

УДК 531/539:534.2

© 1999 г. С.В. Сухинин

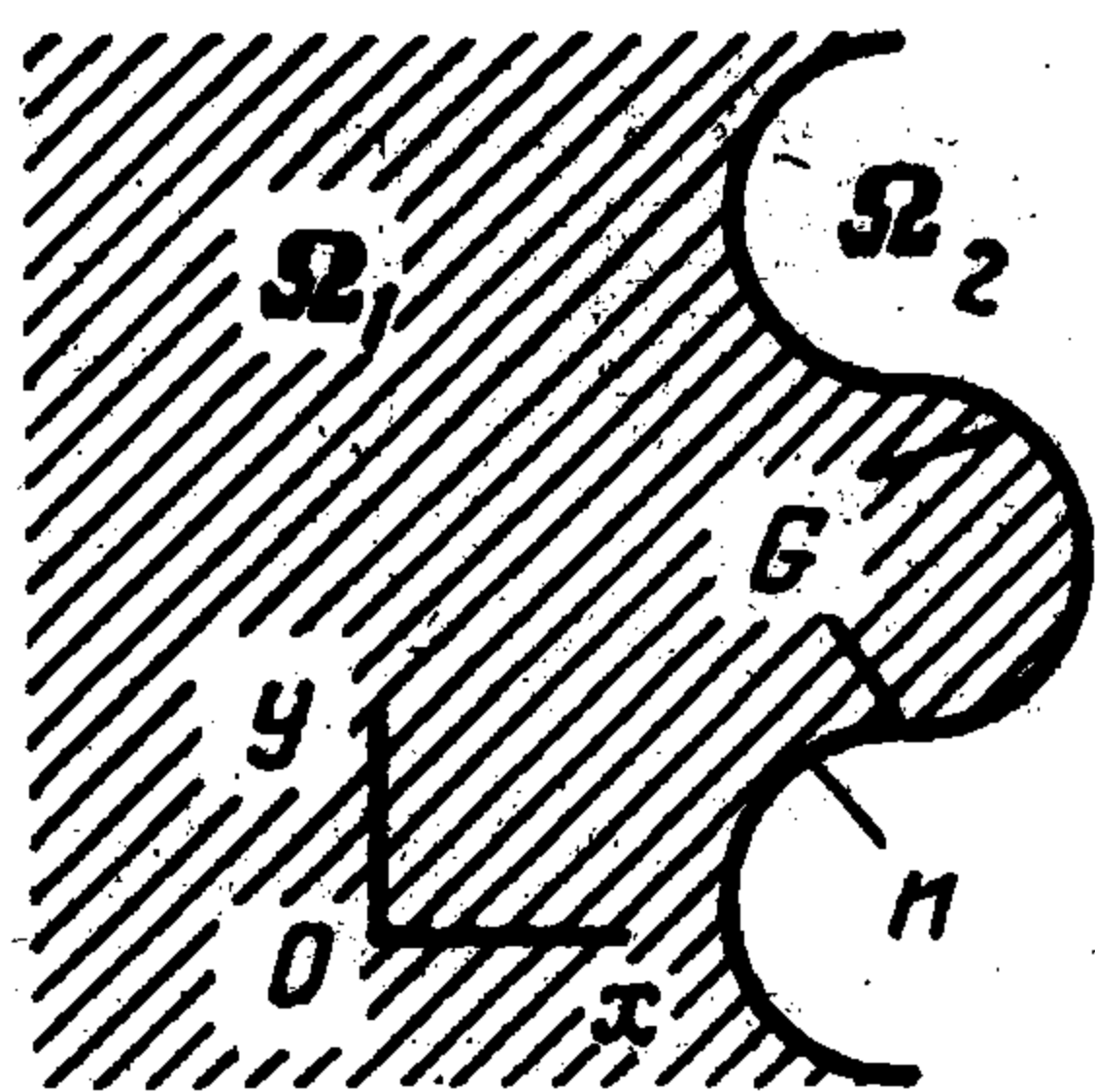
ЭФФЕКТ ШЕПЧУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

При помощи теории представлений групп симметрий, вариационных и функционально-топологических методов в рамках двумерной постановки исследуются волноводные свойства одномерно-периодических поверхностей (ОПП) и границ раздела. Установлено, что все поверхности, на которых выполнено условие Неймана, обладают волноводным свойством – являются открытыми волноводами. Это означает, что существуют волны, локализованные в окрестности поверхности и распространяющиеся вдоль нее без затухания – волноводные моды. Показано, что для любой твердой ОПП всегда существует полоса пропускания волноводных частот, локализованная в окрестности нуля, – эффект шепчущей поверхности. Обнаружены и исследованы аномальные колебания, локализованные около ОПП, на которых выполнено условие Неймана. Приведены примеры поверхностей, для которых существуют и не существуют аномальные колебания. Доказано, что ОПП, на которых выполнено условие Дирихле, не имеют полос пропускания для волноводных частот в окрестности нуля и для некоторого интервала частот не обладают волноводным и аномальным свойствами. Показано, что одномерно-периодические границы раздела двух сред для определенных соотношений параметров обладают волноводным и аномальным свойствами. Установлено, что если граница раздела обладает волноводным свойством, то всегда существует полоса пропускания частот, локализованная в окрестности нуля, – эффект шепчущей границы раздела. Приведен пример, в котором исследованы аномальные колебания, получены дисперсионные соотношения и определены полосы пропускания и запирающие для волноводных мод.

В акустике, теории волн на воде, электродинамике, оптике и других областях представляет интерес исследование распространения волн, локализованных около одномерно-периодических поверхностей, так как они описывают волноводные, аномальные, шепчущие и резонансные свойства структуры. Трудности исследования обусловлены тем, что эти свойства описываются обобщенными собственными функциями, и поэтому необходимо исследование тонкой структуры непрерывного спектра соответствующего оператора.

В развитие результатов автора [1–3] ниже исследуются волноводные, аномальные и шепчущие свойства одномерно-периодических проницаемых и непроницаемых поверхностей.

1. Формулировка и свойства симметрии задач. Всюду далее пространственные переменные приведены к безразмерному виду по отношению к минимальному периоду одномерно-периодической поверхности (ОПП). Задачи двумерные, независимые переменные $(x, y) \in R^2$ декартовы, направление пространственной периодичности совпадает с направлением оси ординат. Поверхность или граница раздела описывается периодической связной кривой G , которая делит R^2 на две связные части, $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup G = R^2$ (фиг. 1). Область $\Omega_1(\Omega_2)$ заполнена средой, все параметры которой имеют нижний индекс 1(2). Задачи Дирихле и Неймана исследуются в области $\Omega = \Omega_2$, для них индексы опущены. Все задачи исследуются в сужении области колебаний на некоторую фундаментальную область группы трансляций Ω^F . Для сужений $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, G$ на Ω^F новые обозначения не вводятся.



Фиг. 1

Уравнения и граничные условия. Если решение волнового уравнения искать в виде $u(x, y, t) = u(x, y)\exp(-i\omega t)$, то $u(x, y)$ описывает установившиеся колебания и

$$(\Delta + \lambda^2)u = 0 \quad (1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\lambda = \omega/c$ – безразмерная частота колебаний, c – скорость распространения волн в области колебаний, ω – круговая частота колебаний. Необходимо отметить, что уравнение Гельмгольца (1.1) можно получить из волнового другими способами, например, преобразованиями Лапласа или Фурье. Смысл функции $u(x, y)$ и условия

ее поведения на G определяются физическим содержанием исследуемой задачи.

Поверхность G называется мягкой, если

$$u(x, y)|_G = 0 \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) далее называется задачей D .

Пусть $\mathbf{n}(x, y)$ – вектор нормали к G в точке $(x, y) \in G$. Поверхность G называется твердой, если

$$\partial u / \partial \mathbf{n}|_G = 0 \quad (1.3)$$

Задача (1.1), (1.3) называется задачей N .

Если G – граница раздела двух сред, заполняющих Ω_1 и Ω_2 , то установившиеся колебания в этих областях описываются соотношениями

$$(\Delta + \lambda^2 \kappa^2)u_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2)u_2 = 0 \text{ в } \Omega_2 \quad (1.4)$$

$\kappa = c_2/c_1$ – отношение скоростей распространения волн c_2 и c_1 в соответствующих средах, ω – круговая частота колебаний, $\lambda = \omega/c_2$ – безразмерная частота колебаний. На границе раздела должны быть выполнены условия трансмиссии

$$u_1|_G = u_2|_G, \quad \partial u_1 / \partial \mathbf{n}|_G = \tau \partial u_2 / \partial \mathbf{n}|_G \quad (1.5)$$

Спецификация $\tau > 0$ зависит от физического содержания задачи. Например, если исследуются свойства границы раздела для акустических волн и неизвестной функцией является акустическое давление, то $\tau = \rho_1/\rho_2$ – отношение плотностей сред.

Задача (1.4), (1.5) далее называется задачей T . Для удобства изложения считается, что $\kappa > 1$, $\tau \ll 1$. Это справедливо, например, если G – граница раздела воздуха и воды (волна на воде).

Свойства симметрии. Так как оператор Лапласа инвариантен относительно любых локально-плоских симметрий, то симметрия задач D , N и T определена видом поверхности G . Все ОПП можно классифицировать по группам допускаемых симметрий. Возможны только два типа таких поверхностей [4, 5]. Первый тип – поверхность, допускающая только группу трансляций $\{T_1\}$, $T_1\langle(x, y)\rangle = (x, y + 1)$. Второй тип – допускающая группу $\{T_1, D_1^x\}$; $D_1^x\langle(x, y)\rangle = (x, -y)$ – зеркальное отражение относительно оси абсцисс. ОПП, допускающих иные группы симметрий, не существует [4, 5]. Пример поверхности второго типа показан на фиг. 1.

