

УДК 539.3

© 1999 г. А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев

**НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ**

Дается формулировка системы граничных интегральных уравнений первого рода с кусочно-гладкими ядрами, к которым сводятся краевые задачи электроупругости в случае установившихся колебаний. Излагаемый подход не использует понятия фундаментальных решений и основан лишь на анализе характеристического многочлена оператора электроупругости.

Распространение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) на модели, описывающие связанные поля в механике сплошных сред – электроупругость [1,2], магнито-электроупругость [3], термоэлектроупругость [4], основано, как правило, на теории потенциала и теореме взаимности, на построении фундаментальных и сингулярных решений для соответствующих операторов и обобщений предельных теорем для аналогов потенциалов простого и двойного слоя [5]. Если в изотропной теории упругости эти решения выражаются в явном виде через элементарные или специальные функции, то для указанных моделей связанных задач могут быть построены лишь интегральные представления фундаментальных решений, что в значительной степени снижает эффективность дальнейшего численного анализа построенных систем ГИУ на основе метода граничных элементов [6].

Был предложен [7] иной подход к формулировке систем ГИУ анизотропной теории упругости, позволивший свести краевую задачу для конечного тела к системе ГИУ первого рода с кусочно-гладкими ядрами без использования фундаментальных решений. Этот подход опирается лишь на известные свойства аналитичности трансформант Фурье функций с носителем в ограниченной области и анализ характеристического многочлена соответствующего оператора и приводит к системе ГИУ на единичной окружности (плоский случай) или единичной сфере (пространственный случай). Была дана [8, 9] формулировка соответствующих ГИУ для задач изотропной теории упругости и акустики, а также численное построение соответствующих обратных операторов на основании сочетания метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова. Существенное достоинство предложенного алгоритма состоит в том, что коэффициенты получаемых алгебраических систем выписываются в явном виде, а не в виде однократных или двукратных интегралов, как в классическом варианте граничных уравнений. В силу некорректности процедуры обращения операторного уравнения Фредгольма первого рода эта схема требует регуляризации [10] в той или иной форме.

Отметим, что этот подход не может быть непосредственно применен к операторам, характеристический многочлен которых содержит нулевую компоненту (операторы Лапласа, статической теории упругости, электроупругости).

Ниже предлагается обобщение метода ГИУ первого рода на задачи электроупругости. Обсуждаются вопросы численной реализации, приводятся численные примеры. Заметим, что предложенная система ГИУ позволяет анализировать колебания электроупругой среды при наличии затухания (в рамках теории комплексных модулей), причем этот подход особенно эффективен, когда требуется исследование лишь граничных характеристик (смещений точек границы, разности потенциалов, распределения заряда под электродом и т.д.)

1. Постановка задачи и формирование системы ГИУ. Пусть ограниченная односвязная область $V \in R^n$ ($n = 2, 3$), звездная относительно некоторого шара, ограничена кусочно-гладкой поверхностью S . Область V занята электроупругой средой, соверша-

ющей установившиеся колебания с частотой ω под действием разности потенциалов $2\phi_0$, приложенной к паре электродов S_+ и S_- . Будем считать, что остальная часть границы S_D неэлектродирована; вся граница S свободна от механических напряжений. Отметим, что общий метод получения ГИУ не изменяется, если рассмотреть задачи о действии на тело V механических нагрузок, в том числе и контактного типа (причем и в случае включения пьезоэлемента в определенную электрическую цепь), а также задачи с кинематическими или смешанными механическими граничными условиями.

Краевая задача описывается следующей системой уравнений [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{mj,j} + \rho\omega^2 u_m &= 0, \quad D_{m,m} = 0 \\ \sigma_{mj} &= c_{mjkl} u_{k,l} + e_{kmj} \phi_{,k}, \quad D_m = e_{mkl} u_{k,l} - \varepsilon_{mk} \phi_{,k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{ij} n_j |_S = 0, \quad \phi |_{S_{\pm}} = \pm \phi_0, \quad D_m n_m |_{S_D} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь u_m , D_m , n_j – компоненты векторов перемещений, электрической индукции, единичной внешней нормали соответственно; σ_{mj} , c_{mjkl} , e_{kmj} , ε_{mk} – компоненты тензоров напряжений, упругих постоянных, пьезоэлектрических постоянных, диэлектрических проницаемостей соответственно; ϕ – электрический потенциал; ρ – плотность.

Применим к уравнениям (1.1) интегральное преобразование Фурье; исключая трансформанты напряжений и индукции, получим систему

$$(c_{mjkl} \alpha_j \alpha_l - \rho\omega^2 \delta_{mk}) U_k(\alpha) + e_{kmj} \alpha_j \alpha_k \Phi(\alpha) = V_m(\alpha), \quad m = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

$$e_{mkl} \alpha_m \alpha_l U_k(\alpha) - \varepsilon_{mj} \alpha_m \alpha_j \Phi(\alpha) = V_4(\alpha)$$

где

$$\begin{aligned} V_m(\alpha) &= \int_S [\sigma_{mj} n_j - i\alpha_j (c_{mjkl} u_k + e_{lmj} \phi) n_l] e^{i(\alpha, x)} dS \\ U_k(\alpha) &= \int_V u_k(x) e^{i(\alpha, x)} dV, \quad \Phi(\alpha) = \int_V \phi(x) e^{i(\alpha, x)} dV \\ V_4(\alpha) &= \int_S [D_m n_m - i\alpha_m (e_{mkl} u_k - \varepsilon_{ml} \phi) n_l] e^{i(\alpha, x)} dS \end{aligned} \quad (1.4)$$

