

УДК 531.36

© 1999 г. Н.Б. Григорьева

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ ЯКОБИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Методом, разработанным [1] для решения вопроса условной устойчивости эллипсоидов Маклорена, доказывается устойчивость эллипсоидов Якоби при условиях Дирихле во всех случаях, когда эллипсоиды Якоби существуют.

Как известно, в общем виде задача устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия была сформулирована и решена, для случаев Маклорена и Якоби, Ляпуновым.

Доказательства Ляпунова основывались на применении своего рода аналога теоремы Рауса и сводились к доказательствам наличия строгого минимума у функционала измененной потенциальной энергии на исследуемом в каждом случае стационарном вращении. Применяя свой метод, Ляпунов, в частности, показал, что эллипсоиды Якоби всегда устойчивы при условии, что возмущение удовлетворяет предположениям Дирихле об эллипсоидальной форме поверхности жидкости и однородно-вихревом характере возмущенного поля скоростей: $1/2 \operatorname{rot} v = \{\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)\}$.

Было, однако, показано [1], что в случае возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, исходная динамическая система в функциональном пространстве переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент $\operatorname{rot} v$; полуосей эллипсоида a, b, c и компонент угловой скорости p, q, r в подвижной системе отсчета как функций времени. Это, в свою очередь, позволяет применить к решению задачи устойчивости соответствующих стационарных решений второй метод Ляпунова, что избавляет от необходимости проведения сложных вычислений, связанных с изучением функционала измененной потенциальной энергии на экстремум.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую переходит исходная система в обыкновенных и частных производных, описывающая динамику самогравитирующей жидкости, имеет четыре первых интеграла (энергии, момента количества движения, постоянства интенсивности вихря и массы)

$$\frac{1}{2}(A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2) + \frac{1}{2}(A_2 \omega_1^2 + B_2 \omega_2^2 + C_2 \omega_3^2) + W + \frac{M}{10}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) = \text{const} \quad (1)$$

$$(A_1 p + A_2 \omega_1)^2 + (B_1 q + B_2 \omega_2)^2 + (C_1 r + C_2 \omega_3)^2 = \text{const} \quad (2)$$

$$(\omega_1 / a)^2 + (\omega_2 / b)^2 + (\omega_3 / c)^2 = \text{const} \quad (3)$$

$$abc = a_0 b_0 c_0 \quad (4)$$

Здесь

$$W = -\frac{2}{5} M H, \quad H = \frac{3}{4} M \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad \varphi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \quad (5)$$

$$A_1 = \frac{M}{5} \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{4M}{5} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \quad (ABC, abc)$$

M – масса жидкости.

Эта система допускает частное решение

$$x_0 = \{p = q = \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad r = \omega_3 = \Omega; \quad a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0\} \quad (6)$$

описывающее эллипсоид Якоби, доказательство устойчивости которого (при указанных выше условиях) и будет дано ниже.

Как известно, три параметра: Ω , b_0/a_0 , c_0/a_0 эллипсоида Якоби связаны двумя уравнениями

$$\Omega^2 = P - R \frac{c_0^2}{a_0^2} = Q - R \frac{c_0^2}{b_0^2} \quad (7)$$

где

$$P = -\frac{2}{a_0} \frac{\partial H}{\partial a}, \quad R = -\frac{2}{c_0} \frac{\partial H}{\partial c}, \quad Q = -\frac{2}{b_0} \frac{\partial H}{\partial b} \quad (8)$$

Примем решение (6) за невозмущенное движение. В возмущенном движении положим

$$a = a_0 + \alpha, \quad b = b_0 + \beta, \quad r = \Omega + \xi, \quad \omega_3 = \Omega + \eta \quad (9)$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Подставляя (9) при учете соотношения (4) в интегралы (1) – (3), получим соответствующие им первые интегралы уравнений возмущенного движения, обозначая их V_1, V_2, V_3 соответственно.

Рассмотрим теперь функцию

$$V = 2S_0 \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 + n \tilde{V}_3^2 + v \tilde{V}_2^2 \quad (10)$$

где

$$S = C_1 + C_2 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2), \quad \tilde{V}_i = V_i(X) - V_i(X_0)$$

n и v – какие-то вещественные положительные числа.