Преобразования из группы симметрии S_G поверхности G переводят решение задачи D , N или T в решение этой же задачи. Поэтому пространство допускаемых решений соответствующей задачи можно разложить на инвариантные относительно неприводимого представления S_G в пространстве решений подпространства. Это позволяет сужать пространство допускаемых решений задач D , N или T на эти подпространства, что упрощает их исследование.

Наиболее важным является исследование краевых задач в пространствах решений,

инвариантных относительно неприводимых представлений группы $\{T_1\}$. Пространство допускаемых решений любой однородной задачи для волнового уравнения с граничными условиями на ОПП можно разложить на инвариантные относительно неприводимого представления группы $\{T_1\}$ подпространства [5, 6]. Функции $u(x, y)$, которые принадлежат таким подпространствам, для некоторого ξ , $-\pi \leq \xi \leq \pi$, удовлетворяют условию

$$T_1 \langle u(x, y) \rangle = u(x, y+1) = e^{i\xi} u(x, y). \quad (1.6)$$

Величина ξ описывает сдвиг фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций; далее, если не оговорено иное, считается, что $0 < \xi \leq \pi$.

Условие (1.6) означает, что колебания в соседних фундаментальных областях группы трансляций происходят со сдвигом фазы ξ . Общее решение задачи D , N или T представляет собой суперпозицию решений вида (1.6) по ξ .

Следующее утверждение проверяется прямой проверкой.

Лемма 1.1. Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет условию (1.6), то в свободном пространстве

$$u(x, y) \equiv e^{i\xi y} v(x, y), \quad v(x, y+1) \equiv v(x, y) \quad (1.7)$$

Иногда тождество (1.7) называют теоремой Флоке, или волнами Релея – Блоха, а (1.6) – условием сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций.

В случае поверхности G второго типа возможны четыре одномерных неприводимых представления группы $S_G = \{T_1, D_1^x\}$ в пространстве допускаемых решений задачи D , N или T [6]

$$\begin{aligned} \{\tau_1(T_1) = -1, \tau_1(D_1^x) = +1\}, \quad \{\tau_2(T_1) = -1, \tau_2(D_1^x) = -1\} \\ \{\tau_3(T_1) = +1, \tau_3(D_1^x) = +1\}, \quad \{\tau_4(T_1) = +1, \tau_4(D_1^x) = -1\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\tau_k (k = 1, \dots, 4)$ – неприводимые представления группы $\{T_1, D_1^x\}$.

Задачи D , N и T с дополнительным условием (1.7) будут называться задачами $D(\xi)$, $N(\xi)$ и $T(\xi)$. Самосопряженное расширение оператора Лапласа для $D(\xi)$ и $N(\xi)$ будет обозначено $-\Delta_D^\xi$ и $-\Delta_N^\xi$. Рассматриваются самосопряженные расширения оператора Лапласа в пространстве $L_2(\Omega)$ и соответствующие сужения этого расширения [7].

Волноводное, аномальное и шепчущее свойства. На физическом уровне строгости: волноводное свойство – существование бегущих волн, локализованных в окрестности поверхности и распространяющихся вдоль нее без затухания (волноводные моды); аномальное свойство – существование волн, локализованных в окрестности поверхности и синфазных во всех фундаментальных областях группы трансляций; шепчущее свойство – существование полосы пропускания в окрестности нуля для частот волноводных мод. Для дальнейшего изложения требуется формализовать терминологию.

Определение 1.1. Волноводной функцией задачи D , N или T называется обобщенная собственная функция задачи $D(\xi)$, $N(\xi)$ или $T(\xi)$, $0 < |\xi| \leq \pi$, локализованная в окрестности ОПП. Соответствующая частота колебаний называется волноводной. Твердая или мягкая ОПП или граница раздела обладает волноводным свойством, если существует нетривиальная волноводная функция соответствующей задачи D , N или T .

Общее решение уравнений (1.1) или (1.4) с условием (1.6) в $\Omega_k (k = 1, 2)$ для $|x| \gg 1$ имеет вид

$$u_k(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[i(2\pi n + \xi)y] [b_{(n,k)}^{(+)} \exp(|x| \beta_{(n,k)}) + b_{(n,k)}^{(-)} \exp(-|x| \beta_{(n,k)})], \quad k = 1, 2$$

$$\beta_{(n,1)} = \sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2}, \quad \beta_{(n,2)} = \sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2}$$

Поэтому функция $u^*(x, y)$ локализована около G тогда и только тогда, когда

$$u_k^*(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{(n,k)}^{(\pm)} \exp[i(2\pi n + \xi)y] \exp(-|x| \beta_{(n,k)}), \quad k = 1, 2 \quad (1.9)$$

и $\operatorname{Re}(\beta_{(n,k)}) > 0$ ($k = 1, 2$) для всех нетривиальных слагаемых.

Замечание 1.1. Если для некоторого λ_* , $0 < \lambda_* < \xi$, существует собственная функция задачи $D(\xi)$, $N(\xi)$ или $T(\xi)$, которая для $|x| \gg 1$ имеет вид (1.9), $\operatorname{Re}(\beta_{(n,k)}) > 0$ ($k = 1, 2$), то она является волноводной. Представление решения этих задач для $|x| \gg 1$ в виде (1.9) называют условиями излучения.

Замечание 1.2. Так как для волноводной функции $u_*(x, y)$ в свободном пространстве справедливо представление $u_*(x, y) \equiv v(x, y) \exp(i\xi y)$, то ξ можно считать волновым числом, а функцию $v(x, y) \equiv v(x, y + 1)$ — амплитудой. Элементарные волноводные пакеты имеют вид

$$u_*(x, y, t) = v(x, y) \exp[i(\xi y - \omega_* t)]$$

где ω_* — соответствующая размерная волноводная частота, ξ изменяется в полуинтервалах $\Xi^{(-)} = \{\xi: -\pi \leq \xi < 0\}$, $\Xi^{(+)} = \{\xi: 0 < \xi \leq \pi\}$. Направление распространения волноводных пакетов определено знаком ξ .

Связные, в топологии вещественной оси, множества волноводных частот $\sigma_{(k)} = \{\lambda^{(k)}(\xi), \xi \in \Xi^{(-)} \cup \Xi^{(+)}\}$ ($k = 1, \dots, K$) далее будут называться полосами пропускания: полосе пропускания соответствует определенная волноводная мода.

Определение 1.2. ОПП обладает шепчущим свойством, если существует полоса пропускания σ_1 , такая, что $\sigma_1 = (0, \lambda_1^*]$, $\lambda_1^* \neq 0$.

Решения задач $D(0) = D(\xi)|_{\xi=0}$, $N(0) = N(\xi)|_{\xi=0}$ и $T(0) = T(\xi)|_{\xi=0}$ удовлетворяют условию

$$u(x, y + 1) = u(x, y) \quad (1.10)$$

которое соответствует нулевому сдвигу фазы колебаний или описывают синфазные колебания в соседних фундаментальных областях группы трансляций.

Определение 1.3. Обобщенные собственные функции (частоты) задач $D(0)$, $N(0)$ или $T(0)$, локализованные в окрестности G , далее будут называться аномальными функциями (частотами) этих задач. Аномальные функции описывают синфазные колебания, локализованные около твердой или мягкой ОПП или границы раздела. Одномерно-периодическая структура обладает аномальным свойством, если существует нетривиальная аномальная функция соответствующей задачи.

2. Мягкая поверхность. Распространение волн около мягкой поверхности описывается задачей Дирихле для волнового уравнения. Например, в задачах механики поверхность мягкая, если она свободная. Характерными являются задачи о распространении продольных акустических волн в упругом теле — около границы тела, распространение акустических волн в воде около границы с воздухом. В этом разделе доказывается, что мягкая поверхность никогда не обладает шепчущим свойством, указывается полоса запираения для низких частот, приводятся условия, при которых она не обладает волноводным и аномальным свойствами.

Корректность постановки задачи. Для обоснования корректности семейства задач $D(\xi)$ необходимо показать, что решение соответствующих неоднородных задач существует хотя бы для некоторых значений безразмерной частоты. Прямым вычислением можно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. Функция Грина для уравнения (1.1) с условиями (1.6) имеет вид

$$E(x - x_0, y - y_0, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[i(2\pi n + \xi)(y - y_0) - |x - x_0| \sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2} \right]}{-2\sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2}} \quad (2.1)$$

Выбор фундаментального решения задачи $D(\xi)$ в виде (2.1) позволяет обосновать корректность постановки задачи при помощи методов теории потенциала. Были доказаны [8] теоремы существования решения неоднородной задачи $D(\xi)$ для значений безразмерных частот, при которых решение однородной задачи единственно.

Модификация классических соотношений. Для исследования волноводных, аномальных и шепчущих свойств мягкой ОПП необходима модификация некоторых классических тождеств и неравенств для функций, удовлетворяющих условию сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций. Частично использованы более ранние результаты [9, 10].

Равенство Реллиха. Далее будет использован метод [11], модифицированный [12] для функций, удовлетворяющих условию сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций (1.6). Пусть $u(x, y)$ – некоторое решение задачи $D(\xi)$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, направленной из области колебаний к поверхности G . Справедливо равенство

$$\int_G (x + b)(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dG = 2 \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\Omega \quad (2.2)$$

где $\mathbf{e}_x$ – орт оси абсцисс, $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x)$ – скалярное произведение.

Необходимо отметить, что равенство (2.2) (равенство Реллиха [11]) справедливо для всех решений задачи $D(\xi)$, затухающих на бесконечности по оси абсцисс.

Неравенство Фридрихса. Пусть $g(x, y)$ – вещественнозначная достаточно гладкая ограниченная функция, такая, что $g(x, y + 1) \equiv g(x, y)$ и $g(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega$. Любую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию (1.6), можно представить в виде $u(x, y) = g(x, y) v(x, y)$. Справедливо неравенство [12], обычно называемое неравенством Фридрихса [9], которое выполняется для любой убывающей при удалении от мягкой границы функции $u(x, y)$

$$\int_G |v|^2 g \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dG - \iint_{\Omega} (|v|^2 g \Delta g) d\Omega \leq \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \quad (2.3)$$

Несуществование волноводных и аномальных свойств мягкой границы.

