

УДК 539.374

© 1999 г. Н.А. Остапенко, Г.Е. Якунина

О ФОРМЕ ТОНКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНОЙ ПРОНИКАНИЯ В ПЛОТНЫЕ СРЕДЫ

Построена теория оптимальных тонких пространственных тел, имеющих максимальную глубину проникания при заданных условиях входа в плотную среду по нормали к свободной поверхности, длине тела и площади миделевого сечения. Найдено условие, определяющее целесообразность перехода от тела вращения к эквивалентному телу пространственной формы. Проведено сравнение результатов теории, полученных при различных законах трения на поверхности контакта тела со средой: кулоновское трение и предельное пластическое трение.

Определение области изменения параметров, где тела пространственной конфигурации обладают преимуществами по сравнению с традиционными осесимметричными формами при внедрении в плотные среды, в частности по глубине проникания и максимальным перегрузкам, а также поиск оптимальной формы таких тел при различных изопериметрических условиях являются фундаментальными проблемами теории проникания.

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в разработке моделей сред и численных методов (см., например, обзоры [1,2]), теоретическое исследование движения недеформируемых и деформируемых тел в плотных средах представляет чрезвычайно сложную задачу. Эффективное решение различных вариационных задач внедрения недеформируемых тел в плотные среды возможно только при наличии соотношений, явным образом описывающих силы, действующие в области контакта поверхности тела со средой, через форму тела, характеристики среды и т.д. Однако таких соотношений в случае проникания пространственных тел не существует; построены лишь точные решения линейных задач входа тонких циклически-симметричных тел с плоскими гранями в сжимаемую жидкость и упругую среду [3–7].

Тем не менее, отсутствие формул для сил, действующих на пространственное тело в точной постановке для конкретных моделей сред и режимов движения, не исключает возможность их приближенного описания с помощью соотношений, которые получены либо в приближенных теориях, либо эмпирически. Следует заметить, что значительный разброс величин параметров, описывающих свойства плотных сред (тип грунта, марка металла), достигающий иногда 20% и более (например, для связности грунта и предела пластичности) вообще исключает постановку вопроса о точном указании формы тела, обеспечивающей экстремальное значение некоторой целевой функции при заданных условиях. Поэтому для прикладных задач будет важным принципиальное указание на необходимость использования проникающего тела, имеющего осесимметричную или существенно пространственную форму для достижения, например, максимальной глубины внедрения при заданных начальных условиях и параметрах среды, изменяющихся в некотором диапазоне.

Численное исследование оптимальной пространственной формы тел некоторых классов с максимальной глубиной проникания было проведено [8] с использованием модели локального взаимодействия [9] для описания напряжений, действующих на поверхности контакта, причем касательные напряжения описывались по закону трения Кулона. Рассмотренные в [8] примеры показали, что переход от тела вращения к эквивалентному оптимальному телу пространственной формы может обеспечить значительное увеличение

глубины проникания. Однако в силу численного метода решения вариационной задачи (метод локальных вариаций [10]) соответствующий критерий перехода не был получен. Значительный интерес представляет также установление различий в решении задачи, связанных с моделированием касательных напряжений на поверхности тела.

Использование модели смешанного типа [11] для описания касательного напряжения на поверхности тела вращения, согласно которой оно определяется в зависимости от величины нормального напряжения либо по закону Кулона, либо равно предельному пластическому трению, продемонстрировало чрезвычайное усложнение вариационной задачи о теле минимального сопротивления [12]. Применение указанной модели в задаче максимизации глубины внедрения пространственного тела делает ее практически неразрешимой. Поэтому ниже эта задача рассматривается либо в рамках модели трения Кулона, либо – предельного пластического трения, когда в приближении тонкого тела допускается расщепление оптимизационной задачи на две: для продольного и поперечного контуров.

1. О моделировании силы сопротивления, действующей на тело, проникающего в плотную среду по нормали к свободной поверхности. Среди экспериментальных работ по исследованию нагрузки, действующей на внедряющееся тело, и в настоящее время, как в методическом плане, так и по полученным результатам, продолжает выделяться работа [13]. Из главных ее результатов выделим два: установление двучленной модели для нагрузки, содержащей динамическую и прочностную составляющие, а также факта совпадения в ней коэффициента при скоростном напоре с ньютоновским коэффициентом давления на конусе. Согласно последнему результату, для расчета глубины внедрения указанный коэффициент уже просто вычисляется [14] по Ньютону в соответствии с формой головной части тела.

В рамках упруго-пластической модели для материала преграды и в предположении, что при внедрении тонкого осесимметричного жесткого снаряда материал движется лишь в слоях, перпендикулярных оси снаряда, причем в каждом из них независимо (гипотеза нормальных сечений), была получена [15] формула для нормального напряжения σ_n на поверхности контакта, включающая скорость и замедление тела, толщину, наклон и кривизну продольного контура, а также характеристики среды. Анализ этого решения показывает, что присоединенная масса m (масса материала преграды, заключенная в объеме головной части, на которой осуществляется контакт тела со средой при кавитационной схеме обтекания, или в объеме тела) входит в формулу для глубины проникания членом, аддитивным с единицей, порядок которого определяется выражением $(m/M)t^2$ (M – масса тела, $2t$ – относительная толщина тела). В приближении тонкого тела ($t^2 \ll 1$) указанным членом можно пренебречь, и значит, замедление заметного влияния на сопротивление тела оказывать не будет.

Если при расчете сопротивления тела учесть и силу трения по закону Кулона, то вклад члена, содержащего замедление тела в формуле для σ_n , будет проявляться двумя членами, аддитивными с единицей: $1 + O(t^2) + O(\mu t)$ (μ – коэффициент сухого трения). Это дает основание считать, что при реальных величинах μ можно, сохраняя хорошую точность расчетов, не учитывать в формуле для нормального напряжения на поверхности тонких тел члена, зависящего от замедления. В случае постоянного трения на поверхности контакта (модель предельного пластического трения) сделанный вывод остается верным. О справедливости проведенных оценок свидетельствуют и экспериментальные данные [13].

Таким образом, в соответствии с полученным ранее решением [15] и результатами его анализа формула для нормального напряжения на поверхности тонкого тела без учета кривизны продольного контура может быть записана в виде

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \rho u^2 \left[\ln(1+b) - \frac{b}{1+b} \right] (n, x)^2 + \tau [1 + \ln(1+b)] > 0 \quad (1.1)$$

где ρ – плотность материала преграды, u – текущая скорость тела, n – внешний

единичный нормальный вектор к поверхности тела, $\mathbf{x}$ – единичный вектор оси x с началом в носике тела, совпадающей с осью тела и направленной в сторону, противоположную движению ($(\mathbf{n}, \mathbf{x}) < 0$), $b = E/[2\tau(1 + \nu)]$, E , ν , τ – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и предел текучести материала преграды.

Были приведены результаты по прониканию жестких осесимметричных тел в грунты, моделируемые пластически сжимаемой средой [16, 17]. Опуская, как и в случае удара по металлической преграде [15], члены, содержащие замедление тела и кривизну продольного контура, формулу для σ_n можно записать в форме

$$\sigma_n = \frac{\rho u^2}{2(1-\gamma)b_1} \left[\varepsilon^{1-\gamma} - 1 + 2(1-\gamma)b_1\varepsilon^{-\gamma} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma}(\varepsilon^{-\gamma} - 1) \right] (\mathbf{n}, \mathbf{x})^2 + \frac{\tau_0}{2\mu_0}(\varepsilon^{-\gamma} - 1) + p_a\varepsilon^{-\gamma} > 0 \quad (1.2)$$

$$b_1 = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \gamma = \frac{\mu_0}{1+\mu_0}, \quad \varepsilon = 1 - b_1, \quad \tau_0 = 2k \cos \vartheta, \quad \mu_0 = \sin \vartheta$$

где ρ_1 – плотность грунта за ударной волной, k и ϑ – коэффициент сцепления и угол внутреннего трения грунта, p_a – давление перед ударной волной.

Заметим, что формулы для σ_n (1.1), (1.2) и описанная выше эмпирическая формула для нагрузки на внедряющееся тело [13] по своей природе идентичны.