Учитывая вид интегралов (1) – (3), для V (10) в малой окрестности X_0 имеем с точностью до членов второго порядка включительно

$$V = \left[2S_0 \left(d\tilde{W} + d \frac{C_1 r^2 + C_2 \omega_3^2}{2} \right) - 2S_0 \Omega_0 d(C_1 r + C_2 \omega_3) \right] + K_1 + K_2 \quad (11)$$

$$K_1 = 2S_0 \frac{M}{10} (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) + 2S_0 \left(\frac{A_{10} p^2}{2} + \frac{A_{20} \omega_1^2}{2} \right) - (A_{10} p + A_{20} \omega_1)^2 +$$

$$+ S_0 B_{10} q^2 + S_0 B_{20} \omega_2^2 - (B_{10} q + B_{20} \omega_2)^2$$

$$K_2 = 2S_0 \left(d^2 \tilde{W} + \frac{\Omega^2}{2} d^2 S + \frac{C_{10}}{2} \xi^2 + \frac{C_{20}}{2} \eta^2 \right) + n(dV_3)^2 + \left(v - \frac{1}{2S_0^2 \Omega^2} \right) (dV_2)^2$$

Здесь $\tilde{W} = W|_{c=a_0 b_0 c_0} / (ab)$, dV_2 и dV_3 – линейные части функций V_2 и V_3 , соответствующие приращениям (9) независимых переменных

$$dV_2 = z = 2S_0 \Omega d(C_1 r + C_2 \omega_3)$$

$$dV_3 = y = 2 \frac{\Omega}{C_0} d \frac{\omega_3}{C} = 2 \frac{\Omega}{C_0^2} \left(\eta + \Omega \frac{\alpha}{a_0} + \Omega \frac{\beta}{b_0} \right) \quad (12)$$

Линейная часть V (10), записанная в квадратных скобках, есть нуль, в силу уравнений (7). Квадратичная форма по $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, p, q, \omega_1, \omega_2, K_1$ положительно определена в силу $c_0 < a_0$, $c_0 < b_0$ и в соответствии с определениями A_i и B_i и S . Форма K_2 есть форма по оставшимся переменным α, β, ξ, η . Будем ее рассматривать теперь, для удобства вычислений, не как форму по $(\alpha, \beta, \xi, \eta)$, а как форму по (α, β, z, y) , где z и y определены формулами (2). Это никак не повлияет на результат, так как свойство положительной определенности инвариантно относительно невырожденной замены переменных. Форма K_2 в переменных $(\alpha,$

β, z, y) принимает, если учесть выражения (12), вид

$$S_0 \left(\left(\tilde{W}_{aa} |_{\tilde{x}_0} + 3 \frac{M}{5} \Omega^2 \right) \alpha^2 + \left(\tilde{W}_{bb} |_{\tilde{x}_0} + 3 \frac{M}{5} \Omega^2 \right) \beta^2 + 2 \tilde{W}_{ab} |_{\tilde{x}_0} \alpha \beta \right) + n y^2 + \left(v - \frac{1}{2 S_0^2 \Omega^2} \right) z^2 + \dots (13)$$

Здесь $\tilde{x}_0 = (a_0, b_0)$, а точками обозначены произведения $\alpha z, \alpha y, \beta z, \beta y$ на ограниченные, зависящие от a_0 и b_0 , коэффициенты. Ясно, что в случае положительной определенности формы по α и β с матрицей

$$\begin{vmatrix} \tilde{W}_{aa} |_{\tilde{x}_0} + \frac{3M}{5} \Omega^2 & \tilde{W}_{ab} |_{\tilde{x}_0} \\ \tilde{W}_{ab} |_{\tilde{x}_0} & \tilde{W}_{bb} |_{\tilde{x}_0} + \frac{3M}{5} \Omega^2 \end{vmatrix} \quad (14)$$

числа n и v можно будет выбрать так, что форма (13) окажется положительно-определенной, равно как и V (10) с этими значениями (n, v) . Это будет означать, что V (10) – функция Ляпунова данной задачи и стационарное вращение (6) устойчиво.

С помощью элементарных вычислений нетрудно показать, что матрица (14) положительно определена.

Учитывая выражения (5) для $W(a, b, c)$ и выражение для $\tilde{W}(a, b)$, после дифференцирований получим в явном виде: фигурирующие в (14) вторые производные от $\tilde{W}$ в точке (a_0, b_0) , а также, исходя из уравнений (7), – выражение для Ω^2 .