Определение 2.1. ОПП называется нормально освещаемой, если для всех точек границы справедливо неравенство $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \leq 0$.

Пример нормально освещаемой периодической поверхности приведен на фиг. 1. Название связано с тем, что поверхность полностью освещается параллельными лучами, падающими по нормали к направлению периодичности.

Теорема 2.1. Если мягкая ОПП является нормально освещаемой, то она не обладает волноводными и аномальными свойствами.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – некоторое волноводное или аномальное решение однородной краевой задачи D . Так как поверхность нормально освещаемая, то существует b такое, что $(x + b)(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \leq 0$ для всех точек G . В силу равенства Реллиха (2.2) справедливо тождество $\partial u / \partial x \equiv 0$. Так как $u(x, y)$ убывает при удалении от G , то $u(x, y) \equiv 0$ в Ω .

Теорема 2.2. Мягкие поверхности не обладают шепчущим свойством. На полуинтервале $[0, \pi)$ не существует волноводных частот мягкой ОПП.

Доказательство. Задача $D(\xi)$ с дополнительными однородными условиями Неймана на множестве прямых $R = \{x = R_m, m = 1, 2, \dots, M\}$ будет обозначаться $D(N, R)$. Пусть λ_{NR} – либо наименьшее собственное значение этой задачи, либо нижняя частота непрерывного спектра, $\lambda(\xi)$ – волноводная или аномальная частота задачи $D(\xi)$. Для всех R справедливо неравенство

$$\lambda_{NR} \leq \lambda(\xi) \quad (2.4)$$

Если для некоторых R выполнено неравенство $0 < \xi \leq \lambda_{NR}$, то из (2.4) следует несуществование волноводных и аномальных частот задачи $D(\xi)$ на интервале $(0, \xi)$.

Пусть

$$x_* = \min_{(x,y) \in G} (x), \quad x^* = \max_{(x,y) \in G} (x)$$

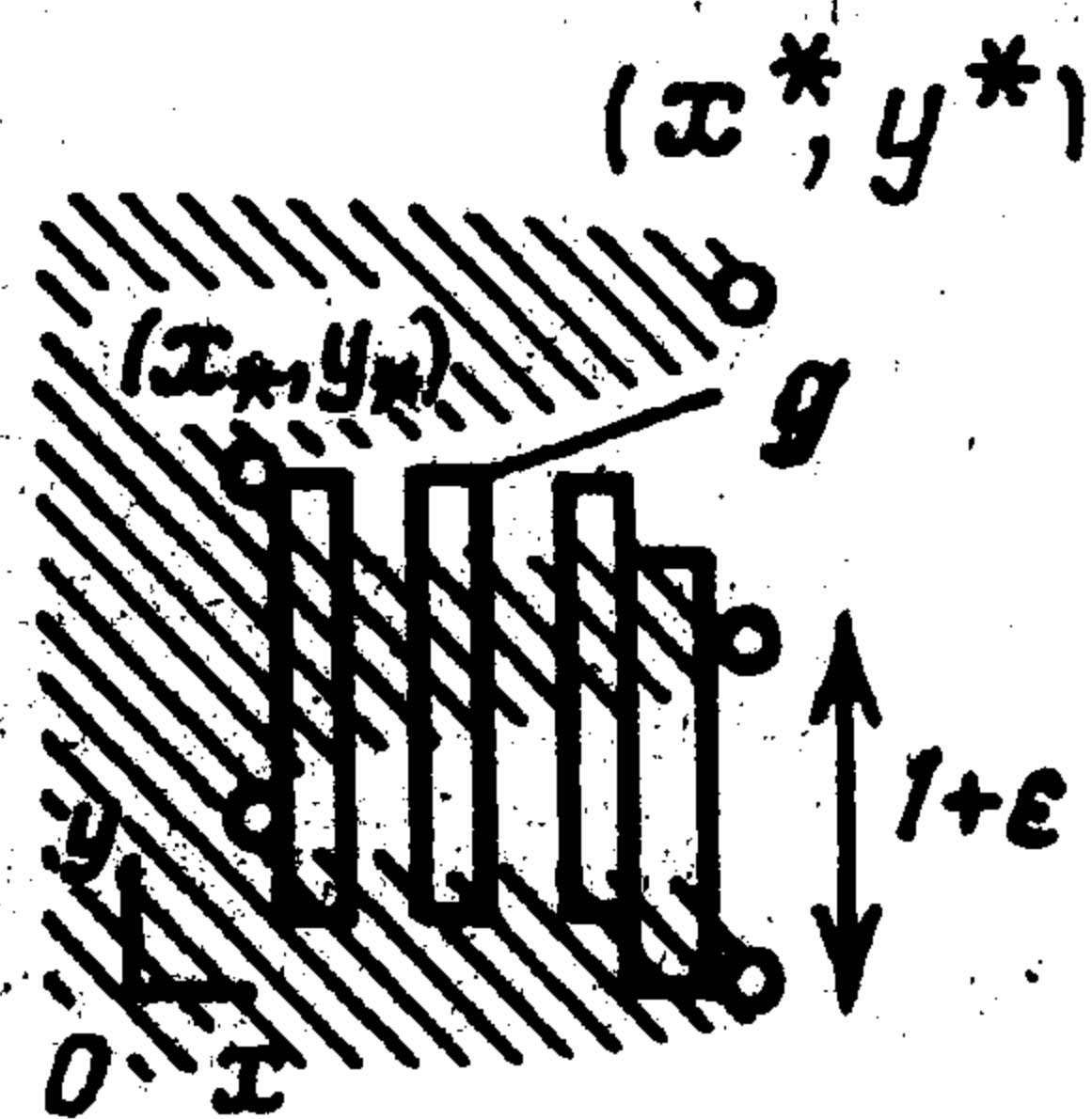
и точки (x_*, y_*) , (x^*, y^*) разбивают поверхность G на связные компоненты (фиг. 2), можно считать, что $x_* = 0$, а y^* – целые числа. Пусть g – некоторая связная компонента этого разбиения. Область $\Omega \cap \{(x, y): x_* < x < x^*\}$ можно покрыть конечным множеством прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (фиг. 2), с размером по оси ординат, равным $1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это покрытие далее называется ε -покрытием. Пусть $\{R_m, m = 1, 2, \dots, M\}$ – координаты вершин этих прямоугольников на оси абсцисс, P – некоторый прямоугольник, λ_{NP} – собственная частота задачи D , суженной на P , с однородными условиями Неймана на боковых границах P . Если в неравенстве Фридрихса (2.3) $g = \sin [\pi(y - y_P)/(1 + \varepsilon)]$, причем y_P – ордината нижней стороны P , то

$$\left(\frac{\pi}{1 + \varepsilon} \right)^2 \leq \left(\iint_{\Omega \cap P} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \left(\iint_{\Omega \cap P} |u|^2 d\Omega \right)^{-1}$$

Так как P – произвольный прямоугольник ε -покрытия, то неравенство (2.4) примет вид $\pi/(1 + \varepsilon) \leq \lambda_{NR} \leq \lambda(\xi)$. Так как ε – произвольное число, то отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание 2.1. Примеры мягких ОПП, которые обладают волноводными или аномальными свойствами, автору неизвестны. В качестве гипотезы можно высказать предположение, что такие поверхности не существуют.

3. Твердая поверхность. Типичными примерами наличия твердой ОПП являются задачи о распространении акустических волн около непроницаемых поверхностей и о распространении волн на воде около береговой линии. При помощи теории представлений групп симметрий и вариационных методов доказывалось, что любая твердая ОПП обладает волноводным свойством и всегда существует полоса пропускания в области низких частот. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что для



Фиг. 2

акустических волн всегда имеет место эффект шепчущей поверхности, а для волн на воде одномерно-периодические береговые линии являются волноводами цунами. Так как цунами являются длинными волнами и в рамках линейной теории описываются задачей N [13].

Вариационная формулировка. Если отождествить точки $(x, y) \equiv (x, y + 1)$ всей области колебаний, то области Ω будет соответствовать область Ω^2 , находящаяся на поверхности цилиндра с диаметром, равным единице. Если $H^1(\Omega^2)$ – пространство Соболева для функций, определенных на Ω^2 , то пространство допускаемых решений $H_\xi^1(\Omega)$ задачи $N(\xi)$ в силу

условия (1.6) и леммы 1.1 имеет вид

$$H_\xi^1(\Omega) \equiv \exp(i\xi y) H^1(\Omega^2)$$

Для вариационной формулировки задачи $N(\xi)$ в пространстве допускаемых решений $H_\xi^1(\Omega)$ применимы известные методы [7, 9, 11, 14, 15].