Обратимся к вопросу о причине, по которой в (1.1), (1.2) были отброшены члены, содержащие кривизну продольного контура тела. Учет указанных членов привел бы к необходимости введения естественного ограничения $\sigma_n \geq 0$, родственного условию неотрицательности давления при использовании для него формулы Ньютона – Буземана [18]. Это ограничение приведет к появлению дуг $y(x)$ краевого экстремума ($\sigma_n = 0$), являющихся согласно полученным ранее результатам [15, 17] решениями дифференциального уравнения

$$A_0 y'^2 + B y y'' + C = 0 \quad (1.3)$$

в котором коэффициенты A_0 и C определяются по (1.1), (1.2), а коэффициент B , соответственно для упруго-пластических и пластически сжимаемых сред, имеет вид

$$B = \frac{1}{2} \rho u^2 \ln(1+b), \quad B = \frac{\rho u^2}{2b_1\gamma} (\varepsilon^{-\gamma} - 1) \quad (1.4)$$

Общее решение уравнения (1.3) можно записать в форме

$$x = -2e \sqrt{\frac{A_0}{C}} \int (d_1^2 - z^2)^{e-1/2} dz + d_2, \quad e = \frac{E}{2A_0}, \quad z^2 = d_1^2 - y^{1/e} \quad (1.5)$$

(d_1 и d_2 – произвольные постоянные). Дуга краевого экстремума (1.5) может быть проведена через точку (0,0) – носик тела и концевую точку контура ($L, y(L)$). В этом случае, если для упрощения положить $e = 1/2$, что отвечает, например, для упруго-пластических сред (1.1), (1.4) предположению о превалирующем вкладе логарифмического члена в квадратных скобках в выражении для A_0 , решение (1.5) примет вид

$$x = \sqrt{\frac{A_0}{C}} (d - \sqrt{d^2 - y^2}), \quad d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{A_0}} \left(1 + \frac{A_0}{C} t^2 \right) L, \quad t = \frac{y(L)}{L} \quad (1.6)$$

где L – длина тела. Видно, что для того, чтобы решение (1.6) имело смысл, достаточно выполнения неравенства $A_0 t^2 / C > 1$. Очевидно, что тело, имеющее форму (1.5) или (1.6) (передняя часть эллипсоида вращения), в основу которой положено уравнение $\sigma_n = 0$, имеет нулевое сопротивление.

Продemonстрированное решение – дуга краевого экстремума отвечает образованию каверны. Его нельзя считать пригодным не столько из-за "неопределенности" причины образования каверны, сколько из-за того, что в этих условиях перестают быть справедливыми предположения, сделанные ранее [15, 17] при постановке соответствующих задач.

Таким образом, выражения для σ_n (1.1), (1.2) следует рассматривать как приближение решений [15, 17] для случая малой кривизны продольного контура тела, а также как средство получения теоретической оценки коэффициентов в двучленной модели локального взаимодействия. Такую же возможность предоставляют результаты работ [19, 20].

Для дальнейшего рассмотрения запишем двучленные модели для нормального напряжения на поверхности тела (1.1), (1.2), содержащие динамический и прочностной члены, в обобщенном виде

$$\sigma_n = Au^2(\mathbf{n}, \mathbf{x})^2 + C \quad (1.7)$$

Величины A и C будем считать постоянными параметрами модели, определяемыми либо теоретически, либо экспериментально.

Так как скорость тела в полупространстве, занятом плотной средой, зависит от начального этапа внедрения до момента времени, когда контакт со средой осуществляется по всей поверхности тела с нормалью, направленной навстречу потоку, то необходимо оценить влияние этого этапа на падение начальной скорости u_0 .

В случае кулоновской модели трения, которая позволит получить максимальную оценку искомой величины, сила $\mathbf{f}_e$, действующая на единичную площадку поверхности тела, и сила сопротивления его внедрению D запишутся в виде

$$\mathbf{f}_e = -\sigma_n(\mathbf{n} - \mu\boldsymbol{\tau}), \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}) = |[\mathbf{n}, \mathbf{x}]| \quad (1.8)$$

$$D = \iint_{S_k} (\mathbf{f}_e, \mathbf{x}) dS = - \iint_{S_k} \sigma_n [(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - \mu(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x})] dS$$

где S_k – поверхность контакта тела со средой.

Оценим падение скорости Δu осесимметричного тела с конической головной частью на начальном этапе внедрения в полупространство, занятое плотной средой, по нормали к свободной поверхности. Уравнение движения тела при учете соотношений (1.7), (1.8) и $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = -t$, $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}) = 1$ (для тонких тел) примет форму

$$Mh'' = -h^2(At^2h'^2 + C)\left(1 + \frac{\mu}{t}\right)\frac{S_m}{L^2}, \quad h' = u \quad (1.9)$$

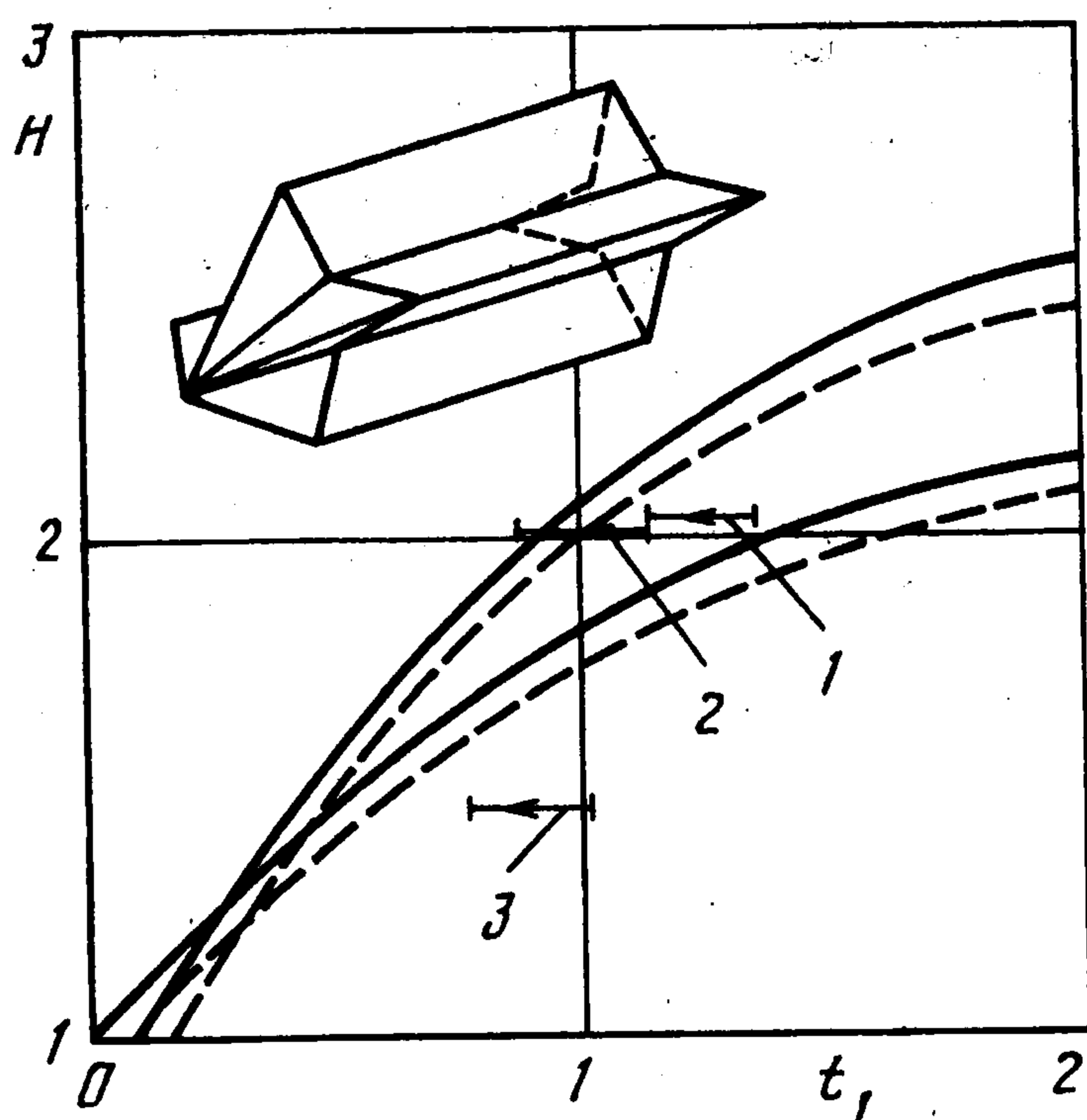
где h – текущее значение глубины внедрения, S_m – площадь миделева сечения (донного среза) тела. Проинтегрировав уравнение (1.9) при начальных условиях $h(0) = 0$, $h'(0) = u_0$, найдем, что $\Delta u/u_0 \equiv [u_0 - h'(L)]/u_0 \ll 1$, если

$$\frac{mAt^2}{M\rho} \left(1 + \frac{\mu}{t}\right) \left(1 + \frac{C}{Au_0^2 t^2}\right) \ll 1 \quad (1.10)$$

Для удовлетворения неравенства (1.10) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$C/(Au_0^2 t^2) \leq O(1) \quad (1.11)$$

Так как A и C входят в (1.11) в виде отношения, то для оценки его порядка достаточно, согласно (1.1), (1.2), указать, что $A \sim \rho$ и $C \sim \tau$ или τ_0 . Поскольку для металлических сред $\rho \sim 10^4$ кг/м³ и $\tau \sim (10^2 + 10^3)$ МПа, а для грунтов $\rho \sim 10^3$ кг/м³ и $\tau_0 \sim 10^{-1}$ МПа, то из (1.11) следует, что уменьшением скорости на начальном этапе неполного погружения тела (или его головной части) в среду с высокой точностью



Фиг. 1

можно пренебречь, если начальная скорость входа $u_0 > (10^2 + 10^{5/2})/t$ м/с (для металлов) или $u_0 > 10/t$ м/с (для грунтов).

