

УДК 539.3:534.1

© 1999 г. В.М. Левин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ, АРМИРОВАННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВОЛОКНАМИ

Рассматривается распространение продольных упругих волн в композитных материалах, состоящих из полимерной матрицы, армированной непрерывными волокнами в одном направлении. Армирующие волокна обладают пьезоэлектрическими свойствами и имеют тонкое токопроводящее покрытие ("шунтированные волокна"). Рассеяние электрической энергии в таких материалах приводит к дисперсии скорости упругих волн и их затуханию. Методом эффективного поля определяются макроскопические электроупругие постоянные рассматриваемых композитов. Эти постоянные позволяют найти в явном виде зависимость действительной и мнимой частей волнового числа продольной волны, распространяющейся вдоль направления армирования, от частоты, а также от физических и геометрических характеристик компонентов.

В последнее время для демпфирования механических колебаний в конструкциях получил распространение метод [1–3], связанный с использованием пьезоэлектрических элементов, обладающих способностью преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот. Одна из таких возможностей основана на применении в качестве армирующих элементов в композитном материале волокон из пьезоэлектрической керамики (PZT) с тонким электропроводным покрытием ("шунтированных" волокон). Это покрытие образует пассивную электрическую цепь, рассеивающую электрическую энергию, что приводит к затуханию упругих колебаний в таких материалах. Была предложена [2] простая одномерная модель ("правило смеси") для количественного описания этого эффекта. Ниже используется уточненная схема (метод эффективного поля [4, 5]), позволяющая учесть влияние объемности напряженно-деформированного состояния в материале и электроупругой связанности на выражения для эффективных электроупругих постоянных.

1. Интегральные представления электроупругих полей в армированных волокнами композитах и процедура осреднения. Рассмотрим однородный пьезоэлектрический материал, находящийся в изотермических условиях. Линейные определяющие соотношения для такого материала имеют вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{ijk}E_k, \quad D_i = e_{ikl}\epsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k \quad (1.1)$$

Здесь σ и ϵ – тензоры напряжений и деформаций, E и D – векторы напряженности электрического поля и индукции соответственно, $C = C^E$ – тензор упругих модулей при фиксированном векторе E , $\epsilon = \epsilon^E$ – тензор коэффициентов диэлектрической проницаемости, e – тензор пьезоэлектрических постоянных, характеризующих связанные электроупругие эффекты, индекс T означает операцию транспонирования.

Соотношения (1.1) удобно записывать в следующей краткой форме:

$$J = LF, \quad J = \begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix}, \quad L = \begin{Bmatrix} C & -e \\ e^T & \epsilon \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ E \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

где "матрицу" L следует рассматривать как линейный оператор, переводящий тензорно-векторную пару $[\sigma, D]$ в аналогичную пару $[\epsilon, E]$ и имеющий симметрию электроупругих постоянных.

Соотношения, обратные (1.1) могут быть записаны в виде

$$F = MJ, \quad M = \begin{pmatrix} S & d \\ -d^T & \eta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$S = S^D = (C + e\epsilon^{-1}e^T)^{-1}, \quad \eta = \eta^\sigma = (\epsilon + e^T C^{-1}e)^{-1}, \quad d = Se\epsilon^{-1} = C^{-1}e\eta$$

Рассмотрим теперь композитный материал, состоящий из однородной матрицы с оператором электроупругих характеристик L^0 , армированной параллельной системой непрерывных круговых цилиндрических волокон с электроупругими характеристиками $L = L^0 + L^1$. Оператор L может быть переменным внутри каждого волокна. Обозначив через $V(x)$ характеристическую функцию области V , занятой волокнами, тензор деформации $\epsilon(x)$ и вектор напряженности электрического поля $E(x)$ представим следующим образом [5]:

$$F(x) = F^0(x) + \int P(x - x')Q(x')dx' \quad (1.4)$$

$$Q(x) = L^1(x)F(x)V(x), \quad L^1(x) = L(x) - L^0$$

Здесь $F^0 = [\epsilon^0, E^0]$ – приложенные к среде внешние упругое и электрическое поля, которые далее будем считать однородными. Ядро интегрального оператора в (1.4) выражается через вторые производные от функции Грина $G(x)$ совместной теории электроупругости для среды со свойствами L^0 [5]