Разрешив систему (1.3) относительно компонент $U_k(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$, находим

$$U_k(\alpha) = \frac{p_{km}(\alpha, \omega) V_m(\alpha)}{p_0(\alpha, \omega)}, \quad \Phi(\alpha) = \frac{p_{4m}(\alpha, \omega) V_m(\alpha)}{p_0(\alpha, \omega)}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (1.5)$$

$$p_0(\alpha, \omega) = \det(A(\alpha, \omega))$$

где $A = \|A_{mk}(\alpha, \omega)\|$ – матрица линейной системы (1.3) относительно неизвестных $U_k(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$: ее элементы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} A_{mk}(\alpha, \omega) &= a_{mjkl} \alpha_j \alpha_l - \omega^2 b_m \delta_{mk} \\ b_1 &= b_2 = b_3 = \rho, \quad b_4 = 0, \quad a_{mjkl} = c_{mjkl}, \quad m, k = 1, 2, 3 \\ a_{mj4l} &= a_{4jml} = e_{lmj}, \quad m = 1, 2, 3, \quad a_{4j4l} = -\varepsilon_{jl} \end{aligned}$$

$p_{km}(\alpha, \omega)$ – алгебраические дополнения элементов матрицы $A(\alpha, \omega)$, представляющие собой полиномы шестого порядка относительно компонент α_j , а $p_0(\alpha, \omega)$ – полином восьмого порядка относительно α_j .

Полином $p_0(\alpha, \omega)$ будем называть характеристическим многочленом оператора электроупругости. Этот многочлен имеет восемь комплексных многообразий нулей

(в плоском случае при $n = 2$ их шесть) $\alpha_{3j}^{\pm} = \pm \alpha_{3j}(\alpha', \omega)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2)$, причем для электроупругой среды среди этих многообразий есть содержащие начало координат, и использованный ранее подход [7] в этом случае непосредственно неприменим (одно из граничных уравнений переходит в условие разрешимости краевой задачи вида

$$\int_S D_n dS = 0$$

и не позволяет замкнуть систему ГИУ).

Однако, анализируя соотношения (1.5), находим, что их правые части нерегулярны при $\alpha_3 = \pm \alpha_{3j}(\alpha', \omega)$, а левые представляют собой аналитические функции для $u_j(x)$, $\phi(x) \in W_2^1(V)$. Таким образом, для устранения возникающего противоречия необходимо потребовать выполнения равенств

$$p_{km}(\alpha', \pm \alpha_{3j}(\alpha', \omega), \omega) V_m(\alpha', \pm \alpha_{3j}(\alpha', \omega)) = 0 \quad (1.6)$$

$$k, j = 1, 2, 3, 4, \alpha' \in \mathbb{C}^{n-1}$$

Нетрудно заметить, что часть соотношений (1.6) – следствие остальных, поэтому далее будем считать, что $k = 1$. Эти соотношения представляют собой своеобразные условия разрешимости исходной краевой задачи, связывающие граничные значения неизвестных $u_i|_S$, $D_n|_{S_{\pm}}$, $\phi|_{S_D}$ и потенциала ϕ_0

$$\begin{aligned} & \int_{S_+} G_{1j}^{\pm}(\alpha', x) D_+(x) dS_x + \int_{S_-} G_{1j}^{\pm}(\alpha', x) D_-(x) dS_x + \int_S G_{2mj}^{\pm}(\alpha', x) u_m(x) dS_x + \\ & + \int_{S_D} G_{24j}^{\pm}(\alpha', x) \phi(x) dS_x = \phi_0 H_j^{\pm}(\alpha') \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$G_{1j}^{\pm}(\alpha', x) = p_{14}(\alpha, \omega) e^{i(\alpha, x)}, \quad G_{2mj}^{\pm}(\alpha', x) = -i \alpha_s n_l a_{ksml} p_{1k}(\alpha, \omega) e^{i(\alpha, x)}$$

$$\text{при } \alpha_3 = \pm \alpha_{3j}(\alpha', \omega), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (1.8)$$

$$H_j^{\pm}(\alpha') = - \int_{S_+} G_{24j}^{\pm}(\alpha', x) dS_x + \int_{S_-} G_{24j}^{\pm}(\alpha', x) dS_x$$

Здесь $p_{1m}(\alpha, \omega)$ – алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы $A_{mk}(\alpha, \omega)$.

Система ГИУ (1.7) представляет собой систему граничных интегральных уравнений первого рода с кусочно-гладкими ядрами, причем разрывы могут возникать лишь на линиях смены граничных условий и на нерегулярных линиях на границе S . Таким образом, (1.7) порождают вполне непрерывный оператор, переводящий функции из некоторого множества $Q(S)$ в гладкие функции от $\alpha' \in \mathbb{C}^{n-1}$. В общем случае процедура обращения такого оператора некорректна в силу неограниченности оператора, обратного к вполне непрерывному [10]. В данном случае в силу специального вида правой части равенства (1.7) задача такого обращения условно корректна и допускает эффективную процедуру численного обращения, которая основана на сочетании основных идей метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова [10]. На первом этапе граница S аппроксимируется многогранником, грани которого далее будем называть элементами. В пределах каждого элемента неизвестные функции интерполируются через узловые неизвестные, а далее составляется алгебраическая система на основе граничных уравнений (1.7) методом коллокаций. Системы такого типа оказываются плохо обусловленными в силу полной непрерывности интегрального оператора в левой части равенства (1.7) и требуют регуляризации при обращении.