Полученный результат важен для последующего определения функционала глубины внедрения, так как позволяет при указанных условиях исключить из рассмотрения процесс неполного погружения тела (или его головной части) в среду и считать, что во время торможения от скорости u_0 имеет место контакт со средой по всей поверхности тела с нормалью, направленной в сторону движения. Таким образом, при выполнении условия (1.11) выражение для силы сопротивления (1.8) может быть записано в виде

$$D = - \iint_S \sigma_n[(n, x) - \mu(\tau, x)] dS \quad (1.12)$$

где S — полная боковая поверхность тела с нормалью, направленной в сторону движения.

Хотя выражение (1.12) получено для тел вращения и нет никаких теоретических оснований для его переноса на движение в плотной среде пространственных тел, допустим, что локальная модель взаимодействия (1.7) остается справедливой и в этом случае. Допустимость такого предположения можно проверить, сравнивая экспериментальные данные по относительной глубине проникания H в песчаный грунт тел со звездообразным поперечным сечением (фиг. 1) и эквивалентных по массе и площадям поперечных сечений на равных расстояниях от носика тел вращения [21] с результатами расчета с использованием формул (1.2), (1.7), (1.12). Опуская выкладки, выпишем выражение для отношения H глубин внедрения звездообразного с плоскими гранями и эквивалентного осесимметричного тел

$$H = w_1^2 \frac{(1+w) \ln(1+w_0^2/w_1^2)}{(w+w_1) \ln(1+w_0^2)} \quad (1.13)$$

$$w_1^2 = (1+a_1^2)a_2, \quad a_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - \frac{n}{\pi a_2}, \quad a_2 = \left(\frac{g_k}{g_0} \right)^2$$

$$g_k^2 = \frac{S_m}{\pi L^2}, \quad w = \frac{g_k}{\mu}, \quad w_0^2 = \frac{A u_0^2}{C} g_k^2$$

В (1.13) g_k — радиус миделева сечения эквивалентного тела вращения, отнесенный к длине головной части, g_0 — минимальный безразмерный радиус миделева сечения звездообразного тела (фиг. 1), состоящего из n симметричных циклов. Как видно, влияние числа циклов n и параметра формы поперечного сечения a_2 на H проявляется через параметр w_1 . Если заданы g_k , u_0 , μ и параметры среды, то, меняя w_1 , можно определить влияние формы поперечного контура звездообразного тела на относительную глубину проникания H .

На фиг. 1 для $w = 1,5$ и 2 (соответственно штриховые и сплошные линии) приведены зависимости H от $t_1 = \lg w_0$ для $w_1 = 1,75$ и 2 (нижняя и верхняя пара кривых). Обращают внимание немонотонная зависимость H от w и w_1 при $t_1 < 0,5$, а также рост относительной глубины внедрения при увеличении t_1 . Отметим также, что с ростом начальной скорости u_0 , чему отвечает увеличение t_1 , величина H перестает зависеть от отношения логарифми-

ческих членов в (1.13), и определяется только геометрией тела и коэффициентом сухого трения μ в законе Кулона.

В расчетах предполагалось, что песчаный грунт – песок с нарушенной структурой, имеющий следующие характеристики: $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$, $\varepsilon = 0,37$, $\mu_0 = 0,5$, $\tau_0 = 5 \text{ КПа}$. Величина противодействия p_a изменялась в диапазоне $(1 + 3) \times 10^{-1} \text{ МПа}$. Коэффициент сухого трения $\mu = 0,2$. Экспериментальные значения H изображены горизонтальными отрезками прямых, расположенных в интервалах изменения t_1 , соответствующих указанному изменению p_a . Стрелкой показано направление, отвечающее увеличению p_a . Отрезки прямых 1, 2 и 3 соответствуют значениям $u_0 = 520, 310$ и 200 м/с . Неравенство (1.11) во всех случаях удовлетворяется.

Сравнение экспериментальных и расчетных значений H указывает на их вполне удовлетворительное качественное и количественное соответствие, особенно при больших начальных скоростях внедрения, несмотря на значительный диапазон изменения p_a . Худшее согласование данных теории и эксперимента для $u_0 = 200 \text{ м/с}$ может быть объяснено тем, что при величинах скорости u_0 , меньших скорости распространения возмущений в грунте, теорию [17] уже нельзя считать пригодной. При таких скоростях внедрения следует использовать другие, например, эмпирические значения коэффициентов A и C в формуле для давления на поверхности контакта (1.7), определенные в необходимом диапазоне скоростей u_0 .

Подводя итог анализу применимости двучленной локальной модели взаимодействия (1.7) для расчета силы сопротивления пространственных тел, задаваемой соотношением (1.12), можно сделать вывод, что она позволяет получать расчетные значения H , весьма удовлетворительно описывающие экспериментальные данные, и может быть использована в задачах оптимизации формы пространственных тел, проникающих в плотные среды.

2. Оптимальные формы тел при использовании закона трения Кулона. Предположим, что все условия, обсужденные в разд. 1, удовлетворены. Рассмотрим вариационную задачу о форме тонкого тела с максимальной глубиной проникания при заданных длине (длине головной части) L и площади миделевого сечения S_m в классе поверхностей с подобными по оси x поперечными сечениями, когда удастся найти аналитическое решение,

$$f \equiv \rho - \varphi(x) R(\theta) = 0 \quad (2.1)$$

В (2.1) (x, ρ, θ) – цилиндрическая система координат, $\varphi(x)$ и $R(\theta)$ – продольный и поперечный контуры тела.

Выражение для сопротивления тела (1.12) при задании уравнения его поверхности в форме (2.1) удобно записать в виде

$$D(u) = D_1 u^2 + D_2 \quad (2.2)$$

где D_1 и D_2 можно представить в следующих двух формах:

$$D_1 = \int_0^L (\gamma_1 \dot{\varphi} + \gamma_2) \dot{\varphi}^2 \varphi dx, \quad D_2 = \gamma_3 \int_0^L \varphi dx + C S_m \quad (2.3)$$

$$\gamma_1 = A J_4, \quad \gamma_2 = \mu A J_3, \quad \gamma_3 = \mu C J_1$$

$$S_m = \frac{1}{2} \varphi^2(L) J_2; \quad J_n = \int_0^{2\pi} R^n \Phi^{2-n} d\theta, \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad \Phi = \sqrt{1 + \frac{\dot{R}^2}{R^2}} \quad (2.4)$$

$$D_1 = \int_0^{2\pi} (k_1 R \Phi^{-1} + k_2) R^3 \Phi^{-1} d\theta, \quad D_2 = k_3 \int_0^{2\pi} R \Phi^{-1} d\theta + C S_m \quad (2.5)$$

$$k_1 = A \int_0^L \varphi \dot{\varphi}^3 dx, \quad k_2 = \mu A \int_0^L \varphi \dot{\varphi}^2 dx, \quad k_3 = \mu C \int_0^L \varphi dx$$

(точкой обозначено дифференцирование по аргументу). Такое представление составляющих сопротивления, зависящих от свойств среды и формы тела, позволяет разделить задачу нахождения оптимальной формы тела на две: поиск продольного и поперечного контуров, поскольку вариации $\varphi(x)$ и $R(\theta)$ независимы.

Интегрируя уравнение движения тела, найдем выражение для глубины проникания

$$h = \frac{M}{2D_1} \ln \frac{D_0}{D_2}, \quad D_0 = D(u_0) \quad (2.6)$$

Функционал глубины проникания h относится к функционалам неаддитивного типа. Выпишем в обобщенном виде равенство нулю первой вариации функционала (2.6) и условие Лежандра

$$\delta D_0 + f \delta D_2 = 0 \quad (2.7)$$

$$\delta^2 D_0 + f \delta^2 D_2 \geq 0 \quad (2.8)$$

Здесь

$$f = -\frac{I_0 / (hD_2) - 1}{I_0 / (hD_0) - 1} \equiv -\frac{D_0 / D_2 - 1 - \ln(D_0 / D_2)}{1 - D_2 / D_0 - \ln(D_0 / D_2)}, \quad I_0 = Mu_0^2 / 2 \quad (2.9)$$

где I_0 — начальная кинетическая энергия тела. Поскольку в данной постановке задачи проникания вся кинетическая энергия тела затрачивается на работу силы сопротивления (2.2) на пути h , то работа ее постоянной составляющей D_2 на том же пути $hD_2 < I_0$, а работа полной начальной силы сопротивления $hD_0 > I_0$. С использованием приведенных неравенств из (2.9) можно определить, что $f > 0$.

Из выражения для первой вариации функционала h (2.7) непосредственно следует, что форма тела минимального сопротивления, определенная на начальной стадии внедрения ($\delta D_0 = 0$), не является оптимальной в задаче на максимум глубины проникания.

