

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 494–504.
2. Appell P. Traité mécanique rationnelle. Т. 4. Fasc. 1. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation // Paris: Gauthier-Villars. 1932. = Анпель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости / Л.; М.: ОНТИ, 1936.

Электросталь

Поступила в редакцию
22.II.1999

© 1999 г. К.Ш. Мкртчян

О ДВОЙСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Исследуются поперечные колебания упругого стержня, через один конец которого передаются перемещения, а другой свободен. Предполагается, что скорость распространения возмущений в стержне конечная. Невозмущенная часть при этом совершает вращательное движение вокруг средней линии. Угол вращения выражается углом искривления средней линии возмущенной части стержня. Получены два типа упругих колебаний: 1) стержень упруго колеблется за счет переданного через конец перемещения, 2) при совершении вращательного движения в стержне возникают упругие колебания и дополнительные силы, обусловленные упругостью [1].

Рассмотрим поперечные колебания упругого стержня длиной l , когда одному концу придано перемещение $A \sin \omega t$, а другой конец свободен. Будем рассматривать решение вида

$$w(t, y) = w_1(t, y) + A \sin \omega t$$

Функция $w_1(t, y)$ должна удовлетворять следующему неоднородному уравнению с граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = A \omega^2 \sin \omega t \quad \left(c^2 = \frac{EJ}{\rho F} \right) \quad (1)$$

$$w_1(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_1(t, 0)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w_1(t, l)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1(t, l)}{\partial y^3} = 0 \quad (3)$$

$$w_1(0, y) = 0, \quad \dot{w}_1(0, y) = -A \omega \quad (4)$$

Здесь c – постоянный коэффициент, E – модуль упругости материала, J – момент инерции, ρ – плотность, F – площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения (1) с заданной правой частью ищем в виде суммы

$$w_1(t, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(t) Z_m(y) \quad (5)$$

где $Z_m(y)$ – m -я собственная форма колебаний, $\theta_m(t)$ – коэффициент динамического увеличения m -й собственной формы колебаний, $m = 1, 2, \dots$.

Собственные функции $Z_m(y)$ строятся с учетом их ортогональности с весом $n(y)$ на отрезке $[0, l]$. После разделения переменных, уравнение (1) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая содержит собственную частоту m -й формы колебаний $k_m = c\lambda_m^2$. Общие решения этой системы, соответствующие краевым и начальным условиям (2), (3), известны и имеют вид

$$Z_m(y) = A_m [U(\mu_m y/l) - \beta_m V(\mu_m y/l)]$$

$$\theta_m(t) = C_m \sin k_m t + \frac{1}{k_m} \int_0^t \Phi_m(\tau) \sin k_m(t - \tau) d\tau$$

$$C_m = -\frac{A\omega}{k_m \alpha_m^2} \int_0^l Z_m(y) dy, \quad \Phi_m(t) = -\omega k_m C_m \sin \omega t$$

$$\beta_m = \frac{\text{sh } \mu_m - \sin \mu_m}{\text{ch } \mu_m + \cos \mu_m}, \quad \mu_m = \lambda_m l$$

где μ_m – корни уравнения $\text{ch } \mu \cos \mu + 1 = 0$.

В рассматриваемом случае вес $n(y) = 1$, а $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ – функции Крылова [2].

Постоянные A_m и α_m определяются из условий ортогональности собственных функций.

После преобразований решение рассматриваемой задачи представим в форме

$$w_1(t, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A\omega \gamma_m \beta_m \bar{Z}_m(y)}{\lambda_m (k_m^2 - \omega^2)} (\omega \sin \omega t - k_m \sin k_m t) \quad (5)$$

$$\gamma_m = \frac{4(\text{ch } \lambda_m l + \cos \lambda_m l)^2}{l \text{sh}^2 \lambda_m l \sin^2 \lambda_m l}, \quad \bar{Z}_m(y) = \frac{Z_m(y)}{A_m}$$

Видно, что колебания состоят из двух частей: вынужденные колебания, пропорциональные $\sin \omega t$, и свободные колебания, пропорциональные $\sin k_m t$.

Когда частота возмущающей силы приближается к одной из собственных частот колебания, имеет место состояние резонанса.