$$P(x) = \nabla G(x) \nabla, \quad G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} G(k) e^{ik \cdot x} dx \quad (1.5)$$

$$G(k) = \begin{pmatrix} G_{ik}(k) & -\gamma_i(k) \\ \gamma_k(k) & g(k) \end{pmatrix}$$

$$G_{ij} = \left(\Lambda_{ij} + \frac{1}{\lambda} h_i h_j \right)^{-1}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\lambda} h_j G_{ij}, \quad g = -(\lambda + h_i \Lambda_{ij}^{-1} h_j)^{-1}$$

$$\Lambda_{il}(k) = C_{ijkl}^0 k_j k_l, \quad h_i(k) = e_{ikl}^0 k_k k_l, \quad \lambda(k) = \epsilon_{ik}^0 k_i k_k$$

Аналогично (1.4) могут быть представлены и поля напряжений и электрического смещения $J = [\sigma, D]$

$$J(x) = J^0(x) + \int R(x - x')M^0 Q(x')dx' \quad (1.6)$$

$$J^0(x) = L^0 F^0(x), \quad R(x) = -L^0 \delta(x) - L^0 P(x) L^0$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось x_3 совпадала с направлением армирования. Поскольку возмущение электроупругих характеристик L^1 , а также упругие и электрические поля внутри волокон (в случае постоянных внешних полей F^0) зависят только от координат x_1, x_2 , то интегральные представления (1.4) и (1.6) принимают вид

$$F(\bar{x}) = F^0 + \int \hat{P}(\bar{x} - \bar{x}')Q(\bar{x}')d\bar{x}', \quad \bar{x} = \bar{x}(x_1, x_2)$$

$$J(\bar{x}) = J^0 + \int \hat{R}(\bar{x} - \bar{x}')M^0 Q(\bar{x}')d\bar{x}' \quad (1.7)$$

Ядро $\hat{P}(\bar{x})$ связано с функцией $P(x)$ в (1.5) соотношением

$$\hat{P}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что символ оператора $\hat{P}$ (преобразование Фурье $\hat{P}(\bar{k})$ функции $\hat{P}(\bar{x})$) определяется выражением

$$\hat{P}(\bar{k}) = kG(k)k|_{k_3=0}, \quad \bar{k} = \bar{k}(k_1, k_2) \quad (1.9)$$

где функция $G(k)$ определена в (1.5).

Пусть теперь множество волокон является случайным и однородно распределенным в пространстве. При этом задача осреднения состоит в определении средних по ансамблю реализации этого множества электроупругих полей в произвольной точке x композитного материала. Исходя из соотношений (1.7), запишем выражения для указанных средних в виде

$$\langle F(\bar{x}) \rangle = F^0 + \int \hat{P}(\bar{x} - \bar{x}') \langle Q(\bar{x}') \rangle d\bar{x}' \quad (1.10)$$

$$\langle J(\bar{x}) \rangle = J^0 + \int \hat{R}(\bar{x} - \bar{x}') M^0 \langle Q(\bar{x}') \rangle d\bar{x}'$$

Здесь учтено, что $\hat{P}(\bar{x})$ и $\hat{R}(\bar{x})$ – детерминированные функции. Если множество волокон пространственно однородно, $F(\bar{x})$, $J(\bar{x})$ и $Q(\bar{x})$ – однородные случайные функции, обладающие свойством эргодичности. Поэтому, например, среднее $\langle Q(\bar{x}) \rangle$ – постоянная величина, значение которой можно найти на основе типичной фиксированной реализации функции $Q(\bar{x})$

$$\langle Q \rangle = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_S Q(\bar{x}) d\bar{x} \quad (1.11)$$

Здесь S – область в плоскости x_1, x_2 , в пределе занимающая всю плоскость. Подставим сюда выражение для $Q(\bar{x})$ из (1.1) и учитывая, что в силу линейности задачи функции $F(\bar{x})$ представляется в форме

$$F(\bar{x}) = A(\bar{x})F^0, \quad A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} A(\bar{x}) & \mu(\bar{x}) \\ v(\bar{x}) & \lambda(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