Существование волноводного свойства. Решения задачи $N(\xi)$ в пространстве $H_\xi^1(\Omega)$, которые описывают волноводные или аномальные свойства, являются собственными функциями самосопряженного расширения $-\Delta_N^\xi$ оператора Лапласа, а соответствующие собственные значения принадлежат чисто точечному спектру $-\Delta_N^\xi$. Особенностью исследования волноводных свойств ОПП является то, что оператор $-\Delta_N^\xi$ имеет непрерывный спектр $\Sigma_N^\xi = [\xi^2, \infty)$. Для исследования существования волноводных и аномальных частот использован метод "вилки Дирихле – Неймана" [9, 11, 14, 15]. Пусть на $\gamma = \{(x, y): x = 1/\epsilon\}$, $0 < \epsilon < \infty$ (фиг. 3) выполнены условия Дирихле либо Неймана. Далее задача $N(\xi)$ с условием Дирихле будет обозначаться $N(\xi, \epsilon, D)$, а с условием Неймана – $N(\xi, \epsilon, N)$. Пусть $\lambda_{De}^{(k)}$ – собственные частоты задачи $N(\xi, \epsilon, D)$, $\lambda_{Ne}^{(k)}$ – собственные частоты задачи $N(\xi, \epsilon, N)$, $\lambda^{(k)}(\xi)$ – некоторая собственная частота задачи $N(\xi)$, частоты пронумерованы в порядке возрастания ($k = 1, 2, \dots, K$). Так как условие Неймана расширяет пространство решений, а условие Дирихле сужает, то для всех ϵ справедливы неравенства

$$0 \leq \lambda_{Ne}^{(k)} < \lambda^{(k)}(\xi) < \lambda_{De}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

Замечание 3.1. Если для некоторых ϵ, K_* справедливы неравенства $0 < \lambda_{Ne}^{(K_*)}$ и $\lambda_{De}^{(K_*)} < \xi$, то из (3.1) следует существование не менее чем K_* волноводных частот задачи $N(\xi)$ для волн, бегущих в одном направлении вдоль поверхности.

Теорема 3.1. Твердая ОПП обладает волноводным и шепчущим свойствами.

Доказательство. Пусть (фиг. 3)

$$x_* = \min_{(x,y) \in G} (x) = 0, \quad x^* = \max_{(x,y) \in G} (x) \quad (3.2)$$

Для собственной частоты задачи $N(\xi)$ можно получить оценку снизу. Пусть, от противного, $\lambda_{Ne}^{(1)} = 0$ и $u_{Ne}^{(1)} = \text{const}$. Если $G \subset \{(x, y): |x| < 1/\epsilon\}$ и $\epsilon < 1/x^*$, то в силу связности области Ω_1 (фиг. 3) и условия (1.6) справедливо неравенство $u_{Ne}^{(1)} \neq \text{const}$, поэтому $0 < \lambda_{Ne}^{(1)}$.

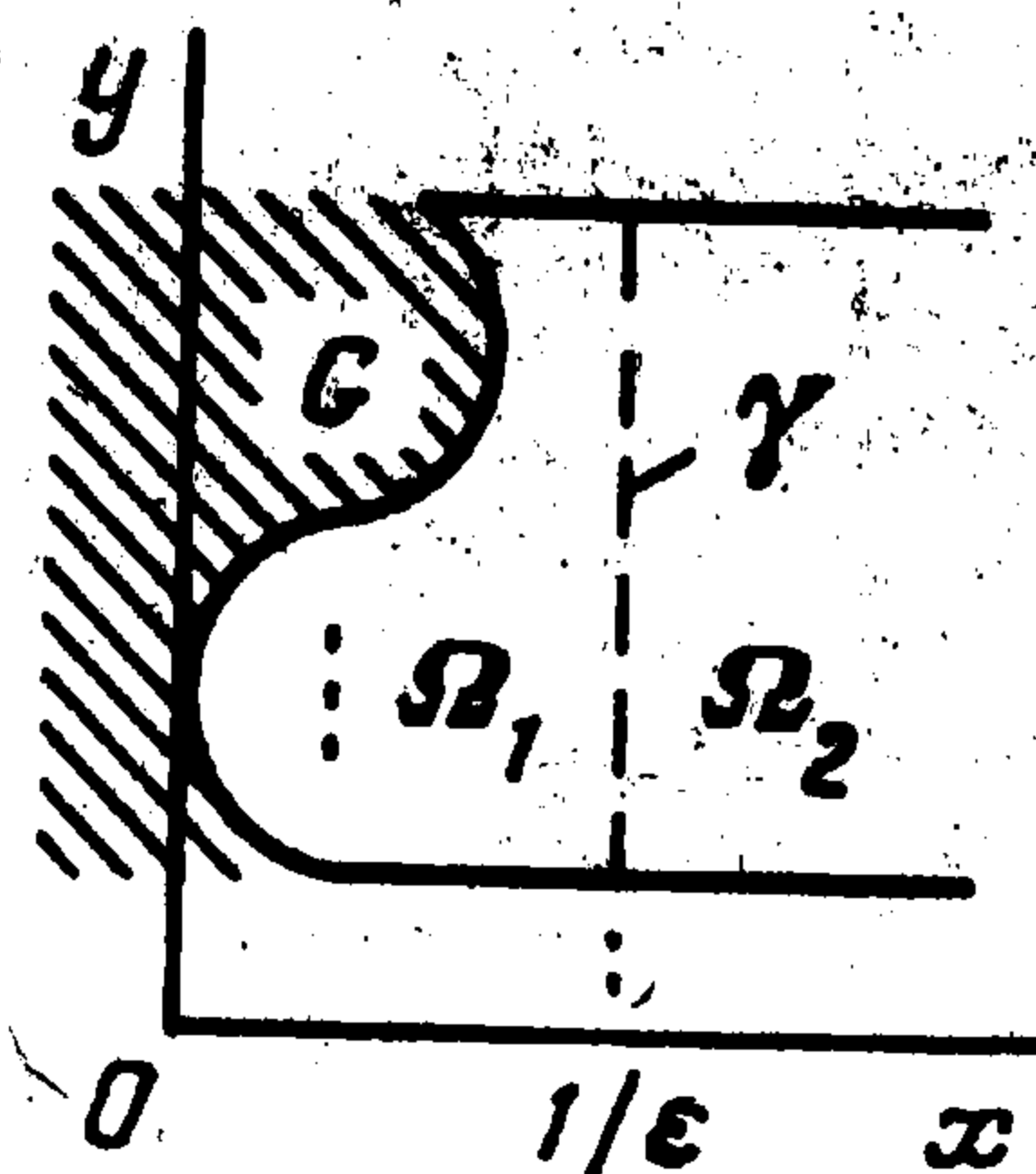
Оценка сверху для задачи $N(\xi)$ получается при помощи построения пробных функций для вариационной формулировки. Пусть

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y): x_* < x < x^*\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y): x^* < x\}$$

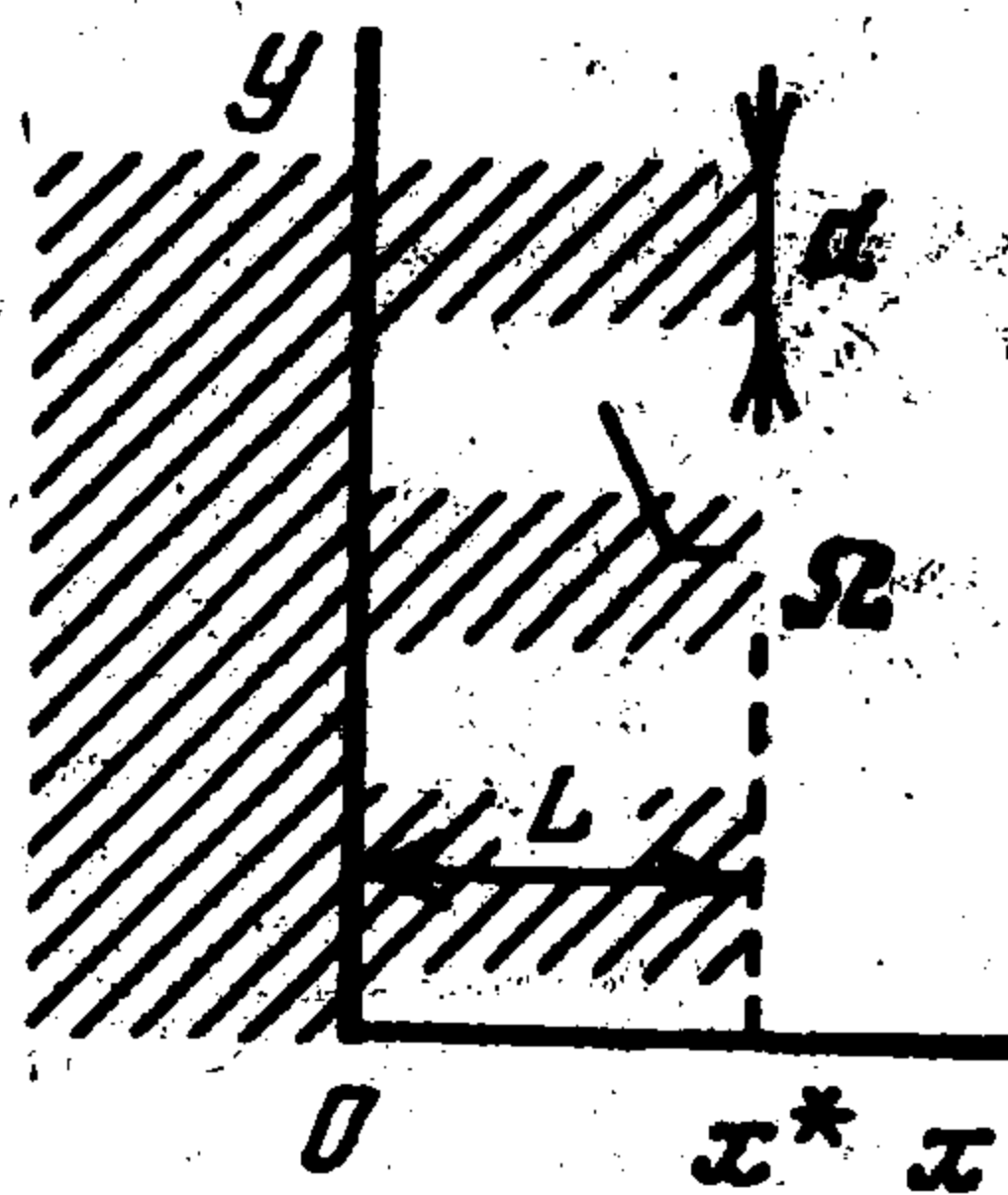
Любое решение $u(x, y)$ задачи $N(\xi)$ можно представить в виде суммы разрывной (u_d) и непрерывной (u_c) функций

$$u = u_d + u_c; \quad u_d = u_d(x, y) \in \hat{H}^1(\Omega_1), \quad u_c = u_c(x, y) \in H_\xi^1(\Omega_F) \quad (3.3)$$

где $\hat{H}^1(\Omega_1)$ – пространство Соболева функций, равных нулю на γ , Ω_F – фунда-



Фиг. 3



Фиг. 4

ментальная область группы трансляций в R^2 . Функцию $u_d(x, y)$ можно доопределить на всю область колебаний при помощи условия (1.6).