Найдем оптимальный продольный контур тела. Так как основные функции F_0 и F_2 функционалов D_0 и D_2 (2.2), (2.3) не содержат явно независимую переменную x , уравнение Эйлера, следующее из (2.7), допускает первый интеграл

$$\frac{1}{\gamma_1} \left[\dot{\varphi} \frac{\partial(F_0 + f F_2)}{\partial \dot{\varphi}} - (F_0 + f F_2) \right] \equiv [2\dot{\varphi}^3 + d\dot{\varphi}^2 - (1+f)d_1]\varphi = c_1 \quad (2.10)$$

$$d = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad d_1 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1 u_0^2}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Без ограничения общности исследования можно считать, что в концевых точках функция $\varphi(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = \sqrt{S_m / \pi} \quad (2.11)$$

Не останавливаясь на детальном обсуждении задачи об оптимальном продольном контуре, заметим, что в уравнении (2.10) при наложении естественного ограничения на форму продольного контура $\varphi \geq 0$ и при учете краевых условий (2.11) постоянная $c_1 \geq 0$.

Если $c_1 > 0$, экстремаль описывается соотношением

$$x = \int_0^\varphi z^{1/3} [(1+z_1)^{1/3} + (1-z_1)^{1/3}] d\varphi \quad (2.12)$$

$$z = \frac{\varphi}{c_1 + (1+f)d_1\varphi}, \quad z_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{3}\right)^3 z}$$

и в носике тела имеет асимптотику $(32 c_1/27)^{1/4} x^{3/4}$.

При $c_1 = 0$, что отвечает также случаю, когда длина тела (его головной части) L не задана, уравнение (2.10) допускает два типа дуг экстремали, удовлетворяющих условию Вейерштрасса – Эрдмана в угловой точке, – прямые $\varphi = 0$ и $\varphi = \tau_1 x$, где τ_1 – половина относительной толщины конуса с длиной L_1 , определяемой из соотношений

$$\tau_1 = \varphi_1 d_1^{1/3}, \quad 2\varphi_1^3 + d_2 \varphi_1^2 - (1 + f) = 0, \quad d_2 = \left(\frac{\gamma_2^3 u_0^2}{\gamma_1^2 \gamma_3} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

Таким образом, если длина L задана и $t \leq \tau_1$, оптимальное тело имеет длину L_1 с коническим продольным контуром, так как игла – $\varphi = 0$ на отрезке $x \in [0, L - L_1]$ не имеет физического смысла и лишь дополняет продольный контур для удовлетворения краевых условий (2.11).

Форма оптимального продольного контура через параметры d, d_1 и f (2.12), либо d, d_2 и f (2.13) зависит от параметров среды, начальных скорости входа и сопротивления тела и его компонент (2.9), а также от формы поперечного контура (γ_i в (2.3)), которая, в свою очередь, зависит от тех же величин и через параметры k_i ($i = 1, 2, 3$) (2.5) от формы продольного контура. Для определения γ_i, k_i, f и их комбинаций необходимо решения соответствующих вариационных задач подставить в выражения для указанных параметров и решить получающуюся систему уравнений.

Заметим, что поиск формы тела с максимальной глубиной проникания удобно начинать, считая продольный контур коническим $\varphi = \tau_1 x$. Рассчитав k_i и определив оптимальный поперечный контур $R(\theta)$, вычисляем γ_i , а затем τ_1 по (2.13). Если $L_1 \leq L$, когда длина L задана, то оптимальное тело найдено. Если $L_1 > L$, то используем для продольного контура выражение (2.12).

Для построения оптимального поперечного контура введем новую переменную

$$r = k_f R(\theta), \quad k_f = (k_1 u_0^2 / k_3)^{1/3} \quad (2.14)$$

Соотношения для составляющих сопротивления тела (2.2) перепишем в форме

$$D_1 u_0^2 = \frac{k_3}{k_f} \int_0^{2\pi} (r \Phi_1^{-1} + a) r^3 \Phi_1^{-1} d\theta, \quad a = \frac{k_2 k_f}{k_1}, \quad \Phi_1 = \sqrt{1 + \frac{\dot{r}^2}{r^2}} \quad (2.15)$$

$$D_2 = \frac{k_3}{k_f} \int_0^{2\pi} r \Phi_1 d\theta + C S_m \quad (2.16)$$

В случае конического продольного контура будем иметь

$$k_f = t \left(\frac{A u_0^2}{\mu C} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{\mu^2 A u_0^2}{C} \right)^{1/3} \quad (2.17)$$

Необходимо найти функцию $r(\theta)$, удовлетворяющую соотношениям (2.7), (2.8), изопериметрическому условию (2.4), которое при учете (2.14) примет вид

$$2\pi k_f^2 = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \quad (2.18)$$

и условию замкнутости поперечного контура $r(0) = r(2\pi)$. Соотношение (2.7) совместно с изопериметрическим условием (2.18) эквивалентно соотношению

$$\delta \int_0^{2\pi} (F_0 + \lambda r^2) d\theta + f \delta \int_0^{2\pi} F_2 d\theta = 0 \quad (2.19)$$

где λ – неопределенный постоянный множитель Лагранжа, F_0 и F_2 , как и в (2.10) – основные функции функционалов D_0 и D_2 .

Уравнение Эйлера, следующее из (2.19), имеет первый интеграл, который запишем в параметрическом виде

$$r^2 = \frac{c_2 + \alpha[2\alpha^3 + a\alpha^2 - (1 + f)]}{3\alpha^2 + 2a\alpha + \lambda}, \quad c_2 = \text{const}, \quad \alpha = \frac{r}{\Phi_1}, \quad \alpha \leq r \quad (2.20)$$

$$d\theta = \pm \frac{\alpha dr^2}{2r^2 \sqrt{r^2 - \alpha^2}}$$

Условие в угловых точках имеет вид

$$\Delta[c_2]\delta\theta + \Delta\left[\frac{\partial(F_0 + \lambda r^2 + f F_2)}{\partial \dot{r}}\right]\delta r = 0 \quad (2.21)$$

Так как положение угловых точек не задано, из (2.21) следует, что $\Delta[c_2] = 0$, и, значит, все дуги экстремали имеют одинаковое значение постоянной c_2 . Тогда, если $r(\theta)$ – решение уравнений (2.20), то и $r(-\theta)$, и $r(\theta + \text{const})$ также являются решениями, поскольку $\dot{r}$ входит в (2.20) в четной степени, и следовательно, поперечный контур может быть составлен из целого числа n симметричных циклов. При этом условие замкнутости поперечного контура будет выполнено.

Согласно соотношениям (2.8), (2.14) – (2.16), (2.19) – (2.20) условие Лежандра запишем в форме

$$r^2 \geq \frac{1}{2(3\alpha + a)}[8\alpha^3 + 3a\alpha^2 - (1 + f)] \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что оптимальное тело будет телом вращения, либо поперечный контур может содержать дугу окружности (дугу нулевого наклона $\dot{r} = 0$), если $r \leq \alpha_1$, где α_1 – единственный положительный корень уравнения

$$2\alpha^3 + a\alpha^2 - (1 + f) = 0 \quad (2.23)$$

Полученное ограничение на r является весьма сильным и задача, как показано ранее [9], должна быть переформулирована путем введения дифференциального неравенства $\dot{r} \geq 0$ и с учетом сделанного выше вывода о том, что поперечный контур состоит из n симметричных циклов. Изопериметрическое условие (2.18) примет вид

$$\frac{\pi}{n} k_f^2 = \int_0^{\pi/n} r^2 d\theta \quad (2.24)$$

Условие трансверсальности на концах отрезка $[0, \pi/n]$ запишется в форме

$$\left[\frac{\partial(F_0 + \lambda r^2 + \lambda_1(\dot{r} - \beta^2) + f F_2)}{\partial \dot{r}} \delta r \right]_0^{\pi/n} = 0 \quad (2.25)$$

где λ_1 – неопределенный переменный множитель Лагранжа, β – функция переменной θ , удовлетворяющая дифференциальной связи $\dot{r} - \beta^2 = 0$.

Анализ необходимых условий экстремума в задаче о поперечном контуре тела с максимальной глубиной проникания показывает, что они отличаются от соответствующих условий в задаче о поперечном контуре тела с минимальным сопротивлением [9] лишь наличием параметра $f > 0$. Поэтому доказательства утверждений, которые сформулированы ниже, аналогичны доказательствам соответствующих утверждений, проведенных ранее [9].

Лемма 1. Экстремаль полуцикла поперечного контура не может состоять из двух регулярных дуг (2.20) и дуги нулевого наклона между ними, если максимальный радиус r_f поперечного контура не задан.

Следствия. 1°. Если параметр изопериметрического условия (2.24) $k_f < \alpha_1$ и на концы экстремали не накладываются дополнительные условия, оптимальным поперечным контуром является окружность с радиусом k_f .

2°. Если экстремаль внутри полуцикла поперечного контура содержит дугу нулевого наклона, то в ее составе не может быть других дуг нулевого наклона.

3°. Если максимальный радиус r_f поперечного контура задан, то экстремаль может содержать дугу нулевого наклона внутри полуцикла.