получим

$$\langle Q \rangle = n_0 Q F^0, \quad Q = \langle Q_S \rangle, \quad Q_S = \int_S L^1(\bar{x}) A(\bar{x}) d\bar{x} \quad (1.13)$$

Здесь n_0 – числовая концентрация волокон, интеграл Q_S берется по поперечному сечению S каждого волокна, среднее $\langle Q_S \rangle$ вычисляется по ансамблевому распределению операторов Q_S .

В дальнейшем будем считать, что условиями бесконечности фиксируется средняя деформация композита и средняя интенсивность электрического поля, которые не зависят от свойств и концентрации волокон и совпадают с постоянными внешними полями ϵ^0 и E^0 ($\langle F \rangle = F^0$). Тем же путем, что и для несвязанной упругой задачи [4], можно показать, что действие интегральных операторов с ядрами $\hat{P}$ и $\hat{R}$ на постоянные определяются равенствами

$$\int \hat{P}(\bar{x} - \bar{x}') \langle Q \rangle d\bar{x}' = 0, \quad \int \hat{R}(\bar{x} - \bar{x}') M^0 \langle Q \rangle d\bar{x}' = \langle Q \rangle \quad (1.14)$$

Отсюда и из (1.10) и (1.13) следуют соотношения

$$\langle J \rangle = L^* \langle F \rangle, \quad L^* = L^0 + n_0 Q \quad (1.15)$$

где L^* – оператор электроупругих характеристик композитного материала.

Таким образом, задача осреднения эквивалентна задаче определения эффективных электроупругих констант композита L^* и сводится к построению оператора Q , определенного в (1.13). Здесь для построения этого оператора используется одна из самосогласованных схем (метод эффективного поля [4,5]), основанная на решении электроупругой задачи для одного изолированного волокна в однородной среде.

2. Метод эффективного поля. В соответствии с основной гипотезой метода эффективного поля будем считать, что каждое волокно в композите ведет себя как изолированное в однородной среде со свойствами матрицы L^0 , а наличие окружающих волокон учитывается с помощью эффективных внешних полей $F^* = [\epsilon^* E^*]$, действующих на это волокно и не совпадающих с $F^0 = [\epsilon^0, E^0]$. Поля ϵ^* и E^* предполагаются постоянными и одинаковыми для всех волокон.

Используя эту гипотезу, функцию $Q(x)$ можно представить в форме

$$Q(x) = L^1(\bar{x}) A^0(\bar{x}) F^* \Omega(\bar{x}) \quad (2.1)$$

где $\Omega(\bar{x})$ – характеристическая функция области в плоскости x_1, x_2 , занятой поперечными сечениями волокон, а оператор $A^0(\bar{x})$ определяется из решения задачи для одиночного волокна в среде со свойствами матрицы L^0 при воздействии постоянных полей ϵ^* и E^* .

В свою очередь локальные внешние поля $F^* = [\epsilon^*, E^*]$ в точке $\bar{x}$, принадлежащей произвольному волокну ($\bar{x} \in \Omega$), представляются в виде

$$F^*(\bar{x}) = F^0 + \int \hat{P}(\bar{x} - \bar{x}') L^1(\bar{x}') A^0(\bar{x}') F^* \Omega(\bar{x}, \bar{x}') d\bar{x}' \quad (2.2)$$

Функция $\Omega(\bar{x}, \bar{x}')$ определена соотношением

$$\Omega(\bar{x}, \bar{x}') = \sum_{i \neq k} \Omega_i(\bar{x}'), \quad \bar{x} \in \Omega_k \quad (2.3)$$

где $\Omega_i(\bar{x})$ – характеристическая функция области, занятой поперечным сечением i -го волокна.