Пусть $u_c(x, y) = \exp(i\xi y) \cos(\pi x \varepsilon / 2)$. Эта функция удовлетворяет всем соотношениям задачи $N(\xi, \varepsilon, D)$, кроме условия непротекания, и является непрерывной во всем пространстве. Функцию u_d можно представить в виде

$$u_d = \begin{cases} \kappa \cos \frac{\pi x}{2|x^*|}, & x_* < x < x^*, 0 < y < 1 \\ 0, & |x| > x^*, 0 < y < 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

(κ — некоторый параметр). Справедливо соотношение, которое отражает вариационное свойство собственных значений

$$\begin{aligned} (\lambda_{De})^2 &\leq \frac{\int |\nabla u|^2 d\Omega_\varepsilon}{\int |u|^2 d\Omega_\varepsilon} = \\ &= \frac{\int [|\nabla u_c|^2 + (\nabla \bar{u}_c)(\nabla u_d) + (\nabla u_c)(\nabla \bar{u}_d)^* + |\nabla u_d|^2] d\Omega_\varepsilon}{\int [|u_c|^2 + \bar{u}_c u_d + \bar{u}_d u_c + |u_d|^2] d\Omega_\varepsilon} = \mu^2(\kappa, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь интегрирование ведется по области $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{(x, y): |x| < 1/\varepsilon\}$, черта над символом означает комплексное сопряжение. Для малых ε

$$\mu^2(\kappa, \varepsilon) = \xi^2 + \varepsilon(a\kappa + b\kappa^2) + O(\varepsilon^2)$$

Для малых ε и κ определяющим является значение

$$a = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\int |\partial u_c / \partial y|^2 d\Omega_\varepsilon}{\varepsilon \int [|u_c|^2 + u_c^* u_d + u_d^* u_c] d\Omega_\varepsilon} \neq 0$$

Следовательно, для малых κ (положительных или отрицательных) $a < 0$, поэтому $\mu^2(\kappa, \varepsilon) < \xi^2$.

При доказательстве последующего утверждения (оно опущено) использованы методы теории самосопряженных операторов, основанные на спектральной теореме [12, 15].

Теорема 3.2. Спектр оператора $-\Delta_N^\xi$ является дискретным ниже ξ^2 и содержит не более чем K^* и не менее чем K_* чисто точечных собственных значений. Числа K^* и K_* определяются неравенствами

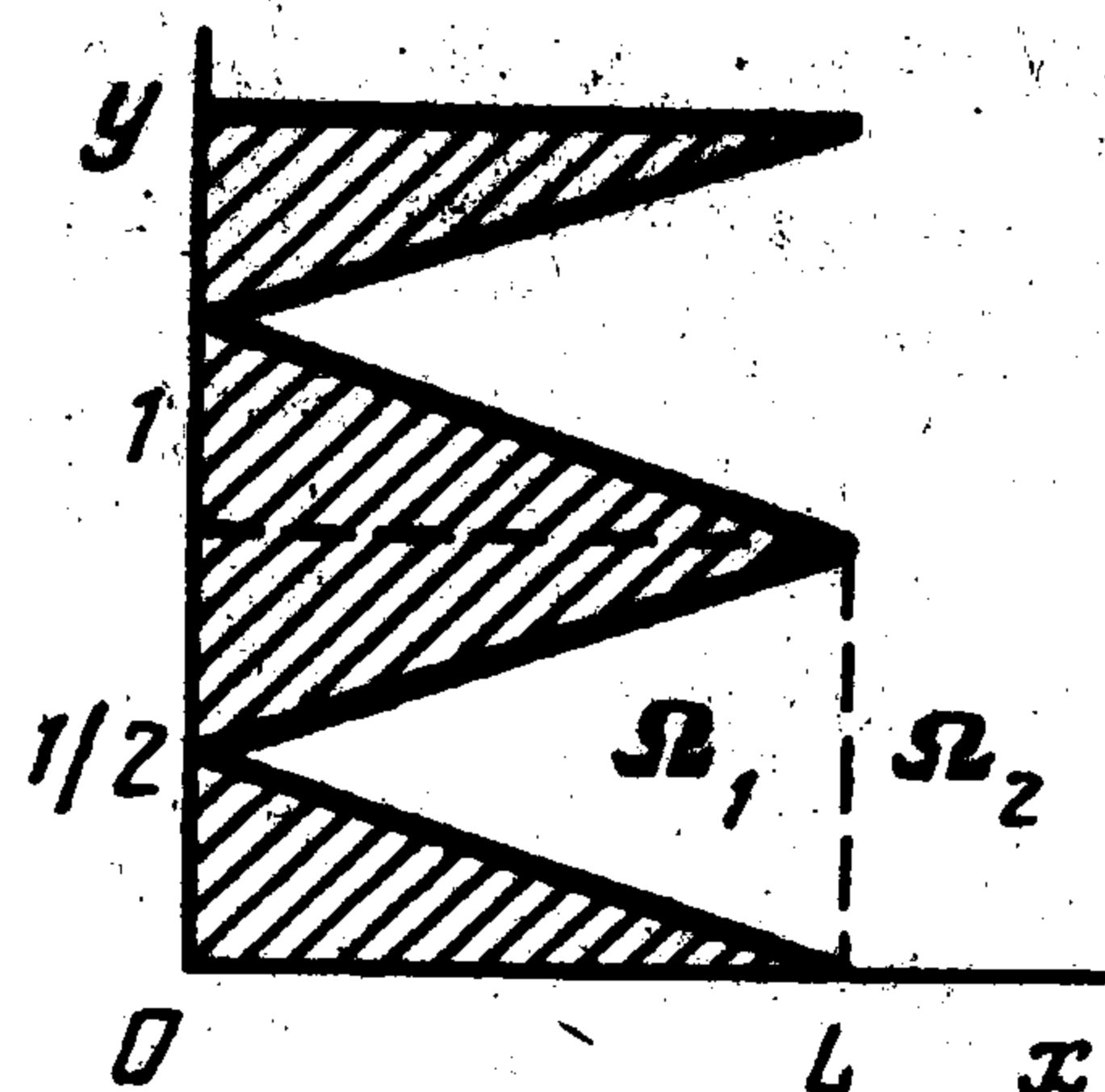
$$\lambda_{Ne}^{(K^*)} < |\xi| \leq \lambda_{Ne}^{(K^*+1)}, \quad \lambda_{De}^{(K_*)} < |\xi| \leq \lambda_{De}^{(K_*+1)}$$

Определение 3.1. Твердая ОПП вида, показанного на фиг. 4, называется простой $(L-d)$ -гребенкой. Если $d = 0$, то поверхность называется простой L -гребенкой.

При помощи неравенств (3.1) и теоремы 2.2 можно оценить количество волноводных мод твердой поверхности на интервалах $\xi \in \Xi^{(-)}$ или $\xi \in \Xi^{(+)}$. Если поверхность — простая $(L-d)$ -гребенка, то в силу теоремы 3.1 всегда существует не менее чем одна волноводная мода.

Теорема 3.3. Каждая простая $(L-d)$ -гребенка при $L > 1/2$ обладает не менее чем $K_{\min}$ волноводными модами на интервале $\Xi^{(+)}$ или $\Xi^{(-)}$, $K_{\min} < L + 1/2 \leq K_{\min} + 1$. Если $L + 1/2$ — не целое число, то величина $K_{\min}$ равна его целой части, т.е. $K_{\min} = [L + 1/2]$. Если $L + 1/2$ — целое, то $K_{\min} = L - 1/2$.

Замечание 3.2. (Эффект шепчущей поверхности.) Так как распространение акустических волн около твердых поверхностей описывается краевыми задачами для волнового уравнения с граничными условиями Неймана, то семейство задач $N(\xi)$ описывает распространение элементарных акустических волноводных пакетов с волновым числом ξ , локализованных около поверхности. В силу доказанных утверждений для любой твердой поверхности существует полоса пропускания, локализованная в окрестности нуля (низкие частоты). Это означает, что все ОПП обладают шепчущим свойством. Возможно, что этим свойством твердых поверхностей объясняется эффект "шепчущей галереи".



Фиг. 5

Замечание 3.3. (Волноводы цунами.) Так как длинные волны на мелкой воде около береговой линии описываются задачей N , то доказанные теоремы дают решение известной задачи М.А. Лаврентьева о волноводах цунами [13]. Существование полосы пропускания для любой одномерно-периодической береговой линии в области низких частот и то, что цунами представляет собой пакет длинных волн, позволяют утверждать, что любая одномерно-периодическая береговая линия является волноводом цунами.

Аномальное свойство. Если поверхность допускает группу симметрий $\{T_1, D_1^x\}$, то существуют четыре неприводимых одномерных представления этой группы в пространстве решений (1.8). Представления τ_1, τ_2 подпадают под условия теоремы 2.1 для $\xi = \pi$, для τ_3, τ_4 условия этой теоремы не подходят, так как $\xi = 0$. Для представления τ_4 (1.8) имеют место тождества

$$u(x, y+1) \equiv u(x, y), u(x, -y) \equiv -u(x, y) \quad (3.6)$$

Прямым вычислением проверяется, что пространство допускаемых решений задачи $N(0)$ в классе функций, удовлетворяющих тождествам (3.6), является замкнутым подпространством пространства $H_\xi^1(\Omega)$, непрерывный спектр оператора $-\Delta_N^0$ в этом пространстве имеет вид $\Sigma_N = [4\pi^2, +\infty)$.