Лемма 2. Экстремаль полуцикла поперечного контура не может содержать наряду с регулярной дугой (2.20) дугу нулевого наклона с радиусом $r_f \geq \alpha_1$, либо $r_i > \alpha_1$, если r_f или r_i (минимальный радиус поперечного контура) не заданы.

Теорема. При $k_f \geq \alpha_1$, в случае отсутствия дополнительных ограничений на экстремаль поперечного контура на отрезке $[0, \pi/n]$, она может состоять либо из дуги окружности радиуса α_1 , либо из регулярной дуги $\alpha = \alpha_1$, либо из них обеих, причем существование каждой из указанных структур экстремали определяется изопериметрическим условием (2.24).

Назовем поперечный контур, построенный из таких дуг экстремали, абсолютно оптимальным. Согласно (2.20) регулярная дуга $\alpha = \alpha_1$ – отрезок прямой с уравнением

$$r(\theta) = \alpha_1 / \cos(\theta + \gamma) \quad (2.26)$$

Из (2.26) следует, что регулярная дуга касается окружности с радиусом α_1 в точке $\theta = -\gamma$. И, если $\gamma = -\theta_c$, где $0 < \theta_c < \pi/n$, то дуга нулевого наклона $r_i = \alpha_1$ без разрыва производной сопрягается с регулярной дугой (2.26).

С использованием изопериметрического условия (2.24) и (2.26) найдем

$$\left(\frac{k_f}{\alpha_1} \right)^2 = \frac{n}{\pi} \left[\theta_c + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} - \theta_c \right) \right] \geq 1 \quad (2.27)$$

Согласно (2.27) экстремаль будет дугой окружности $r = \alpha_1$ ($\theta_c = \pi/n$) при $k_f = \alpha_1$ и будет комбинацией дуги нулевого наклона и регулярной дуги при

$$\left(\frac{k_f}{\alpha_1} \right)^2 < \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad (2.28)$$

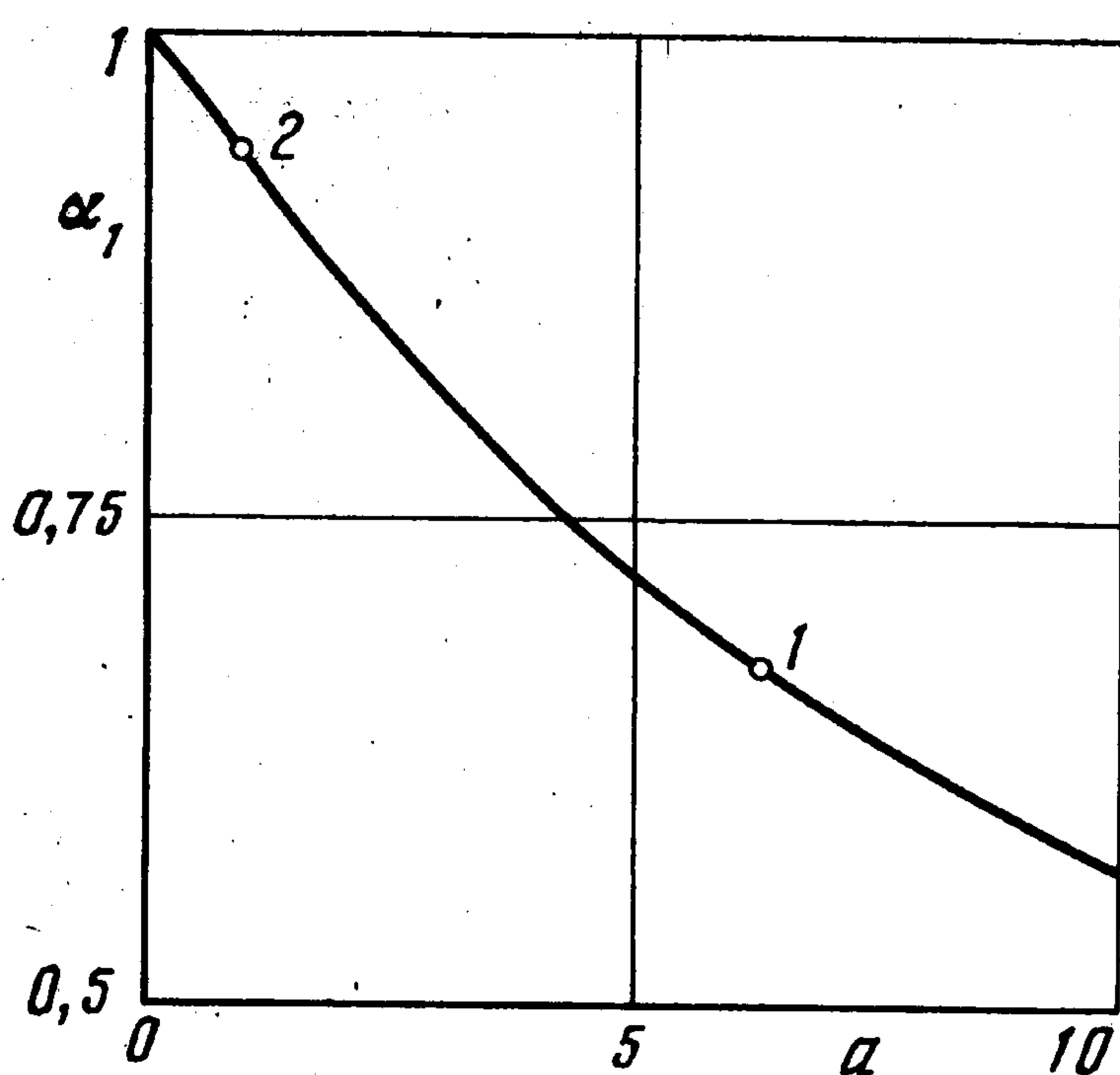
Если же

$$\left(\frac{k_f}{\alpha_1} \right)^2 \geq \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad (2.29)$$

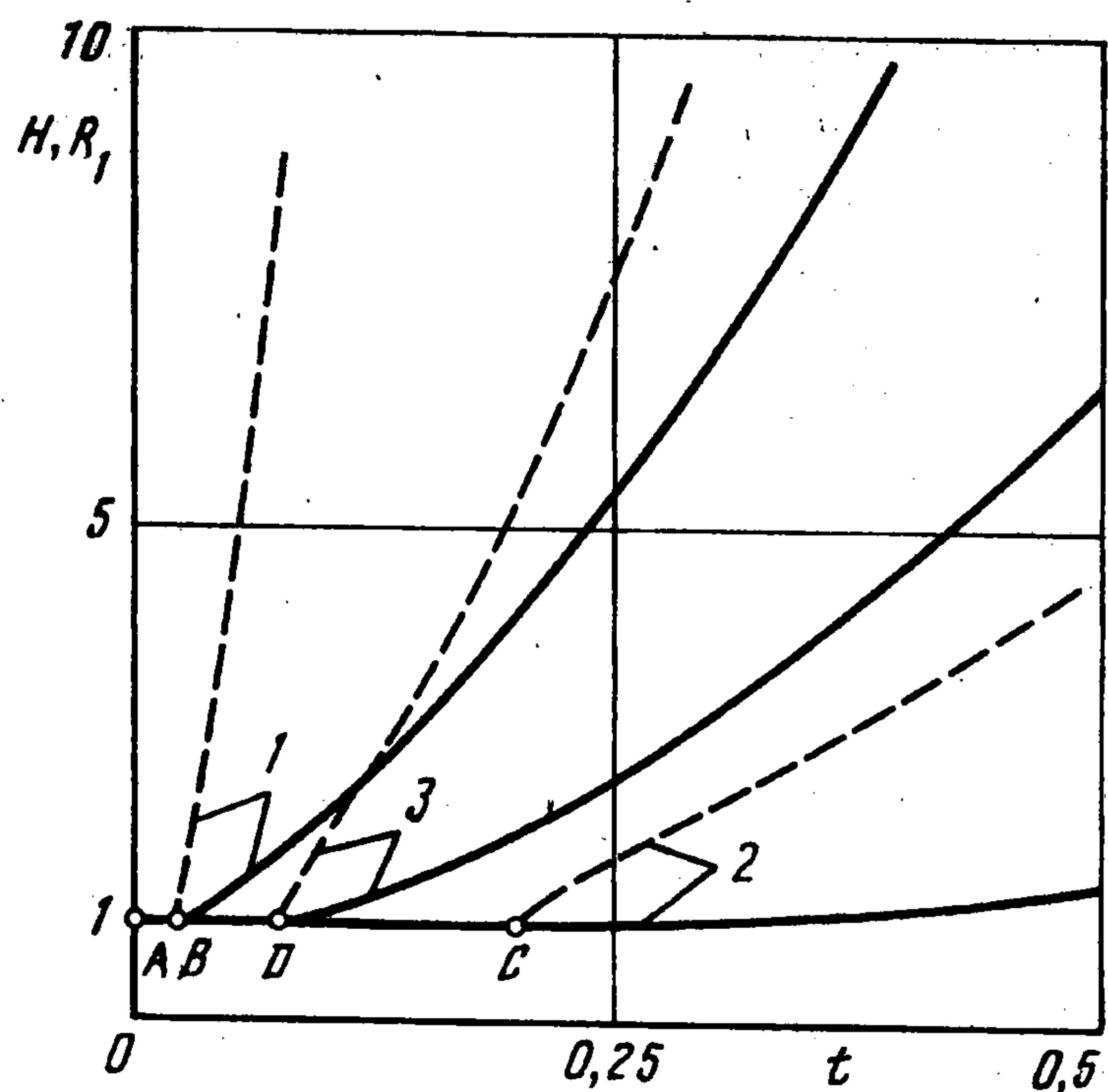
экстремаль будет состоять только из регулярной дуги (2.26), где γ – угол между нормалью к прямой, являющейся продолжением регулярной дуги, и осью полярной системы координат, определится из соотношения

$$\left(\frac{k_f}{\alpha_1} \right)^2 = \frac{n}{\pi} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} + \gamma \right) - \operatorname{tg} \gamma \right] \quad (2.30)$$