Более подробно эту технику проиллюстрируем на двух простых примерах наиболее часто встречающихся на практике случаях анализа электроупругих тел для пьезо-керамики класса 6mm, поляризованной вдоль оси x_3 .

2. ГИУ для антиплоской деформации. Пусть V – внутренность цилиндрической области с границей $S = L \times R_1$, L – граница ограниченной односвязной области в плоскости x_1x_2 , причем $L = L_{\pm} \cup L_D$, $L_{\pm}$ – электродированная часть границы. Будем считать, что $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(x_1, x_2)$, $\phi = \phi(x_1, x_2)$. Система уравнений электроупругости имеет вид [11]

$$c_{44}\Delta u + e_{15}\Delta\phi + \rho\omega^2 u = 0, \quad e_{15}\Delta u - \varepsilon_{11}\Delta\phi = 0 \quad (2.1)$$

Далее рассмотрим случай, когда граница L свободна от механических напряжений, а колебания возбуждаются разностью потенциалов на электродах $L_{\pm}$, что соответствует следующим граничным условиям:

$$c_{44} \frac{\partial u}{\partial n} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_L = 0, \quad e_{15} \frac{\partial u}{\partial n} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{L_D} = 0 \quad (2.2)$$

$$\phi|_{L_{\pm}} = \phi_0$$

В этом случае

$$p_0(\alpha, \omega) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)[\varepsilon_{11}\rho\omega^2 - (\varepsilon_{11}c_{44} + e_{15}^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]$$

представляет собой полином четвертой степени и соответствующие многообразия находятся явно

$$\alpha_{21}^{\pm} = \pm i\alpha_1, \quad \alpha_{22}^{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_*^2}; \quad k_*^2 = \frac{\varepsilon_{11}\rho\omega^2}{\varepsilon_{11}c_{44} + e_{15}^2} \quad (2.3)$$

и граничные уравнения вида (1.7) относительно неизвестных $u|_L, \partial u/\partial n|_{L_{\pm}}, \partial\phi/\partial n|_{L_{\pm}}, \phi|_{L_D}$ имеют следующую структуру:

$$\int_{L_{\pm}} \left[G_{1j}^{\pm}(\alpha_1, x) \frac{\partial u}{\partial n} + G_{2j}^{\pm}(\alpha_1, x) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dL_x + \int_L G_{23j}^{\pm}(\alpha_1, x) u(x) dL_x +$$

$$+ \int_{L_D} G_{24j}^{\pm}(\alpha_1, x) \phi(x) dL_x = \phi_0 H_j^{\pm}(\alpha_1) \quad (2.4)$$

$$j = 1, 2; \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}^1$$

В этом случае ядра интегральных операторов представимы в форме

$$G_{11}^{\pm}(\alpha_1, x) = e_{15} \exp[i\alpha_1(x_1 \pm ix_2)], \quad G_{21}^{\pm}(\alpha_1, x) = -\varepsilon_{11} \exp[i\alpha_1(x_1 \pm ix_2)]$$

$$G_{231}^{\pm}(\alpha_1, x) = -\frac{\partial}{\partial n} G_{11}^{\pm}(\alpha_1, x), \quad G_{241}^{\pm}(\alpha_1, x) = -\frac{\partial}{\partial n} G_{21}^{\pm}(\alpha_1, x)$$

$$H_1^{\pm}(\alpha_1) = \left(\int_{L_-} - \int_{L_+} \right) G_{241}^{\pm}(\alpha_1, x) dL_x \quad (2.5)$$

$$G_{12}^{\pm}(\alpha_1, x) = \exp[i(\alpha_1 x_1 \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_*^2} x_2)], \quad G_{232}^{\pm}(\alpha_1, x) = -\frac{\partial}{\partial n} G_{12}^{\pm}(\alpha_1, x)$$

$$G_{22}^{\pm}(\alpha_1, x) = 0, \quad G_{242}^{\pm}(\alpha_1, x) = 0, \quad H_2^{\pm}(\alpha_1) = 0$$

Решение строится на основе сочетания метода граничных элементов и метода ре-

гуляризации. Будем считать, что граница области L разбита на N элементов. На первом этапе границы $L_{\pm}$ и L_D аппроксимируются ломаными

$$L_{\pm} = \bigcup_{q=1}^{N_1} L_q, \quad L_D = \bigcup_{q=N_1+1}^{N_2} L_q$$

причем L_q имеет следующую параметризацию $x = x_q^0 + \beta_q t$, а ее параметры выражаются через координаты концов q -го элемента по формулам

$$x_{qj}^0 = (x_{qj} + x_{q+1j})/2, \quad \beta_{qj} = (x_{q+1j} - x_{qj})/2, \quad j = 1, 2$$

Далее в самом простейшем варианте на каждом из элементов L_q принимаем

$$u|_{L_q} = u_q, \quad \partial u / \partial n|_{L_q} = v_q, \quad \partial \phi / \partial n|_{L_q} = \psi_q, \quad \phi|_{L_q} = \phi_q$$