Далее использованы обозначения и метод теоремы 2.1.

Теорема 3.4. Простая $(L-d)$ -гребенка обладает аномальным свойством, если $0 \leq d < 1/2$.

Доказательство. Теорема справедлива, если существует $\lambda_{D\varepsilon} < 2\pi$ для некоторого ε , $\lambda_{D\varepsilon}$ – собственная частота задачи $N(0, \varepsilon, D)$ с условиями (3.6).

Оценка снизу доказывается от противного: если $\lambda_{N\varepsilon}^{(1)} = 0$, то $u_{N\varepsilon}^{(1)} \equiv 0$ в силу (3.6).

Оценка сверху доказывается при помощи вариационного свойства собственных частот. Если в (3.5)

$$u_c(x, y) = \sin(2\pi y) \cos(\pi \varepsilon x / 2), u_d(x, y) \equiv 0$$

то для малых ε

$$\mu^2(\varepsilon) = 4\pi^2 + A\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad A = 16L\pi \cos(\pi d / 2) \sin(\pi d / 2) [1 - 2\cos^2(\pi d / 2)] < 0$$

Теорема 3.5. Твердая ОПП, такая, что в фундаментальной области группы трансляций она имеет вид (фиг. 5)

$$G = \left\{ (x, y) : y = \frac{L-x}{2L}, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \\ \cup \left\{ (x, y) : y = \frac{L+x}{2L}, 0 \leq x \leq L, \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

всегда обладает аномальным свойством. Такая ОПП обычно называется эшелетт.

Доказательство. Пусть в (3.3)

$$u_c(x, y) = \sin(2\pi y) \cos(\pi x \varepsilon / 2)$$

$$u_d = \begin{cases} (y - 1/2)x \cos[\pi x / (2L)], & 0 < x < L, 0 < y < 1 \\ 0, & x > L, 0 < y < 1 \end{cases}$$

Функция $u = u_d + u_c$ удовлетворяет условиям задачи $N(0, \varepsilon, D)$ и (3.6). Для малых ε справедливо равенство

$$\mu^2(\kappa, \varepsilon) = 4\pi^2 + \varepsilon(a\kappa + b\kappa^2) + O(\varepsilon^2) \quad (3.7)$$

Так как $a = 32L(10 - 3\pi)/(9\pi)$, то отсюда следует, в силу (3.5), что для малых отрицательных κ выполняется неравенство

$$\mu^2(\kappa, \varepsilon) < 4\pi^2. \quad (3.8)$$

Теорема 3.6. Твердая поверхность вида $G = \{(x, y): x = L[1 + \cos(2\pi y)/2]\}$ обладает аномальным свойством для всех $L > 0$.

Доказательство. Функции, которые входят в представление (3.3), можно выбрать в виде

$$u_d(x, y) = \begin{cases} \kappa(y - 1/2)(L - x), & L[1/2 + \cos(2\pi y)/2] \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & L \leq x, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$u_c(x, y) = \begin{cases} \sin(2\pi y) \cos[\varepsilon\pi(x - L)/2], & L \leq x \leq 1/\varepsilon + L, 0 \leq y \leq 1 \\ \sin(2\pi y), & L[1/2 + \cos(2\pi y)/2] \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Так как в равенстве (3.7) $a = -\pi L^2/3$, то отсюда следует, что для достаточно малых положительных κ и ε справедливо неравенство (3.8).

Предыдущие теоремы могут создать впечатление, что аномальные частоты в интервале $0 < \lambda < 2\pi$ всегда существуют, однако последующий пример показывает, что это не так.

Теорема 3.7. Если $1/2 < d < 1$, то простая $(L - d)$ -гребенка не имеет аномальных частот колебаний λ в интервале $0 < \lambda < 2\pi$.

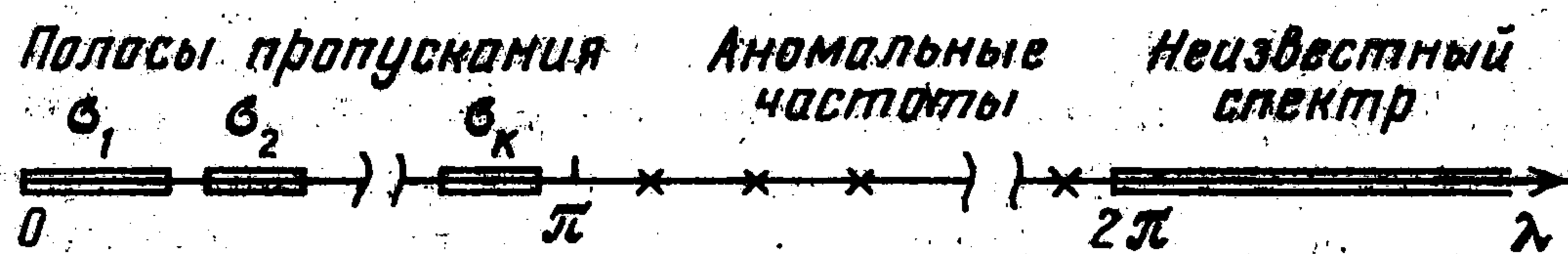
Доказательство. В силу неравенств (3.1) достаточно показать, что в классе функций, удовлетворяющих условию (3.6), для собственной частоты $\lambda_{N\varepsilon}^{(1)}$ задачи $N(0, \varepsilon, N)$ выполнено неравенство $2\pi \leq \lambda_{N\varepsilon}^{(1)}$. Пусть $\varepsilon = 1/L$. Так как в области Ω_1 (фиг. 4) переменные разделяются, то справедливость этого неравенства проверяется вычислением.

Тонкая структура спектра. Проведенные исследования позволяют уточнить тонкую структуру спектра оператора Лапласа задачи N для ОПП. В силу теорем существования волноводных и аномальных мод колебаний этот спектр всегда содержит хотя бы одну полосу пропускания σ_1 и может содержать частоту аномальных колебаний. На фиг. 6 приведена схема тонкой структуры спектра этого оператора в терминах безразмерных частот колебаний. Отметим, что структура спектра задачи N для частот, больших чем 2π , неизвестна.

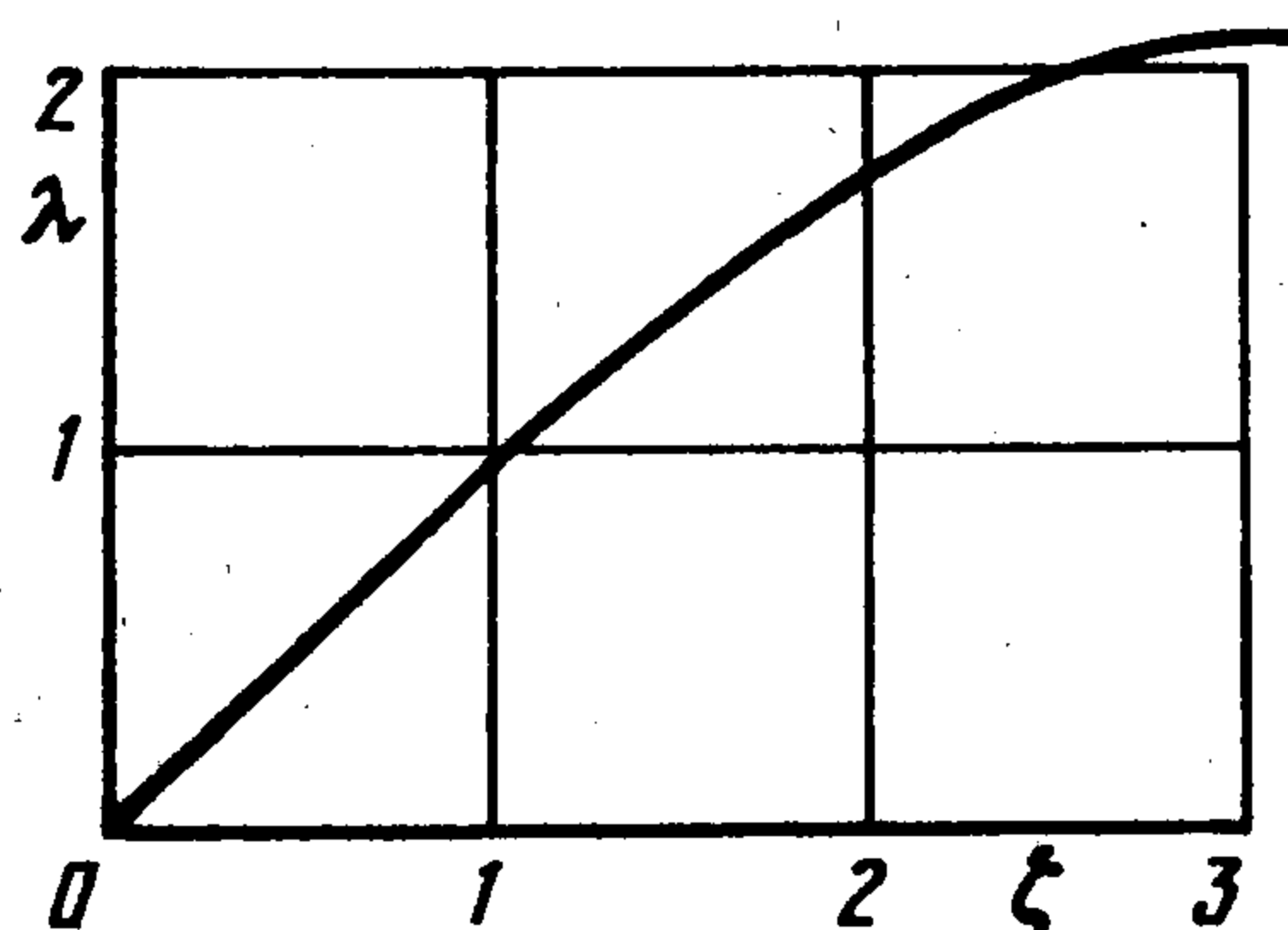
Волноводная мода, соответствующая показанной на фиг. 6 полосе пропускания σ_1 (шепчущая мода), в силу доказанных утверждений всегда существует.