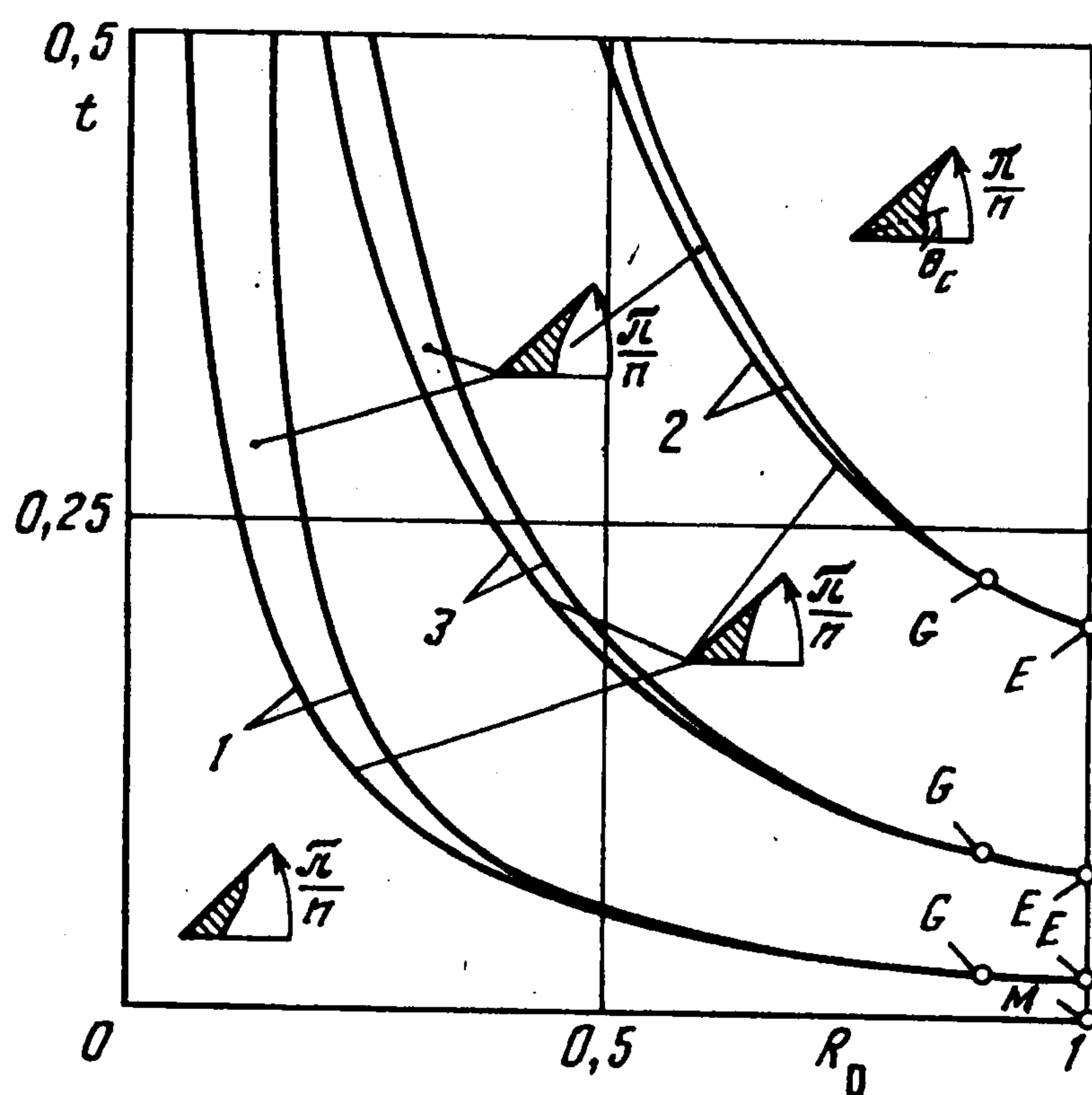
Таким образом, конфигурация абсолютно оптимального поперечного контура определяется величиной одного параметра k_f/α_1 , содержащего характеристики среды, скорость входа и форму продольного контура. Согласно теореме, если указанный параметр больше единицы, необходимо рассматривать целесообразность перехода от те-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ла вращения к эквивалентному телу пространственной формы, глубина проникания которого определяется в соответствии со следующими следствиями из теоремы.

Следствия. 1°. Глубина проникания тела, имеющего абсолютно оптимальный поперечный контур не зависит от числа циклов n .

В этом случае D_1 и D_2 , определяющие h (2.6), имеют вид

$$D_1 u_0^2 = \frac{2\pi}{\alpha_1} k_f k_3 (1 + f - \alpha_1^3), \quad D_2 = \frac{2\pi}{\alpha_1} k_f k_3 + CS_m \quad (2.31)$$

2°. Глубина проникания тела, имеющего конический продольный и абсолютно оптимальный поперечный контуры, не зависит от относительной толщины тела.

Проведя необходимые выкладки с использованием соотношений (2.17), (2.23), (2.31), получим

$$D_1 u_0^2 = a \alpha_1 (\alpha_1 + a) C S_m, \quad D_0 / D_2 = 1 + a \alpha_1^2 \quad (2.32)$$

$$h = \frac{M}{2 S_m} \left(\frac{a}{\mu} \right)^2 \frac{\ln(1 + a \alpha_1^2)}{A \alpha_1 (\alpha_1 + a)}$$

Заметим, что согласно соотношениям (2.17), (2.23) и (2.32) α_1 — функция только параметра a и, следовательно, зависит только от характеристик среды, скорости входа и коэффициента сухого трения. Зависимость $\alpha_1(a)$ приведена на фиг. 2. В качестве примера точками 1 и 2 соответственно нанесены значения параметров a и α_1 , отвечающие прониканию в грунт ($u_0 = 600$ м/с, $\rho = 1530$ кг/м³, $b_1 = 0,7$, $\vartheta = 20^\circ$, $k = 0,05$ МПа, $p_a = 0,3$ МПа) и в металл ($u_0 = 2000$ м/с, $\rho = 7600$ кг/м³, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\tau = 1$ ГПа) при коэффициенте сухого трения $\mu = 0,2$.

В случае конического продольного контура соотношения (2.13) удовлетворяются тождественно, и между t и формой абсолютно оптимального поперечного контура при произвольном количестве циклов n в соответствии с (2.23), (2.27) и (2.30) устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Таким образом, имеется бесчисленное множество абсолютно оптимальных тел при $t > \mu \alpha_1 / a$, имеющих одинаковую глубину проникания h (2.32), конический продольный и абсолютно оптимальный поперечный контуры. Если же $t \leq \mu \alpha_1 / a$, то оптимальным телом является круговой конус с глубиной проникания

$$h_k = \frac{M \ln(1 + A u_0^2 t^2 / C)}{2 S_m A t (t + \mu)} \quad (2.33)$$

На фиг. 3 представлены результаты расчетов глубины проникания абсолютно оптимального тела h (2.32), отнесенной к глубине проникания эквивалентного конуса h_k (2.33), — $H = h/h_k$ в зависимости от t (сплошные линии). Кривые 1 и 2 соответствуют прониканию в грунт со скоростью $u_0 = 600$ м/с и в металл со скоростью $u_0 = 2000$ м/с. Отрезки AB и AC прямой $H = 1$ отвечают интервалам изменения t , где оптимальным телом является круговой конус. Там же нанесены данные расчетов отношения максимального и минимального радиусов абсолютно оптимального поперечного контура — $R_1 = R(\pi/n)/R(0)$ (штриховые линии). Как видно, параметр R_1 особенно велик в случае сред с малой сопротивляемостью деформированию (грунт). Поскольку такая конфигурация поперечного контура может не представлять практического интереса, то при $k_f > \alpha_1$ следует осуществлять поиск оптимального поперечного контура с ограничениями. В частности, одним из таковых является задание минимального радиуса $r_i > \alpha_1$.