Осредним соотношение (2.2) при условии $\bar{x} \in \Omega$, предполагая статистическую независимость свойств волокон от их расположения в пространстве. В результате получим

$$\langle F^*(\bar{x}) | \bar{x} \rangle = F^0 + \left(n_0 \int \hat{P}(\bar{x} - \bar{x}') L^A \Psi(\bar{x} - \bar{x}') d\bar{x}' \right) F^* \quad (2.4)$$

Здесь обозначено

$$L^A = \left\langle \int L^1(\bar{x}) A^0(\bar{x}) d\bar{x} \right\rangle, \quad \Psi(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{\langle \Omega(\bar{x}) \rangle} \langle \Omega(\bar{x}, \bar{x}') | \bar{x} \rangle \quad (2.5)$$

где $\langle \cdot | \bar{x} \rangle$ означает осреднение при условии $\bar{x} \in \Omega$. Из определения функции $\Omega(\bar{x}, \bar{x}')$ следует, что $\Psi(\bar{x})$ – непрерывная функция и $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\bar{x}) \rightarrow 1$ при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$. В дальнейшем будем считать, что поперечные сечения волокон распределены в плоскости x_1, x_2 изотропно. В этом случае $\Psi(\bar{x}) = \Psi(|\bar{x}|)$.

Отождествляя среднее $\langle F^*(\bar{x}) | \bar{x} \rangle$ с эффективным полем F^* для каждого включения, из (2.4) найдем

$$F^* = D F^0, \quad D = (I - n_0 P^0 L^A)^{-1}, \quad P^0 = \int \hat{P}(\bar{x}) [1 - \Psi(\bar{x})] d\bar{x} \quad (2.6)$$

$$I = \begin{Bmatrix} I_{ijkl} & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{Bmatrix}, \quad I_{ijkl} = \delta_{i(k} \delta_{l)j}$$

Здесь оператор P^0 не зависит от конкретного вида функции $\Psi(|\bar{x}|)$ и в случае изотропной матрицы с постоянными Ламе λ_0, μ_0 и коэффициентом диэлектрической

проницаемости ϵ_0 определяется выражениями

$$\mathbf{P}^0 = \begin{pmatrix} P_{ijkl}^0 & 0 \\ 0 & P_{ik}^0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} P_{ijkl}^0 &= P_1^0 \theta_{ij} \theta_{kl} + \frac{1}{2} P_2^0 (\theta_{ik} \theta_{lj} + \theta_{il} \theta_{kj} - \theta_{ij} \theta_{kl}) + \\ &+ \frac{1}{4} (P_2^0 - P_1^0) (\theta_{ik} m_l m_j + \theta_{jk} m_l m_i + \theta_{il} m_k m_j + \theta_{jl} m_k m_i) \\ P_n^0 &= \frac{n - \kappa_0}{4\mu_0}, \quad n = 1, 2; \quad \kappa_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad P_{ik}^0 = \frac{1}{2\epsilon_0} \theta_{ik}, \quad \theta_{ij} = \delta_{ij} - m_i m_j \end{aligned}$$

где m_i — составляющие единичного вектора, параллельного волокнам.

Используя соотношения (2.6), для среднего от функции $\mathbf{Q}(x)$ (2.1) можно записать

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = n_0 \mathbf{Q} F^0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{L}^A \mathbf{D} \quad (2.8)$$

Отсюда и из (1.14) следует выражение для оператора эффективных электроупругих характеристик

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^0 + n_0 \mathbf{L}^A \mathbf{D} \quad (2.9)$$

3. Композит, армированный шунтированными волокнами. Допустим, что каждое волокно в композитном материале состоит из внутреннего ядра радиуса a из пьезоэлектрической керамики, окруженного токопроводящей оболочкой (шунтом) с внешним радиусом b . Пьезоэлектрическую керамику будем считать трансверсально-изотропным материалом с осью симметрии свойств, совпадающей с геометрической осью волокна. Внешняя оболочка так же, как и матрица, предполагаются изотропными.