Линейное интегро-дифференциальное уравнение движения и уравнение упругих поперечных колебаний стержня при большой жесткости на изгиб имеет вид [1]

$$\rho F \int_0^l y(y\ddot{\phi} + w_2) dy = M(t) - \rho g F \int_0^l (y \cos \varphi - w_2 \sin \varphi) dy \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = -y\ddot{\phi} - g \cos \varphi \quad (7)$$

с граничными и начальными условиями

$$w_2(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_2(t, 0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_2(t, l)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2(t, l)}{\partial y^3} = 0 \quad (8)$$

$$w_2(0, y) = 0, \quad \dot{w}_2(0, y) = 0 \quad (9)$$

Здесь

$$\varphi(t) = \frac{\partial w_1(t, y')}{\partial y}, \quad y' = \begin{cases} vt - 2kl & \text{при } t > 2kl/v \\ 2(k+1)l - vt & \text{при } t < 2(k+1)l/v \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

(v – скорость распространения волн изгиба вдоль стержня [3]).

Краевая задача (7)–(9) решается по аналогичной методике.

Для коэффициентов $\theta_m^1(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\theta}_m^1(t) + k_m^2 \theta_m^1(t) = \Phi_m^1[t] \quad (10)$$

$$\Phi_m^1[t] = -\frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^l (y\ddot{\phi} + g \cos \varphi) Z_m(y) dy$$

(скобки $[t]$ означают неявную зависимость функции Φ_m^1 от времени).

Построив решение уравнения (10) при начальных условиях (9), заключаем, что упругие колебания стержней во времени движения определяются по закону

$$w_2(t, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k_m} \int_0^t \Phi_m^1[\tau] \sin k_m(t - \tau) d\tau \right] Z_m(y) \quad (11)$$

Решение (11) после преобразований можно представить в виде суммы вынужденных и свободных колебаний, вызванных возмущающими силами $\Phi_m^1[t]$.

Свободные колебания, из-за различного рода сопротивлений, будут постепенно затухать и только вынужденные колебания имеют практическое значение. Опуская подробности, представим вынужденные колебания (без учета собственного веса) при $t > 2kl/v$, ($k = 0, 1, \dots$) из общего решения (11) в виде

$$w_2(t, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A\omega^2 \gamma_m^2 \beta_m \bar{Z}_m(y)}{\lambda_m^2 (\omega^2 - k_m^2)} [\omega_{m1}(a_m) \sin \omega t + \theta_{m2}(a_m) \cos \omega t] \quad (12)$$

$$\theta_{m1}(a_m) = l_m^+ (\text{sh } a_m - \beta_m \text{ch } a_m) (b_m^- d_m^- / 2 + 2\eta_m^2 \omega^2) +$$

$$+ l_m^- (\sin a_m + \beta_m \cos a_m) (b_m^+ d_m^+ / 2 - 2\eta_m^2 \omega^2)$$

$$\theta_{m2}(a_m) = \eta_m k_m^2 \omega 2 [l_m^- (\cos a_m - \beta_m \sin a_m) + l_m^+ (\text{ch } a_m - \beta_m \text{sh } a_m)]$$

$$l_m^{\pm} = \{ [\eta_m^2 \pm (\omega + k_m)^2] [\eta_m^2 \pm (\omega - k_m)^2] \}^{-1}$$

