № 4. С. 3–20.
10. Баутин С.П. Двумерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 433–439.
11. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1984. Вып. 65. С. 56–74.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
12.III.1998