и эти узловые неизвестные удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{q=1}^{N_1+N_2} B_{1pqj}^{\pm} u_q + \sum_{q=1}^{N_1} (A_{1pqj}^{\pm} v_q + A_{2pqj}^{\pm} \psi_q) + \sum_{q=N_1+1}^{N_1+N_2} B_{2pqj}^{\pm} \phi_q = \phi_0 H_j^{\pm}(\alpha_{1p}),$$

$$p = 1, 2, \dots, \quad N_1 + N_2, \quad j = 1, 2 \quad (2.6)$$

причем коэффициенты системы находятся явно через функции $I_{q1}^{\pm}(\alpha_1)$, $I_{q2}^{\pm}(\alpha_1)$

$$I_{q1}^{\pm}(\alpha_1) = I_q(\alpha_1, \pm i\alpha_1), \quad I_{q2}^{\pm}(\alpha_1) = I_q(\alpha_1, \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_*^2}) \quad (2.7)$$

$$I_q(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{L_q} \exp[i(\alpha, x)] dL_x = \frac{\exp[i(\alpha, x_{q+1})] - \exp[i(\alpha, x_q)]}{i(\alpha, \beta_q)}$$

Например,

$$A_{1pqj}^{\pm} = e_{15} I_{qj}^{\pm}(\alpha_{1p}), \quad j = 1, 2; \quad B_{1pq2}^{\pm} = (\alpha_2^{\pm}, n_q) I_{q2}^{\pm}(\alpha_1)$$

$$\alpha_{1p} \in \mathbb{C}^1, \quad \alpha_2^{\pm} = (\alpha_1, \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_*^2}), \quad n_q = (\beta_{2q}, -\beta_{1q})$$

Итак, система (2.6) представляет собой плохообусловленную систему, однако ее правые части являются операторами того же вида, что и операторы в левой части. Простейшая регуляризация системы (2.6) по А.Н. Тихонову позволяет строить достаточно устойчивое решение.

Была проведена серия расчетов для прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$, стороны которого $L_{\pm}$ электродированы и на них подается разность потенциалов $2\phi_0$, причем

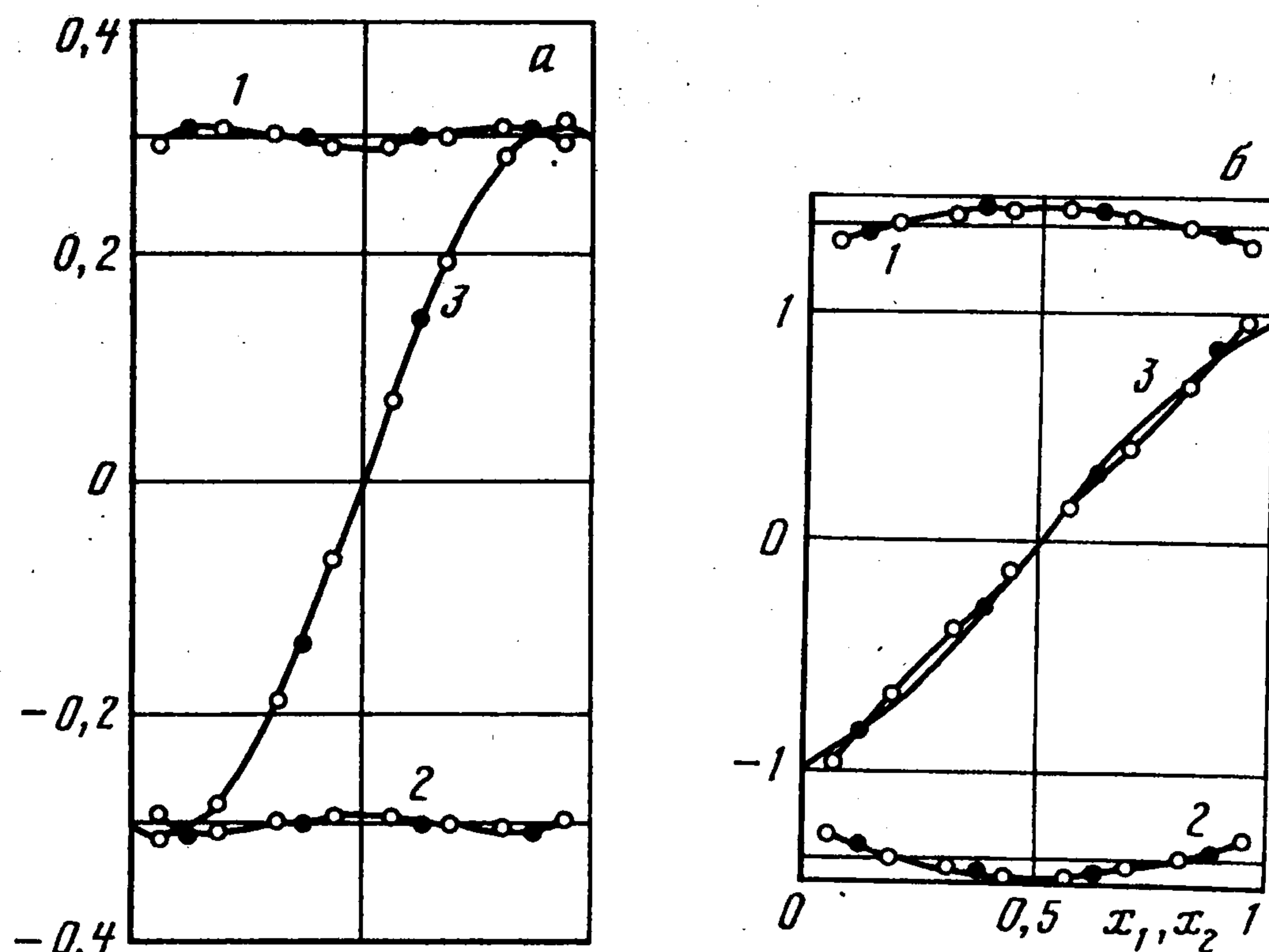
$$L_+ = \{0 \leq x_1 \leq a, x_2 = b\}, \quad L_- = \{0 \leq x_1 \leq a, x_2 = 0\}$$