Пример. Исследуем волноводные и аномальные свойства твердой простой L -гребенки. В силу теоремы 3.4 такие гребенки всегда обладают аномальным свойством. Для исследования волноводного свойства простой L -гребенки можно использовать результаты, полученные [16]¹ для периодических простых ножевых решеток. Дисперсионные соотношения

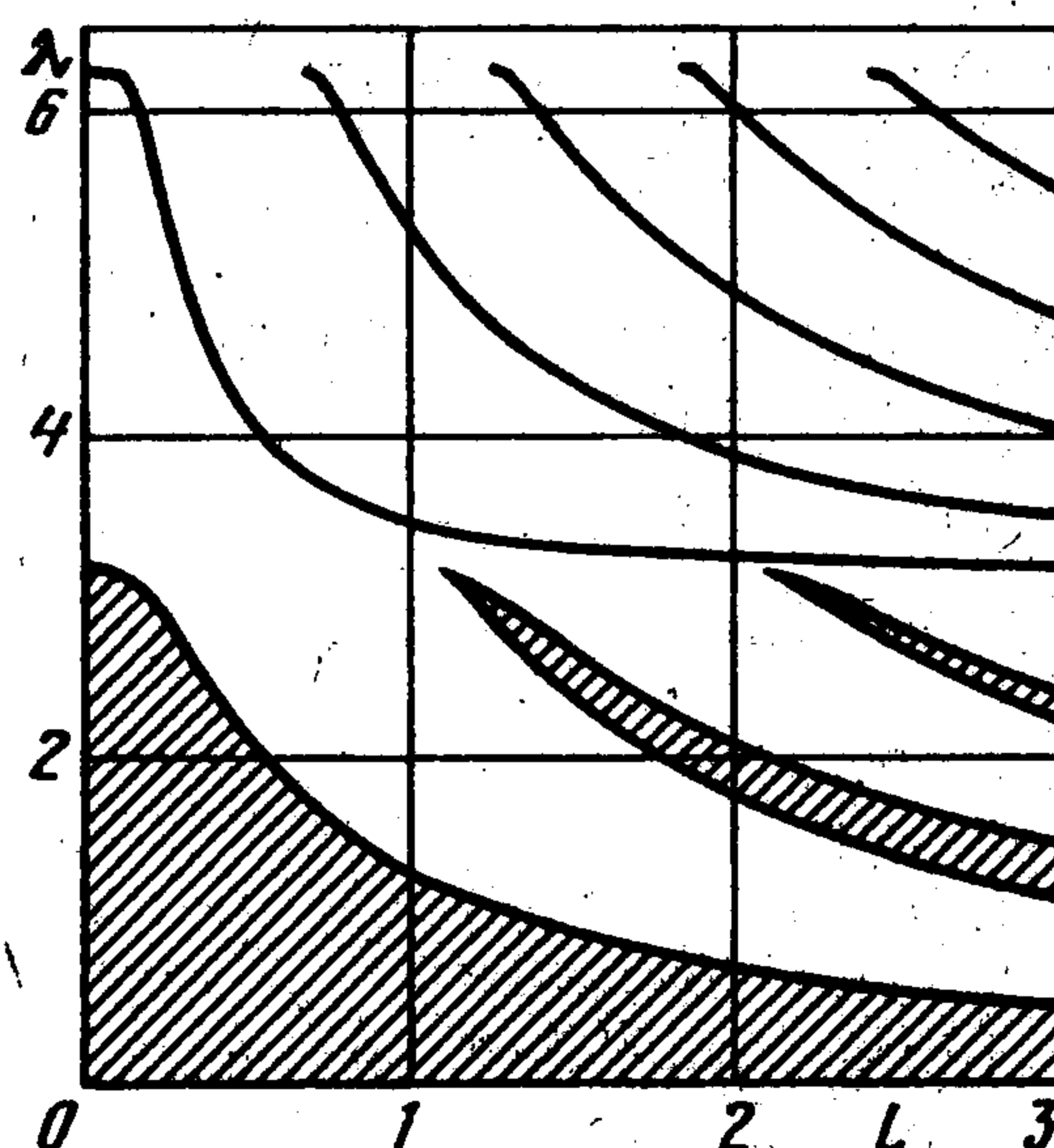
¹ См. также: Сухинин С.В. Волноводные, циклические и аномальные свойства колебаний около решетки пластин. Препринт № 2-98. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1998. 32 с.



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

для волноводных мод простой L -гребенки связывают волноводные частоты λ с волновым числом ξ . Они являются сужением аналогичных соотношений для простой ножевой решетки, полученных ранее [16], и имеют вид

$$\sin \frac{\Theta(\lambda, \xi) + \pi}{2} = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda, \xi) = & \left\{ 2\lambda L - 2 \frac{\lambda \ln 2}{\pi} - \frac{\lambda}{\pi} \left[\Psi \left(\frac{2N\pi + 2\pi + \xi}{2\pi} \right) + \Psi \left(\frac{2N\pi + 2\pi - \xi}{2\pi} \right) - 2\Psi(2N+1) - \right. \right. \\ & \left. - \Psi \left(\frac{2\pi + \xi}{2\pi} \right) - \Psi \left(\frac{2\pi - \xi}{2\pi} \right) + 2\Psi \left(\frac{\xi}{2\pi} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \right] + 2 \arcsin \frac{\lambda}{|\xi|} + \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^N \left(\arcsin \frac{\lambda}{2n\pi + \xi} + \arcsin \frac{\lambda}{2n\pi - \xi} \right) - 2 \sum_{n=1}^{2N} \arcsin \frac{\lambda}{n\pi} - \frac{2\lambda}{\xi} \right\} \end{aligned}$$

Здесь N – некоторое натуральное число, $\Psi(\)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

На фиг. 7 приведен построенный при помощи соотношений (3.9) график зависимости безразмерной волноводной частоты λ шепчущей моды от волнового числа ξ в интервале $0 < \xi \leq \pi$ для $L = 1/2$. В интервале $-\pi \leq \xi < 0$ график зависимости волноводной частоты от волнового числа получается при помощи зеркального отражения относительно оси ординат.

На фиг. 8 приведены зависимости ширины полос пропускания и аномальных частот от длины зубьев простой L -гребенки. Полосы пропускания заштрихованы, зависимость частоты аномальных колебаний от длины зубьев простой L -гребенки показана сплошными кривыми. Численные исследования зависимостей полос пропускания от геометрического параметра простой гребенки проведены при помощи дисперсионных соотношений (3.9). Зависимость аномальных частот простой L -гребенки от геометрического параметра L исследована при помощи метода прямого учета конечности энергии [16].

4. Проницаемая поверхность. Задача T не является задачей дифракции [17, 18]. Если параметр τ , входящий в соотношения (1.4), стремится к нулю, то задача T распадается

ется на задачи N в области Ω_1 и D в области Ω_2 , исследованные выше. В настоящем разделе при помощи функционально-топологических методов показано, что для малых (больших) значений $\tau > 0$ волноводные, аномальные и шепчущие свойства границы раздела слабо отличаются от этих же свойств для соответствующих предельных случаев поверхности, мягкой с одной стороны и твердой с другой.

Операторная формулировка задачи. При помощи функции Грина (2.1) можно привести операторную формулировку задачи $T(\xi)$. Пусть

$$E_1(x, x_0, y, y_0, \lambda) = E(x - x_0, y - y_0, \lambda \kappa), \quad E_2(x, x_0, y, y_0, \lambda) = E(x - x_0, y - y_0, \lambda)$$

Если решение задачи $T(\xi)$ в областях Ω_1 и Ω_2 искать в виде потенциалов простого и двойного слоя

$$u_k(x, y) = \int_G \left[E_k(x, y, x_0, y_0) \mu(x_0, y_0) + \frac{\partial E_k(x, y, x_0, y_0)}{\partial n(x_0, y_0)} [\tau(2 - k) + (k - 1)] v(x_0, y_0) \right] dG$$

$$k = 1, 2 \quad (4.1)$$

то условия на границе раздела (1.5) примут вид, приведенный ранее [19], причем r, s — координаты естественной параметризации границы, $\mu(s), v(s)$ — плотности потенциалов простого и двойного слоя

$$\mu(r) = \frac{2}{1 + \tau} \frac{\partial}{\partial n(r)} \int_G \left[\left(\frac{\partial E_2(r, s)}{\partial n(s)} - \frac{\partial E_1(r, s)}{\partial n(s)} \right) \tau v(s) + (\tau E_2(r, s) - E_1(r, s)) \mu(s) \right] ds$$

$$(4.2)$$

$$v(r) = -\frac{2}{1 + \tau} \int_G \left\{ \left(\frac{\partial E_2(r, s)}{\partial n(s)} - \tau \frac{\partial E_1(r, s)}{\partial n(s)} \right) v(s) + [E_2(r, s) - E_1(r, s)] \mu(s) \right\} ds$$

Пусть $H = L_2(G) \times L_2(G)$. Прямым вычислением проверяется, что оператор $F(\lambda, \kappa, \xi, \tau) : H \rightarrow H$, определенный правыми частями соотношений (4.2), является компактным.

Поверхность Римана. Зависимость оператора $F(\lambda, \kappa, \xi, \tau)$ от λ удобно исследовать на поверхности Римана аналитического продолжения по λ . Пусть числа $\{|2\pi k \pm \xi|, |(2\pi k \pm \xi)/\kappa|\}_{k=0,1,2,\dots} = \{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ пронумерованы в порядке возрастания, $f(\lambda) = h_1 * F(\lambda, \kappa, \xi, \tau) \langle h_2 \rangle$, где h_1 и h_2 некоторые элементы H , звездочка означает скалярное произведение в H . Построение и свойства поверхности Римана $\Lambda(\xi)$ функции $f(\lambda)$ описаны ранее [1, 2].