Используя эти выражения, получим формулы для элементов m_{ij} , $(i, j = 1, 2)$, $m_{22} = m_{11} |_{a_0=b_0}$, $m_{12} = m_{21}$, матрицы (14). При этом, как нетрудно проверить, оказывается, что

$$m_{11} \pm \frac{b_0}{a_0} m_{12} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} M^2 \int \frac{D_1^\pm(\lambda)}{\varphi^{3/2} a_0^2 (c_0^2 + \lambda)(a_0^2 + \lambda)} d\lambda$$

$$m_{22} \pm \frac{b_0}{a_0} m_{12} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} M^2 \int \frac{D_2^\pm(\lambda)}{\varphi^{3/2} b_0^2 (c_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)} d\lambda$$

где $D_1^\pm$ – два полинома четвертой степени от λ с коэффициентами, являющимися функциями от a_0, b_0, c_0 , причем все эти коэффициенты положительны при $c_0 < a_0, c_0 < b_0$; то же самое относится и к $D_2^\pm = D_1^\pm |_{a_0=b_0}$.

Поэтому имеют место соотношения

$$\tilde{W}_{aa}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 > \tilde{W}_{ab}^0 \frac{b_0}{a_0}, \quad \tilde{W}_{bb}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 > \tilde{W}_{ab}^0 \frac{a_0}{b_0}$$

$$\tilde{W}_{aa}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 > -\tilde{W}_{ab}^0 \frac{b_0}{a_0}, \quad \tilde{W}_{bb}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 > -\tilde{W}_{ab}^0 \frac{a_0}{b_0}$$

Из них следует, во-первых, положительность обоих диагональных элементов (14), а во-вторых, то, что

$$\left(\tilde{W}_{aa}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 \right) \left(\tilde{W}_{bb}^0 + \frac{3M}{5} \Omega^2 \right) > \left(\tilde{W}_{ab}^0 \right)^2$$

Так что (14) – положительно-определенная матрица. Из этого, в свою очередь, следует положительная определенность формы (13), а значит, и V (10), при некоторых, достаточно больших, $n, v > 0$. Поэтому (6) – устойчивое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую переходит исходная система с бесконечным числом степеней свободы при условиях Дирихле, и эллипсоиды Якоби условно устойчивы (по отношению к $a, b, c, p, q, r, \omega_1, \omega_2, \omega_3$) всегда, когда они определены (т.е. при эксцентриситетах

$$l = \sqrt{a^2 - c^2} / a \geq l_0 = 0,8126).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 494–504.
2. Appell P. Traité mécanique rationnelle. Т. 4. Fasc. 1. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation // Paris: Gauthier-Villars. 1932. = Анпель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости / Л.; М.: ОНТИ, 1936.

Электросталь

Поступила в редакцию
22.II.1999

© 1999 г. К.Ш. Мкртчян

О ДВОЙСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Исследуются поперечные колебания упругого стержня, через один конец которого передаются перемещения, а другой свободен. Предполагается, что скорость распространения возмущений в стержне конечная. Невозмущенная часть при этом совершает вращательное движение вокруг средней линии. Угол вращения выражается углом искривления средней линии возмущенной части стержня. Получены два типа упругих колебаний: 1) стержень упруго колеблется за счет переданного через конец перемещения, 2) при совершении вращательного движения в стержне возникают упругие колебания и дополнительные силы, обусловленные упругостью [1].

Рассмотрим поперечные колебания упругого стержня длиной l , когда одному концу придано перемещение $A \sin \omega t$, а другой конец свободен. Будем рассматривать решение вида

$$w(t, y) = w_1(t, y) + A \sin \omega t$$

Функция $w_1(t, y)$ должна удовлетворять следующему неоднородному уравнению с граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = A \omega^2 \sin \omega t \quad \left(c^2 = \frac{EJ}{\rho F} \right) \quad (1)$$

$$w_1(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_1(t, 0)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w_1(t, l)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1(t, l)}{\partial y^3} = 0 \quad (3)$$

$$w_1(0, y) = 0, \quad \dot{w}_1(0, y) = -A \omega \quad (4)$$

Здесь c – постоянный коэффициент, E – модуль упругости материала, J – момент инерции, ρ – плотность, F – площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения (1) с заданной правой частью ищем в виде суммы

$$w_1(t, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(t) Z_m(y) \quad (5)$$