При этом варьировались: параметр регуляризации α от 10^{-4} до 10^{-7} , волновое число k_* от 0 до 12, число элементов N от 16 до 32, точки коллокаций α_{1p} , принадлежащие вещественной оси и проводилось сравнение с точным решением

$$u(x_1, x_2) = \frac{\phi_0 \varepsilon_{11}}{\Delta e_{15}} \delta \sin(k_* x_2 - b_1)$$

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{\phi_0}{\Delta} [\delta \sin(k_* x_2 - b_1) - (1 + \delta)(k_* x_2 - b_1) \cos(b_1)] \quad (2.8)$$

$$\Delta = \delta \sin(b_1) - b_1 (1 + \delta) \cos(b_1), \quad b_1 = \frac{k_* b}{2}, \quad \delta = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}}$$



Фиг. 1

На фиг. 1, а для керамики ЦТС-19 [11] для $k_*a = 4$, $a = b = 1$ приведены распределения граничных значений смещения u_3 ; кривым 1, 2 соответствуют $u_3(x_1, 0)$, $u_3(x_1, b)$, кривой 3 — $u_3(0, x_2)$. На фиг. 1, б приведены аналогичные распределения для граничных значений индукции $D_2(x_1, 0)$, $D_2(x_1, b)$ (кривые 1, 2 соответственно) и потенциала $\phi(0, x_2)$ (кривая 3). Сплошными линиями показано точное решение (2.8), светлыми точками обозначено приближенное решение для $N = 16$, темными точками для $N = 32$. Отметим достаточно хорошее совпадение точного и приближенного решения, относительная погрешность не превышает 5%.

3. ГИУ для плоской деформации. Рассмотрим плоскую деформацию электроупругой среды, поляризованной вдоль оси Ox_3 . Пусть V — цилиндрическая область с образующей, параллельной оси Ox_2 и направляющей L . Будем считать $u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$, $\phi = \phi(x_1, x_3)$.

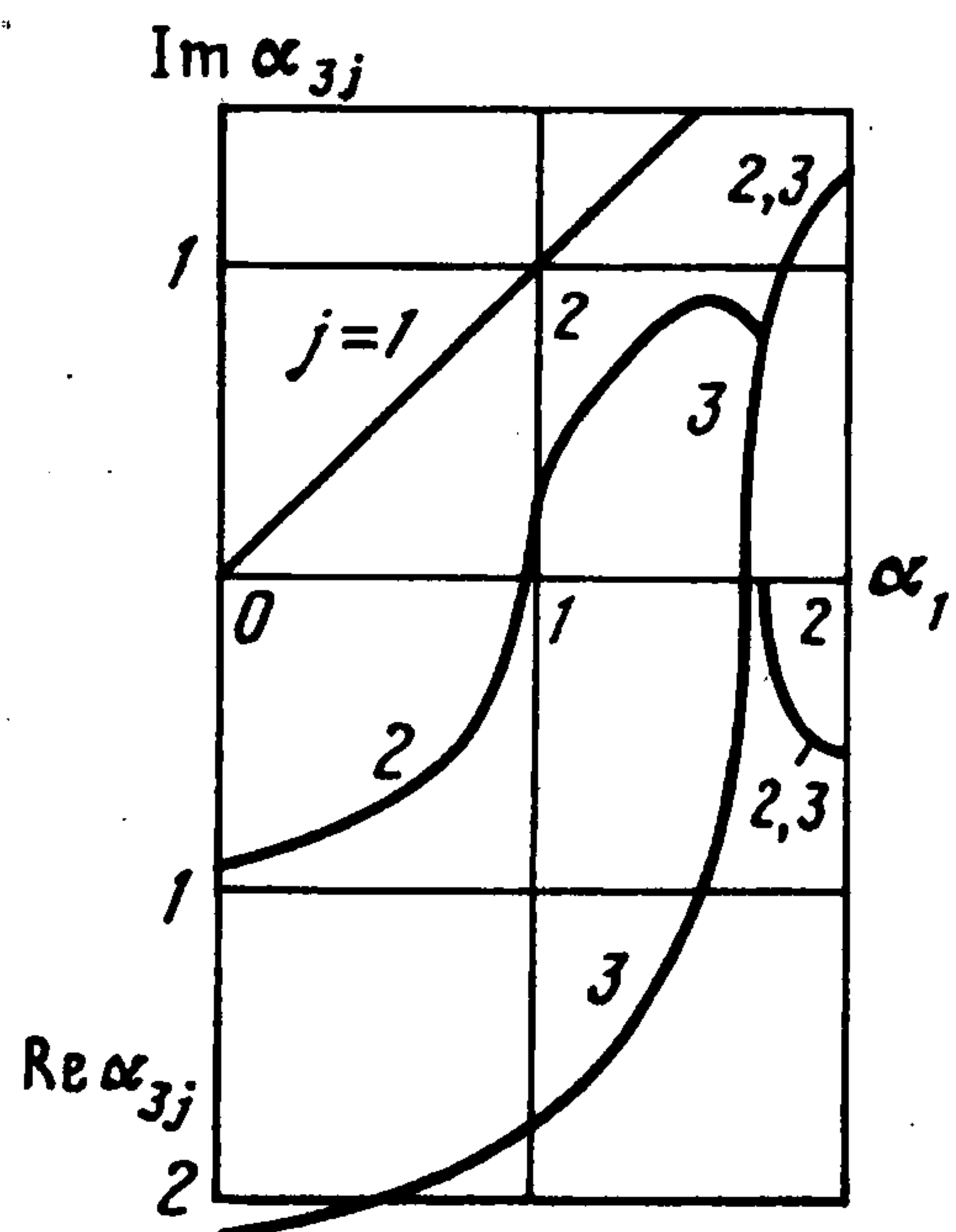
В этом случае $p_0(\alpha, \omega) = \det A$ — бикубический полином относительно α_j , а элементы матрицы A имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= c_{11}\alpha_2^1 + c_{44}\alpha_3^2 - \rho\omega^2, & A_{12} &= A_{21} = (c_{44} + c_{13})\alpha_1\alpha_3 \\ A_{13} &= A_{31} = (e_{15} + e_{31})\alpha_1\alpha_3, & A_{22} &= c_{44}\alpha_1^2 + c_{33}\alpha_3^2 - \rho\omega^2 \\ A_{23} &= A_{32} = e_{15}\alpha_1^2 + e_{33}\alpha_3^2, & A_{33} &= -\varepsilon_{11}\alpha_1^2 - \varepsilon_{33}\alpha_3^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