Замечание 4.1. Поверхность Римана $\Lambda(\xi)$ бесконечнолистна; точки $\pm \beta_k$ ($k = 1, 2, \dots$) являются точками ветвления второго порядка; для каждого $\lambda \in \Lambda(\xi)$ существует натуральное число $K(\lambda)$, такое, что для $k > K(\lambda)$ справедливо $\operatorname{Re}(\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}) > 0$.

Определение 4.1. Если для некоторого $\lambda^* = \lambda^*(\xi) \in \Lambda(\xi)$ существует нетривиальное решение задачи $T(\xi)$ вида (4.1), то λ^* называется квазисобственной частотой, а соответствующее решение u_* называется квазисобственной функцией этой задачи.

Направление распространения волн вдоль оси абсцисс для каждой распространяющейся моды определяется знаками $\operatorname{Im}(\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}) = \operatorname{Im}(\beta_{(k,2)})$ и $\operatorname{Im}(\sqrt{\beta_k^2 - \kappa^2 \lambda^2}) = \operatorname{Im}(\beta_{(k,1)})$. В общем случае квазисобственные функции могут содержать моды, распространяющиеся в различных направлениях по оси абсцисс. Такие квазисобственные функции представляют самостоятельный интерес.

Определение 4.2. Квазисобственные функции u^* (частоты λ^*) задачи $T(\xi)$ называ-

ются собственными функциями (частотами) этой задачи, если u^* для $|x| \gg 1$ имеет вид (1.9), в котором $\text{sign} [\text{Im}(\beta_{(n,1)})] = \text{sign} [\text{Im}(\beta_{(n,2)})] = \text{const}$ для всех целых n .

Физический смысл квазисобственных и собственных частот определяется содержанием задачи.

Следующее утверждение доказано методом от противного [2, 3].

Лемма 4.1. Собственные частоты задачи $T(\xi)$ могут быть только вещественными.

Аналитическая теорема Фредгольма. Для обоснования корректности задачи $T(\xi)$ необходимо доказать, что хотя бы для некоторых значений $\lambda \in \Lambda(\xi)$ существует ее единственное решение. Пусть $\Lambda_0(\xi) = \{\lambda : \text{Re} \sqrt{\beta_n^2 - \lambda^2} > 0, n = 1, 2, \dots\}$ – лист поверхности Римана $\Lambda(\xi)$. Справедлива [3] следующая лемма.

Лемма 4.2. Если неоднородная задача $T(\xi)$ для $\lambda \in \Lambda_0$, $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ имеет решение, то оно единственно.

В силу леммы 4.2 и теоремы 3.41 [19] справедлива

Теорема 4.1. Если $\lambda \in \Lambda_0(\xi)$, то неоднородная задача $T(\xi)$ имеет единственное решение.

Прямым вычислением проверяется, что $F(\lambda, \kappa, \xi, \tau)$ аналитически зависит от $\lambda \in \Lambda(\xi)$ и непрерывно зависит в сильной операторной норме от $\tau \in [0, \tau_0]$ (τ_0 – произвольное положительное число). В силу этого и так как $F(\lambda, \kappa, \xi, \tau)$ – компактный оператор в H , то для него выполнены условия аналитической теоремы Фредгольма [17] и справедлива

Теорема 4.2. Квазисобственные частоты задачи $T(\xi)$ дискретны на поверхности Римана $\Lambda(\xi)$ и непрерывно зависят от $\tau \in [0, \tau_0]$ и $\xi \in \Xi^{(-)} \cup \Xi^{(+)}$.

Отметим, что в этой теореме существование квазисобственных значений не утверждается. Этот вопрос необходимо исследовать специально.

Если $\tau \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow +\infty$), то задача $T(\xi)$ распадается на две задачи. В области Ω_1 предельная задача описывает волны, распространяющиеся около твердой (мягкой), а в Ω_2 – около мягкой (твердой) поверхности. Волноводные и аномальные свойства задачи T в силу теоремы 4.2 для малых (больших) τ определяются волноводными и аномальными свойствами задач N и D в соответствующих областях.

Волноводное и аномальное свойства, тонкая структура спектра. В силу доказанных утверждений справедлива

Теорема 4.3. Если $0 < \tau \ll 1$ (или $1 \ll \tau$), то одномерно-периодическая граница раздела обладает волноводным свойством. В интервале $(0, \pi/\kappa)$ (или $(0, \pi)$) волноводные частоты задачи T близки к соответствующим волноводным частотам задачи N . Если G – нормально освещаемая поверхность, то волноводные функции и частоты задачи T близки к соответствующим волноводным функциям и частотам задачи N .

Замечание 4.2 (Эффект шепчущей границы раздела.) В силу теоремы 4.3 любая граница раздела для $0 < \tau \ll 1$ (или $1 \ll \tau$) имеет полосу пропускания в области низких частот.

В случае границы раздела второго типа возможны аномальные колебания. Если модифицировать функцию Грина (2.1) так, чтобы она удовлетворяла тождествам (3.6), то доказательство последующего утверждения аналогично доказательству предыдущих теорем.

Теорема 4.4. Если $0 < \tau \ll 1$ (или $1 \ll \tau$), то одномерно-периодическая граница раздела второго типа обладает аномальным свойством. В интервале $(\pi/\kappa, 2\pi/\kappa)$ (или $(\pi, 2\pi)$) аномальные частоты задачи T близки к соответствующим аномальным частотам задачи N .

Доказанные выше теоремы позволяют утверждать, что тонкая структура спектра задачи T для $0 < \tau \ll 1$ (или $1 \ll \tau$) не отличается на интервале частот $(0, 2\pi/\kappa)$ (или $(0, 2\pi)$) от структуры спектра задачи N , показанного на фиг. 6.

5. Заключение. Пусть λ_* – волноводная частота. Из соотношений (1.9) следует, что при удалении от поверхности волноводная функция затухает как $\exp(-|x|\sqrt{\xi^2 - \lambda_*^2})$. Это означает, что она экспоненциально локализована около поверхности. Пространственный период элементарного волноводного пакета имеет вид $Y = 2\pi/\xi$, меняется в интервале $(2, \infty)$ и не связан с периодом поверхности. Полосы пропускания и запираения не зависят от направления распространения волноводной моды. Механика распространения волн, описываемых волноводными функциями около периодической поверхности, известна [20] и согласуется с механическими аналогами – цепочками осциллятора. Механическим аналогом аномальных колебаний являются синфазные колебания цепочки связанных математических маятников.

Влияние третьего измерения на волноводные и аномальные свойства ОПП проверяется прямым вычислением [12, 16]. Переменные разделяются, и исследование волноводных и аномальных свойств трехмерной структуры сводится к решению описанных выше двумерных задач. Если λ_* – волноводная или аномальная частота двумерной задачи и зависимость от третьей координаты имеет вид $\exp(ikz)$, то $\lambda_k = \sqrt{\lambda_*^2 + (k)^2}$ – соответственно волноводная или аномальная частота трехмерной задачи. Для волноводной моды волновым вектором в этом случае является (ξ, k) . Теорема 2.1 позволяет утверждать, что любая твердая поверхность описанного вида имеет нетривиальные волноводные моды для каждого фиксированного волнового вектора.

Проведенные исследования позволяют описать резонансные явления около поверхности в том случае, когда источник колебаний периодически зависит от времени. Для исследуемых задач могут иметь место два типа резонансных явлений.

Резонанс пространственно-локализованного типа обусловлен тем, что для некоторых волноводных частот групповая скорость распространения волноводного пакета равна нулю [16]. Поэтому энергия источника будет локализована в его окрестности.

Резонанс синхрофазотронного типа наблюдается в случае, когда пространственная периодичность цепочки источников и границы совпадают, волноводное число совпадает со сдвигом фазы колебаний источников в различных фундаментальных областях группы трансляций и волноводная частота совпадает с частотой источников. В этом случае растет амплитуда бегущего волноводного пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухинин С.В. Об акустических и электромагнитных колебаниях около периодической решетки // Сб. науч. трудов. Динамика сплошной среды. 1981. Вып. 51. С. 159–168.
2. Сухинин С.В. Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
3. Сухинин С.В. Эффект волновода одномерно-периодической проницаемой структуры // ПМТФ. 1990. № 4. С. 77–85.
4. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрия и группы. М.: Наука, 1983. 239 с.
5. Bagavantam S., Venkatarayudu T. Theory of Groups and its Application to Physical Problems. Waltair: Andhra Univ., 1951. = Багавантам С., Венкатарайуду Т. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 301 с.
6. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
8. Бабич В.М. О теореме существования решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в квазипериодическом случае // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29. № 2. С. 3–9.
9. Rektotys K. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Dordrecht: Reidel Publ., 1980. = Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

10. *McIyer M., Linton C.M.* On the non-existence of trapped modes in acoustic waveguides // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1995. V. 48. Pt. 4. P. 543–555.
11. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ // *Jahresb. Deutsch. Math. Verein.* 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
12. *Сухинин С.В.* Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий // *Сиб. журн. индустр. математики.* 1998. Т. 1. № 2. С. 175–198.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Analysis of Operators. V. IV. New York: Acad. Press, 1978. = *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982. 428 с.
15. *Jones D.S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1953. V. 49. № 4. P. 668–684.
16. *Сухинин С.В.* Волноводное и аномальное свойства периодической ножевой решетки // *ПМТФ.* 1998. Т. 39. № 6. С. 46–56.
17. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York: Springer, 1980. = *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
18. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
19. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. New York: Wiley, 1983. = *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
20. *Brillouin L., Parodi M.* Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Dunod, 1956. = *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 457 с.

Новосибирск
e-mail: sukhinin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
3.VIII.1998