Система соотношений, определяющая в этом случае параметры точки сопряжения оптимального поперечного контура, состоящего из дуги нулевого наклона $r = r_i$ на отрезке $\theta \in [0, \theta_c]$ и вогнутой регулярной дуги (2.20) на отрезке $\theta \in [\theta_c, \pi/n]$, имеет вид

$$c_2 - \lambda r_i^2 = r_i^4 + a r_i^3 + (1 + f) r_i \quad (2.34)$$

$$c_2 - \lambda r_i^2 = \alpha_c^2 (3 r_i^2 - 2 \alpha_c^2) + a \alpha_c (2 r_i^2 - \alpha_c^2) + (1 + f) \alpha_c$$

$$\frac{\pi}{n} = \theta_c + \int_{\alpha_c}^{\alpha_f} \frac{Q}{r^2} d\alpha, \quad Q = \frac{\alpha}{2 \sqrt{r^2 - \alpha^2}} \frac{dr^2}{d\alpha}$$

$$K^2 = \frac{\pi}{n} \left(\theta_c + \frac{1}{r_i^2} \int_{\alpha_c}^{\alpha_f} Q d\alpha \right)^{-1}$$

В (2.34) $K = r_i/k_f = R(0) \leq 1$ – параметр формы поперечного контура; r_i , n и k_f – заданные, а c_2 , λ , α_c и θ_c – неизвестные величины; $\alpha_f = \alpha_1$, что следует из условия трансверсальности (2.25) [9]; f в соответствии с соотношениями (2.9), (2.15), (2.16) и (2.20) зависит как от заданных, так и от неизвестных величин. Условием реализации рассматриваемой структуры экстремали является соотношение

$$\alpha_1/k_f \leq K \leq 1. \quad (2.35)$$

При $\theta_c = 0$, когда составная экстремаль вырождается в регулярную дугу, уравнениями (2.34) накладывается связь на определяющие параметры. Переход от одной структуры экстремали к другой может быть конкретизирован с использованием соотношений (2.28), (2.29). При выполнении неравенства (2.28), если K , уменьшаясь, становится равным α_1/k_f (см. (2.35)), то реализуется случай абсолютно оптимального поперечного контура, состоящего из дуги нулевого наклона и регулярной дуги – отрезка прямой. При выполнении неравенства (2.29) и $K = K_n \equiv \alpha_1/(k_f \cos \gamma) < 1$, причем величина K_n определена в соответствии с уравнением (2.26), также реализуется случай абсолютно оптимальной экстремали – отрезка прямой. Если же определяющие параметры задачи таковы, что удовлетворяются неравенства (2.28) и $K < \alpha_1/k_f$, либо – неравенства (2.29) и $K < K_n$, то экстремаль выпуклая.

В качестве примера на фиг. 4 в плоскости параметров $R_0 = R(0)$ и t изображены кривые, разделяющие области с качественно различными формами экстремали в полцикле поперечного контура (заштрихован), при проникании тела с коническим продольным контуром и числом циклов $n = 4$ в грунт со скоростью $u_0 = 600$ м/с (кривые 1) и в металл – $u_0 = 2000$ м/с (кривые 2). Отрезки ME прямой $R_0 = 1$ отвечают круговому конусу, который является оптимальным телом при соответствующих t . Отметим, что ордината точки E на кривых 2 (металл) и, особенно, на кривых 1 (грунт), при которой происходит переход к телам пространственной формы, мала, что отмечалось и в задаче о телах минимального сопротивления [9]. Отрезки гипербол EG отвечают абсолютно оптимальному контуру, состоящему из дуги $r = \alpha_1$ и отрезка прямой. Кривые 1 и 2, начинающиеся в точках G , соответствуют абсолютно оптимальному контуру – отрезку прямой (левые кривые) и переходу от экстремали, состоящей из вогнутой регулярной дуги, к комбинации дуги нулевого наклона и вогнутой регулярной дуги (правые кривые).

3. Оптимальные формы тел при трении на поверхности, равном предельному напряжению на сдвиг материала среды. Анализ задачи о форме пространственного тела с максимальной глубиной проникания в предположении, что на поверхности контакта тела со средой справедлив закон трения Кулона (разд. 2), может быть без существенных изменений перенесен и на случай, когда на поверхности контакта действует постоянное касательное напряжение, равное пластическому напряжению сдвига материала среды. Укажем основные отличия в решении вариационной задачи, появляющиеся при использовании модели с постоянным касательным напряжением σ_s на поверхности контакта.

В рассматриваемом случае сопротивление тела запишется в виде

$$D = \iint_S [-\sigma_n(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \sigma_s(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x})] dS$$

Поэтому в соотношения (2.3), (2.5), (2.10), (2.13), (2.15)–(2.17), (2.20), (2.22), (2.23) будем иметь

$$\gamma_2 = k_2 = d = d_2 = a = 0 \quad (3.1)$$

$$\gamma_3 = \sigma_s \int_0^{2\pi} R \Phi d\theta, \quad k_3 = \sigma_s \int_0^L \varphi dx$$

Выражения для γ_1 (2.3) и k_1 (2.5) остаются без изменений.

Поскольку $d = d_2 = 0$ (3.1), приобретает более простой вид формула для оптимального продольного контура при $c_1 > 0$ (2.12)

$$x = 2^{1/3} \int_0^\varphi \left(\frac{\varphi}{c_1 + d_1 \varphi} \right)^{1/3} d\varphi$$

а при $c_1 = 0$ (2.13) относительная толщина оптимального конуса определяется явным выражением

$$\tau_1 = [d_1(1+f)/2]^{1/3}$$

Так как $a = 0$ (3.1), то из (2.23) непосредственно найдем

$$\alpha_1 = [(1+f)/2]^{1/3} \quad (3.2)$$

Все положения, касающиеся структуры экстремали поперечного контура в рамках модели Кулона для трения на поверхности контакта (разд. 2), остаются справедливыми и в этом случае. Сохраняют свою форму соотношения (2.31) (следствие 1° теоремы), а соотношения (2.32) примут вид

$$D_1 u_0^2 = \alpha_1^2 \sigma_s S_m \left(\frac{A u_0^2}{\sigma_s} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

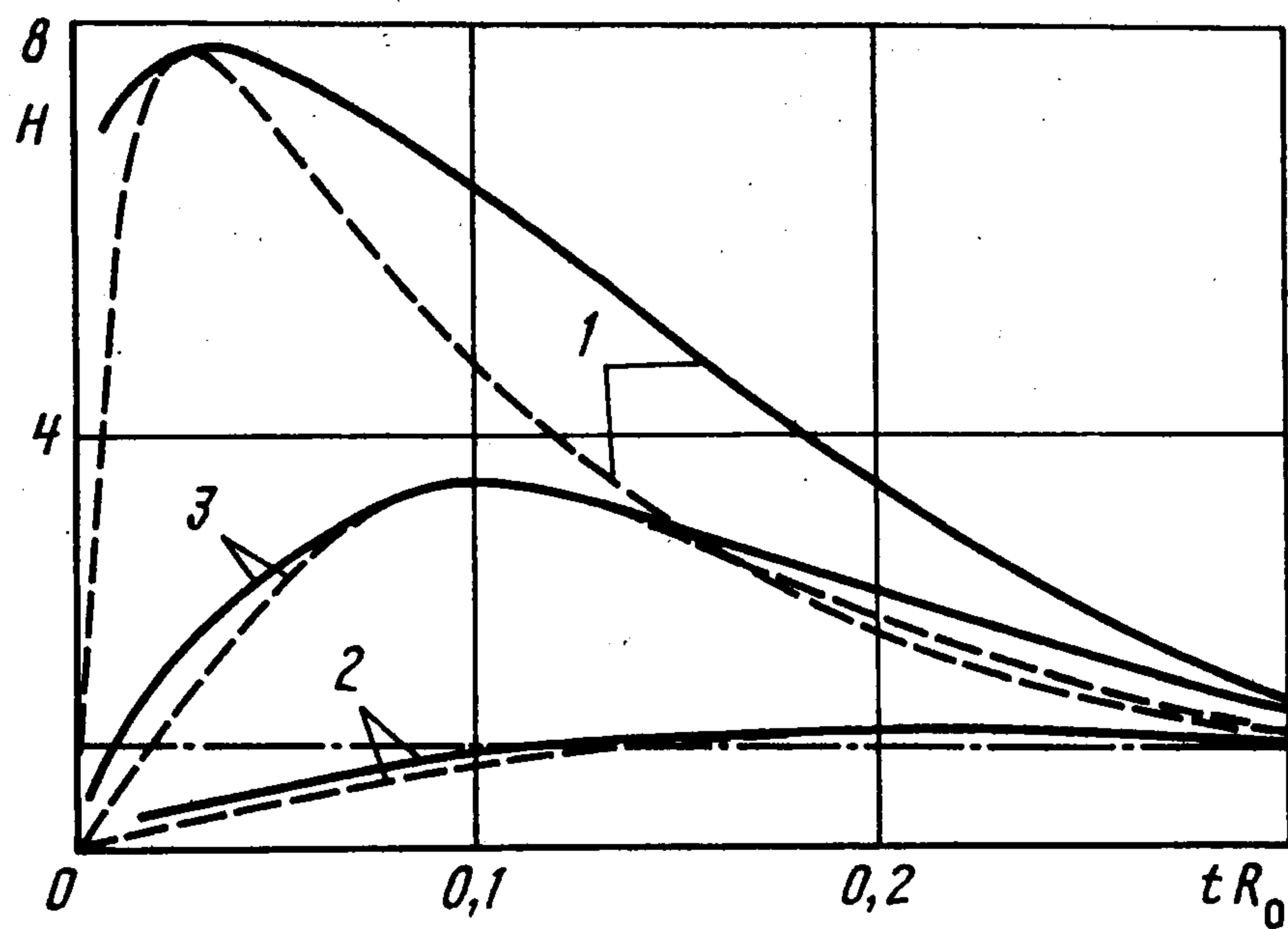
$$\frac{D_0}{D_2} = 1 + \frac{g \alpha_1^3}{g + \alpha_1}, \quad g = \frac{\sigma_s k_f}{C t}, \quad k_f = t \left(\frac{A u_0^2}{\sigma_s} \right)^{1/3}$$