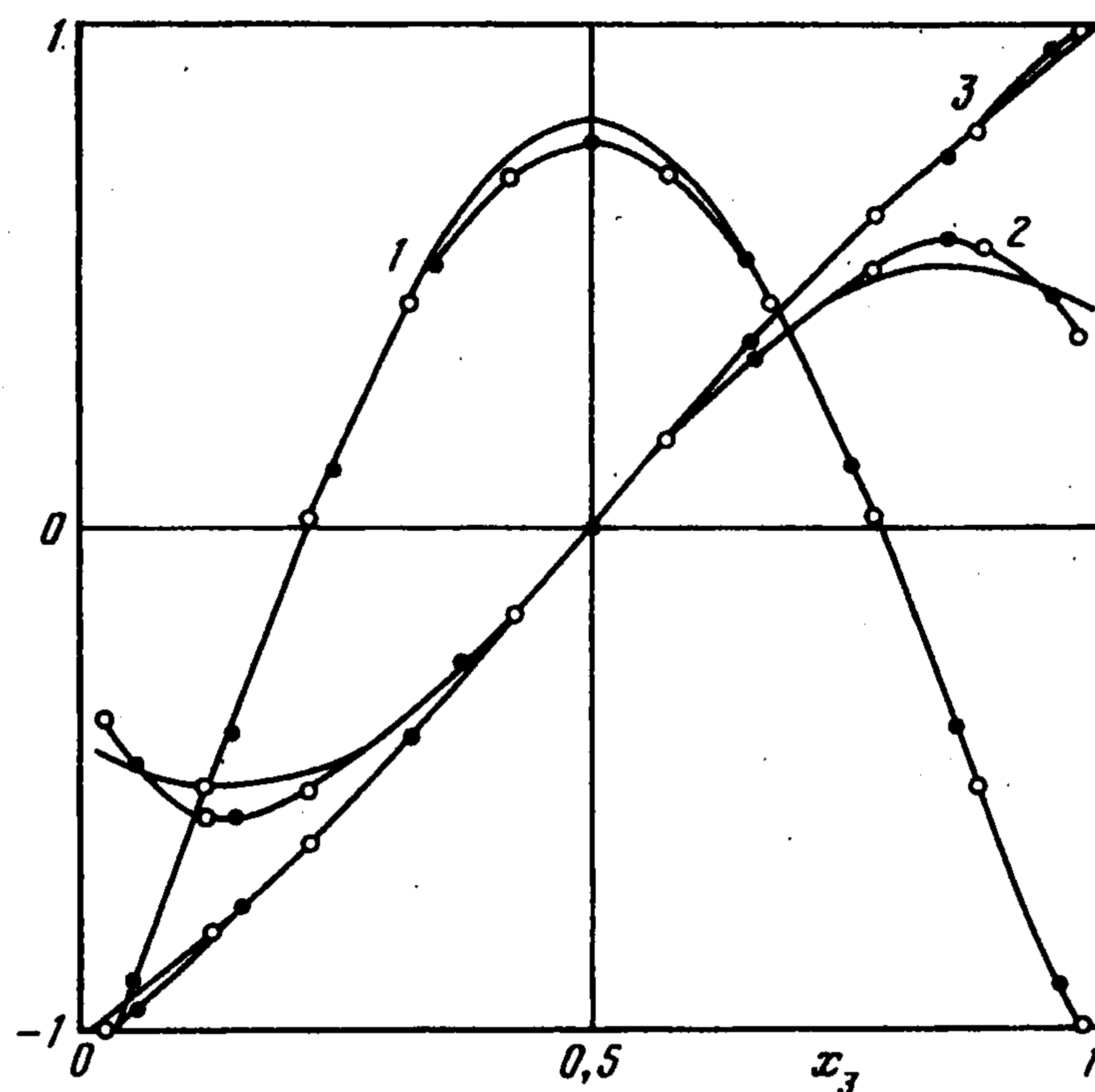
На фиг. 2 изображены вещественная и мнимая части многообразий $\alpha_{3j}^+(\alpha_1, \sqrt{c_{33}/\rho})$ ($j = 1, 2, 3$) для пьезокерамики ЦТС-19 (α_1 пробегает отрезок вещественной оси).