Пусть макроскопическое нагружение композита сводится к однородным деформации вдоль направления армирования $\langle \epsilon_z \rangle$ и вектору напряженности электрического поля $\langle E_z \rangle$. Общий метод решения задачи для одного изолированного слоисто-неоднородного волокна, изложенный для упругой задачи [6], может быть использован здесь и для связанной электроупругой задачи. Однако в рассматриваемом случае волокна с одним покрытием и осесимметричного напряженно-деформированного состояния среды с волокном решение этой задачи проще получить непосредственно. При этом оператор $\mathbf{A}^0(\bar{x})$ в (2.1) представляется в виде

$$\mathbf{A}^0(\bar{x}) = \begin{pmatrix} A(\bar{x}) & h(\bar{x}) \\ 0 & t^1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{ijkl}(\bar{x}) &= \begin{cases} A_{ijkl}^f, & h(\bar{x}) = \begin{cases} h_f e_1^f \theta_{ij} m_k, & 0 \leq r \leq a \\ h_p e_1^f \theta_{ij} m_k, & a \leq r \leq b \end{cases} \\ A_{ijkl}^p, & \end{cases} \\ A_{ijkl}^s &= A_1^s \theta_{ij} \theta_{kl} + A_2^s \theta_{ij} m_k m_l + m_i m_j m_k m_l, \quad s = f, p \\ A_1^f &= \frac{1}{2\Delta} (\lambda_0 + 2\mu_0) (\lambda_p + 2\mu_p), \quad A_1^p = \frac{1}{2\Delta} (\lambda_0 + 2\mu_0) (k_f + \mu_p) \\ A_2^f &= -\frac{1}{2\Delta} [(l_f - \lambda_0) (\lambda_p + 2\mu_p) + \eta (l_f - \lambda_p) (\mu_0 - \mu_p)] \\ A_2^p &= -\frac{1}{2\Delta} [(l_p - \lambda_0) (k_f + \mu_p) + (1 + \eta) (l_f - \lambda_p) (\mu_0 - \mu_p)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$h_f = \frac{1}{2\Delta}[\lambda_p + 2\mu_p + \eta(\mu_0 - \mu_p)], \quad h_p = -\frac{1-\eta}{2\Delta}(\mu_0 - \mu_p)$$

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b^2}, \quad \Delta = (\lambda_p + 2\mu_p)(k_f + \mu_0) + \eta(k_f - \lambda_p - \mu_p)(\mu_0 - \mu_p)$$

В этих выражениях $t_{ij} = m_i m_j$, $\lambda_0, \mu_0, \lambda_p, \mu_p$ – постоянные Ламе материалов матрицы и покрытия соответственно, n_f, k_f и l_f – модули упругости трансверсально изотропного волокна, e_1^f, e_3^f – его пьезоупругие константы. Эти величины следующим образом выражаются через "обычные" двухиндексные компоненты тензоров C_{ijkl}^f и e_{ijk}^f , наиболее часто встречающиеся в литературе:

$$n_f = C_{33}^f, \quad k_k = \frac{1}{2}(C_{11}^f + C_{12}^f), \quad l_f = C_{13}^f, \quad e_1^f = e_{13}^f, \quad e_3^f = e_{33}^f \quad (3.3)$$

Композит в целом трансверсально-изотропен. Приведенные формулы позволяют найти следующие выражения для трех эффективных электроупругих характеристик материала, которые понадобятся в дальнейшем для анализа распространения волн:

$$n^* = \lambda_0 + 2\mu_0 + p(n_A + \kappa l_A^2) \quad (3.4)$$

$$e_3^* = p(e_3^A + \kappa l_A e_1^A), \quad \varepsilon_3^* = \varepsilon_0 + p(e_3^A - \kappa(e_1^A)^2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa &= 4pP_1^0(1 - 4pP_1^0 k_A)^{-1} \\ k_A &= 2\eta(k_p - \lambda_0 - \mu_0)A_1^p + 2(1 - \eta)(k_f - \lambda_0 - \mu_0)A_1^f \\ l_A &= 2\eta(l_p - \lambda_0)A_1^p + 2(1 - \eta)(l_f - \lambda_0)A_1^f \\ n_A &= \eta[\lambda_p + 2\mu_p - \lambda_0 - 2\mu_0 + 2(\lambda_p - \lambda_0)A_2^p] + \\ &+ (1 - \eta)[n_f - \lambda_0 - 2\mu_0 + (l_f - \lambda_0)A_2^f] \\ e_1^A &= 2(1 - \eta)e_1^f A_1^f, \quad e_3^A = (1 - \eta)(e_3^f + 2e_1^f A_2^f) \\ \varepsilon_3^A &= \eta(\varepsilon_p - \varepsilon_0) + (1 - \eta)(e_3^f - \varepsilon_0) + 2(1 - \eta)(e_1^f)^2 h_f \end{aligned} \quad (3.5)$$