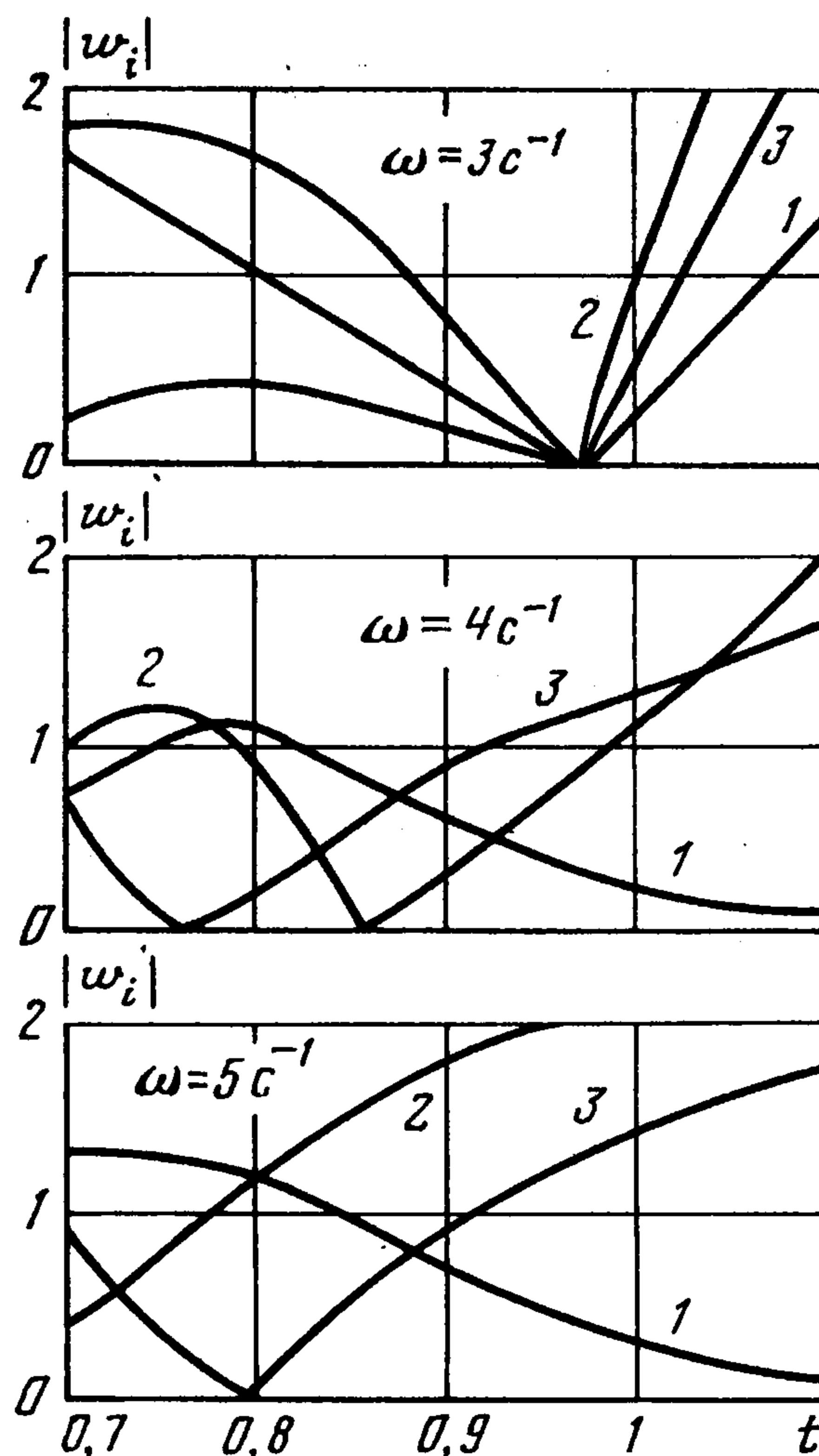
$$d_m^{\pm} = \eta_m^2 \pm (\omega^2 - k_m^2), \quad b_m^{\pm} = \eta_m^2 \pm \omega^2, \quad \eta_m = \lambda_m v$$

$$v = 2\sqrt{\omega c}, \quad a_m = \lambda_m (vt - 2kl)$$

Вынужденные колебания при $t < 2(k+1)l/v$ можно получить с помощью формулы (12), заменив k и v на $-(k+1)$ и $-v$. Когда знаменатель m -х членов ряда (12) становится равным нулю, частота возмущающей силы приближается к одному из значений k_m , $(3 \pm 2\sqrt{2})k_m$ ($m = 1, 2, \dots$), которые определяются из условий $(l_m^-)^{-1} = 0$. В этом случае получаем состояние резонанса.

Сравнивая задачу (1)–(3) с задачей (7)–(9), получаем новые значения $(3 \pm 2\sqrt{2})k_m$ для состояния резонанса.

Для сравнения двух типов вынужденных колебаний, описываемых формулами (5) и (12), проведены численные расчеты для двух типов колебаний стального стержня кольцевого сечения в зависимости от времени, при разных значениях частоты ω .



Результаты расчетов представлены на фигуре при $y = 700$ см. Кривые 1 и 2 характеризуют поведения $|w_1|$ и $|w_2|$, которые представляют абсолютные значения величин вынужденных колебаний стержня, рассчитанных, соответственно, по формулам (5) и (12). Кривая 3 представляет $|w_3| = |w_1 + w_2|$. Видно, что значения прогиба $|w_2|$ выше, чем прогибов $|w_1|$ и $|w_3|$, причем с увеличением t значение $|w_1|$ вначале уменьшается, а затем резко возрастает. Наибольшее абсолютное значение $|w_2|$ в 3,14 раза больше $|w_1|$ и в 1,47 раза больше $|w_3|$.

При расчетах по формулам (5) и (12) взяты первые шесть членов ряда для следующих значений параметров: $A = 1$ см, $l = 700$ см, $E = 2 \times 10^6$ кг/см², $\rho = 7,8 \times 10^{-3}$ кг/см³; внешний диаметр стержня $d_1 = 30$ см; внутренний $d_2 = 28,6$ см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1990. Т. 43. № 4. С. 13–23.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

Гюмри, Армения
e-mail: ndnssp@shirak.am

Поступила в редакцию
12.V.1999