Соотношения (1.4) в этом случае имеют вид

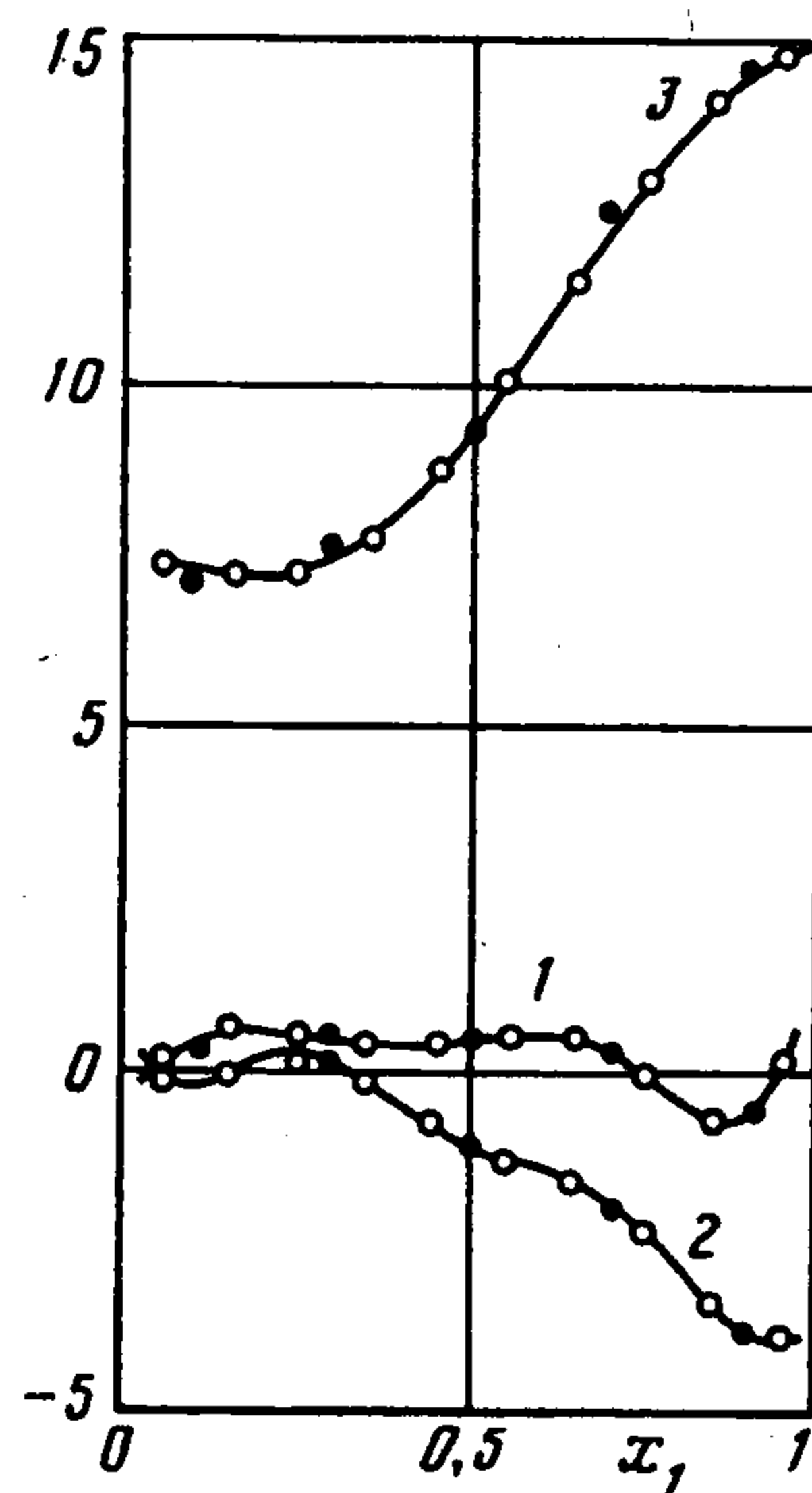
$$\begin{aligned} V_1 &= \int_L (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{13}n_3 - i((\alpha_1n_1c_{11} + \alpha_3n_3c_{44})u_1 + (\alpha_1n_3c_{13} + \alpha_3n_1c_{44})u_3 + \\ &+ (\alpha_1n_3e_{31} + \alpha_3n_1e_{15})\phi)e^{i(\alpha, x)}dL_x \\ V_2 &= \int_L (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3 - i((\alpha_1n_3c_{44} + \alpha_3n_1c_{13})u_1 + (\alpha_1n_1c_{44} + \alpha_3n_3c_{33})u_3 + \\ &+ (\alpha_1n_1e_{15} + \alpha_3n_3e_{33})\phi)e^{i(\alpha, x)}dL_x \\ V_3 &= \int_L (D_1n_1 + D_3n_3 - i((\alpha_1n_3e_{15} + \alpha_3n_1e_{31})u_1 + (\alpha_1n_1c_{15} + \alpha_3n_3e_{33})u_3 - \\ &- (\alpha_1n_1\varepsilon_{11} + \alpha_3n_3\varepsilon_{33})\phi)e^{i(\alpha, x)}dL_x \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Система интегральных уравнений (1.7) сохраняет свою форму с заменой $S \rightarrow L$, $S_{\pm} \rightarrow L_{\pm}$, $S_D \rightarrow L_D$; ядра интегральных операторов имеют вид

$$G_{1j}^{\pm}(\alpha', x) = G_{2j}^{\pm}(\alpha', x) = p_{13}(\alpha_1, \alpha_{3j}^{\pm}(\alpha_1, \omega), \omega) R^{\pm}(\alpha_1, \omega, x_1, x_3)$$

$$G_{2kj}^{\pm}(\alpha', x) = -i \sum_{m=1}^3 p_{1m}(\alpha_1, \alpha_{3j}^{\pm}(\alpha_1, \omega), \omega) q_{km}(\alpha_1, \alpha_{3j}^{\pm}, n_1, n_3) R^{\pm}(\alpha_1, \omega, x_1, x_3), \quad k = 1, 3, 4$$