p – объемная концентрация волокон, $\varepsilon_0, \varepsilon_p, \varepsilon_3^f$ – коэффициенты диэлектрической проницаемости матрицы, покрытия и волокна в направлении его оси симметрии.

Заметим, что простая линейная модель, основанная на "правиле смеси", [2], приводит к следующим эффективным электроупругим характеристикам:

$$\begin{aligned} n_{(l)}^* &= \lambda_0 + 2\mu_0 + p[\eta(\lambda_p + 2\mu_p) - \lambda_0 - 2\mu_0 + \\ &+ (1 - \eta)(n_f - \lambda_0 - 2\mu_0)], \quad e_{3(l)}^* = p e_3^f \\ e_{3(l)}^* &= \varepsilon_0 + p[\eta(\varepsilon_p - \varepsilon_0) + (1 - \eta)(e_3^f - \varepsilon_0)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Разность между этими величинами и соответствующими эффективными константами, приведенными в (3.3), пропорциональна квадрату разности между электроупругими константами компонентов. Это различие несущественно, если характеристики компонентов различаются мало, но в случае большого контраста в их свойствах различия величин (3.4) и (3.6) могут быть значительными.

4. Распространение продольной упругой волны в среде, армированной шунтированными пьезоэлектрическими волокнами. Уравнения стационарных колебаний

рассматриваемого композита, дополненные следствием из закона Ампера в длинно-волновом приближении могут быть записаны в виде

$$\operatorname{div}\langle\sigma(x)\rangle + \omega^2 \rho^* \langle u(x)\rangle = 0 \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div}(i\omega\langle D(x)\rangle - \beta^* \operatorname{grad}\langle\varphi(x)\rangle) = 0$$

Здесь $\langle u_i(x)\rangle$ – амплитудное значение среднего вектора упругих смещений, $\langle\varphi(x)\rangle$ – средний потенциал электрического поля, ω – частота, β_{ij}^* – тензор эффективных коэффициентов электропроводности среды, ρ^* – ее эффективная плотность

$$\rho^* = (1-\eta)\rho_0 + p[\eta\rho_p + (1-\eta)\rho_f]$$

где ρ_0, ρ_p, ρ_f – плотность матрицы, покрытия и пьезокерамики соответственно. Считая, что электропроводность матрицы и пьезокерамического волокна пренебрежимо малы по сравнению с электропроводностью покрытия $\beta_{ij}^p = \beta_p \delta_{ij}$, имеем

$$\beta_{ij}^* = p\eta\beta_p\delta_{ij}$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями для композита

$$\langle J(x)\rangle = L^* \langle F(x)\rangle, \quad L^* = \begin{Bmatrix} C^* & -e^* \\ e^{*T} & \epsilon^* \end{Bmatrix}$$

можем записать

$$\begin{aligned} \partial_j (C_{ijkl}^* \partial_l \langle u_k(x)\rangle + e_{ijk}^* \partial_k \langle \varphi(x)\rangle) + \rho^* \omega^2 \langle u_i(x)\rangle &= 0 \\ \partial_j (i\omega e_{jkl}^{*T} \partial_l \langle u_k(x)\rangle - i\omega \epsilon_{jk}^* \partial_k \langle \varphi(x)\rangle - \beta_{jk}^* \partial_k \langle \varphi(x)\rangle) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Будем искать решение этой системы в виде плоских волн, распространяющихся вдоль направления армирования

$$\langle u_i(x)\rangle = U m_i e^{iqm \cdot x}, \quad \langle \varphi(x)\rangle = \Phi e^{iqm \cdot x}$$

где q – волновое число. Подстановка этих выражений в (4.2) дает систему алгебраических уравнений относительно U и Φ , откуда следует дисперсионное соотношение, которое может быть записано в форме [2]

$$q^2 n^*(\omega) = \rho^* \omega^2, \quad n^*(\omega) = n'(\omega) + i n''(\omega)$$

$$n'(\omega) = n^* \left[1 + \frac{\delta(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right], \quad n''(\omega) = \frac{n^* \delta \omega \tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\delta = \frac{e_3^{*2}}{n^* \epsilon_3^*}, \quad \tau = \frac{\epsilon_3^*}{p\eta\beta_p}$$

Таким образом, волновое число q является комплексным

$$q(\omega) = q_R(\omega) + i q_I(\omega)$$

$$q_R = \frac{\omega}{v^*(\omega)}, \quad q_I = \frac{\omega}{v^*(\omega)} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}; \quad v^*(\omega) = \sqrt{\frac{|n^*(\omega)|}{\rho^*}} \sec \frac{\psi}{2}$$

Действительная его часть определяет дисперсию фазовой скорости $v^*(\omega)$, а мнимая часть – зависимость от частоты коэффициента затухания, отнесенного к единице длины. В этих выражениях ψ – угол фазового запаздывания, который определяется

через тангенс потерь

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\delta \omega \tau}{1 + (1 + \delta)(\omega \tau)^2}$$

Отсюда может быть найден максимальный тангенс потерь

$$(\operatorname{tg} \psi)_{\max} = \frac{\delta}{2\sqrt{1 + \delta}}$$

Пример. Рассмотрим численный пример для следующих значений электроупругих характеристик компонентов [3] (волокна из PZT-5A-керамики диаметром $30\mu\text{m}$ с медным покрытием толщиной $1\mu\text{m}$ в полимерной матрице):

$$k_f = 98,2; \quad l_f = 75,2; \quad n_f = 111 \text{ ГПа}$$

$$e_1^f = -5,4; \quad e_3^f = 15,8; \quad e_3^f = 7,34; \quad p = 0,3$$

$$\lambda_p = 120; \quad \mu_p = 40 \text{ ГПа}, \quad \epsilon_p = 0,9 \times 10^{-11}, \quad \beta_p = 6,2 \times 10^{-5} (\Omega\text{m})^{-1}, \quad \eta = 0,06$$

$$\lambda_0 = 4,4, \quad \mu_0 = 1,8 \text{ ГПа}, \quad \epsilon_0 = 3,7 \times 10^{-11}$$

Рассчитанный для этих значений постоянных максимальный тангенс потерь равен 0,183 при частоте 66 Гц. Рассчитанная по предложенным в [2] упрощенным формулам (3.6) эта величина равна 0,13.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hagood N.W., Flotow A. *vn.* Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // J. Sound and Vibrat. 1991. V. 146. N 2. p. 243–268.
2. Mayer R., Moses P., ShROUT T., Witham J., Lesieutre G.A., Yarlagadda S. Passive vibration damping materials: Piezoelectric ceramic composites for vibration damping application. Annual Technical Report. Grant No N00014-92-J-1391. February 1994. p. 15.
3. Lesieutre G.A., Yarlagadda S., Yoshikawa S., Kurtz S.K., Xu Q.C. Passively damped structural composite materials using resistively shunted piezoceramic fibers // J. Mater. Enging and Performance. 1993. V. 2. N 6. p. 27–32.
4. Kanaun S.K., Levin V.M. The effective field method in mechanics of matrix composite materials. // Advances in mathematical modeling of composite materials. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. p. 1–58.
5. Levin V.M. The overall properties of piezoactive matrix composite materials // Continuum models and discrete systems: Proc. CMDS8. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1996. p. 225–232.
6. Канаун С.К., Кудрявцева Л.Т. Упругие и термоупругие характеристики композитов, армированных однонаправленными слоистыми волокнами // ПММ. 1998. Т. 53. Вып. 5. С. 798–807.

Петрозаводск
e-mail: levin@levin.pgu.karelia.su

Поступила в редакцию
12.III.1998