(3.2)

$$G_{22j}^{\pm}(\alpha', x) = 0, \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}^1$$

где

$$p_{11}(\alpha, \omega) = A_{22}A_{33} - A_{23}^2, \quad p_{12}(\alpha, \omega) = A_{21}A_{33} - A_{13}A_{32}$$

$$p_{13}(\alpha, \omega) = A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}, \quad R^{\pm}(\alpha_1, \omega, x_1, x_3) = \exp[i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{3j}^{\pm}(\alpha_1, \omega) x_3)]$$

$$q_{11} = c_{11}\alpha_1 n_1 + c_{44}\alpha_3 n_3, \quad q_{12} = c_{44}\alpha_1 n_3 + c_{13}\alpha_3 n_1, \quad q_{13} = e_{15}\alpha_1 n_3 + e_{31}\alpha_3 n_1$$

$$q_{31} = c_{13}\alpha_1 n_3 + c_{44}\alpha_3 n_1, \quad q_{32} = c_{44}\alpha_1 n_1 + c_{33}\alpha_3 n_3, \quad q_{33} = e_{15}\alpha_1 n_1 + e_{33}\alpha_3 n_3$$

$$q_{41} = e_{31}\alpha_1 n_3 + e_{15}\alpha_3 n_1, \quad q_{42} = e_{15}\alpha_1 n_1 + e_{33}\alpha_3 n_3, \quad q_{43} = -(\varepsilon_{11}\alpha_1 n_1 + \varepsilon_{33}\alpha_3 n_3)$$

Дискретизация этой системы ГИУ проводится аналогично изложенному выше для антиплоской задачи. Узловыми неизвестными в данном случае являются величины u_{mq} , ϕ_q , D_{nq} , а коэффициенты линейной алгебраической системы находятся аналогично (2.7) в виде явных формул.

В качестве численных примеров, иллюстрирующих применение предложенного подхода, рассмотрены две смешанные задачи.

Смешанная задача о колебаниях прямоугольника $L = [0, a] \times [0, b]$ с граничными условиями

$$x_1 = 0, a: u_1 = 0, \sigma_{13} = 0, D_1 = 0$$

$$x_3 = 0, b: \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0, \phi = \mp \phi_0$$

Эта задача имеет точное решение, которое представлено на фиг. 3 сплошной линией для $ka = \omega a \sqrt{\rho/c_{33}} = 5$, $a = b = 1$; кривым 1, 2, 3 соответствуют $\sigma_{11}(a, x_3)$, $u_3(a, x_3)$, $\phi(a, x_3)$, причем светлыми точками обозначено численное решение при $N = 40$, темными точками – при $N = 80$.

Помимо граничных значений неизвестных, этот подход позволяет определять и резонансные частоты. Расчеты показывают, что даже при небольшом числе граничных элементов первые резонансные частоты определяются достаточно точно (погрешность определения первых трех резонансных частот менее 1%).

Смешанная задача о колебаниях прямоугольной трапеции с граничными условиями

$$x_1 = 0: u_1 = u_3 = 0, D_1 = 0$$

$$x_3 = 2 - 2x_1, \quad 1/2 < x_1 < 1: \sigma_{ij}n_j = 0 \quad (i = 1, 3), \quad D_n = 0$$

$$x_3 = 0, b: \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0, \phi = \mp \phi_0$$

На фиг. 4 для $kb = 2$ и $b = 1$ приведены значения горизонтального и вертикального смещений и нормальной компоненты электрической индукции на нижнем основании трапеции при $N = 80$ (кривые 1, 2, 3 соответственно), причем светлыми точками отмечены результаты расчетов при $N = 20$, темными точками – при $N = 40$. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточно устойчивом нахождении граничных значений физических полей и внутренней сходимости метода при увеличении точности аппроксимации интегральных операторов, несмотря на плохую обусловленность системы типа (2.6).

Замечание. Изложенный выше подход сведения краевой задачи (1.1)–(1.2) к системе ГИУ первого рода (1.7) легко переносится на случай учета затухания в электроупругой среде в рамках концепции комплексных модулей, путем замены

$$c_{mjkl} \rightarrow c_{mjkl}(i\omega), \quad e_{mjk} \rightarrow e_{mjk}(i\omega), \quad \varepsilon_{mj} \rightarrow \varepsilon_{mj}(i\omega)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00673).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Кубликов В.Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1037–1041.
2. Vatulyan A.O., Kublikov V.L. Boundary element method in electroelasticity. // Boundary Elements Communs. 1995. V. 6. № 2. P. 59–61.
3. Ватульян А.О., Коробейник М.Ю. О граничных интегральных уравнениях в магнито-электроупругости // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 5. С. 600–602.
4. Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В. О формулировке граничных интегральных уравнений связанной термоэлектроупругости // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения Ростов н/Д.: Изд.-во ДГТУ, 1996. Вып. 1. С. 19–26.

5. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
6. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Berlin et al.: Springer, 1984. = Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
8. Ватульян А.О., Шамшин В.М. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 462–469.
9. Ватульян А.О., Садчиков Е.В. О граничных интегральных уравнениях в акустике // Акуст. журн. 1998. Т. 44. Вып. 3. С. 326–330.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
11. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.VIII.1998