Согласно выражению для D_0/D_2 (3.3), а также (2.9), (3.2), для тел с коническим продольным контуром и абсолютно оптимальным поперечным контуром параметр α_1 , входящий в соотношение $k_f = \alpha_1$, определяющее переход от тел вращения к телам пространственной формы, зависит только от параметра g .

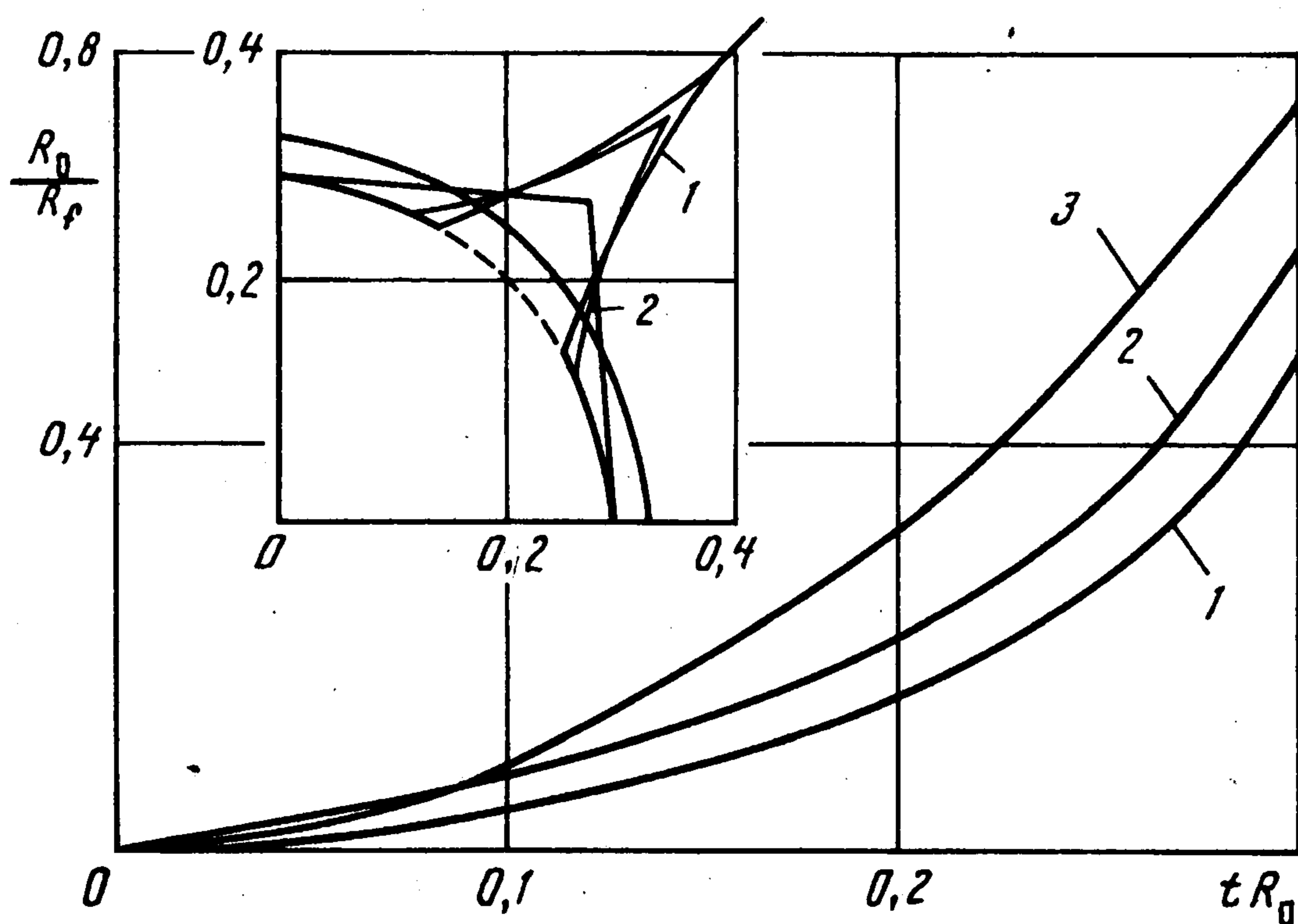
В соответствии с (3.1) упростятся и соотношения (2.34) для оптимального поперечного контура, состоящего из дуг нулевого наклона заданного радиуса и регулярных дуг.

На фиг. 3 сплошной и штриховой кривыми 3 нанесены соответственно относительные значения глубины внедрения абсолютно оптимального тела $H(t)$ и частное максимального и минимального размеров его поперечного контура $R_1(t)$ (для числа циклов $n = 4$) при проникании в грунт со скоростью $u_0 = 600$ м/с в предположении, что $\sigma_s = 0,3$ МПа. Отрезок AD прямой $H = 1$, как и ранее, отвечает интервалу изменения t , на котором при принятых условиях оптимальным телом является конус. На фиг. 4 кривыми 3, как и в случае модели трения Кулона, изображены области существования и границы видоизменения различных структур поперечного контура оптимального тела, состоящего из четырех циклов, с линейным продольным контуром при проникании в грунт. Приведенные данные свидетельствуют, что модель постоянного трения на поверхности контакта не вносит качественных изменений в результаты, полученные при решении соответствующей вариационной задачи с использованием модели сухого трения.

4. Примеры расчетов. На фиг. 5 представлены результаты расчета относительной глубины проникания H конического тела с числом циклов $n = 4$ в грунт ($u_0 = 600$ м/с, кривые 1) и металл ($u_0 = 2000$ м/с, кривые 2) в рамках модели трения Кулона, а также с использованием модели постоянного предельного пластического трения (грунт, кривые 3) при $t = 1/3$ в зависимости от заданного минимального безразмерного радиуса поперечного контура tR_0 . Сплошные кривые отвечают оптимальному поперечному контуру, штриховые – эквивалентному телу с плоскими гранями, штрихпунктирная



Фиг. 5



Фиг. 6

прямая — $H = 1$. Максимально возможному выигрышу в глубине проникания, которого можно достичь в результате перехода к телу пространственной формы от эквивалентного кругового конуса с $t = 1/3$ для заданных сред и скоростей проникания, соответствуют точки касания указанных кривых, где тело с плоскими гранями совпадает с телом, имеющим абсолютно оптимальный поперечный контур.

На фиг. 6 приведены данные о величине $R_1^{-1}(tR_0)$ у конических тел с $t = 1/3$, состоящих из четырех циклов, с оптимальным поперечным контуром, найденным в рамках моделей трения Кулона (кривая 1, $\mu = 0,2$) и предельного пластического трения (кривая 2, $\sigma_s = 0,3$ МПа) на поверхности контакта при проникании в грунт ($u_0 = 600$ м/с). Кривая 3 соответствует эквивалентным телам с плоскими гранями. Абсциссы точек пересечения последней с кривыми 1 и 2 совпадают с абсциссами точек касания сплошных и штриховых кривых 1 и 3 на фиг. 5.

На фиг. 6 в качестве примера изображены также контуры поперечных сечений эквивалентных тел в одном цикле ($n = 4$): кругового конуса (дуга окружности, $t = 1/3$), оптимальных тел с линейным продольным контуром, проникающих в грунт (контур 1 —

модель трения Кулона, контур 2 – модель с постоянным пластическим трением), и тела с плоскими гранями при $t R_0 = 0,3$. Относительная глубина проникания H тел с контурами 1 и 2 соответственно равна 1,47 и 1,43, а у тела с плоскими гранями в рамках моделей сухого и пластического трения – 1,14 и 1,15. Приведенные значения H получены при расчете глубины проникания эквивалентного конуса с использованием соответствующих моделей трения.

В заключение необходимо заметить, что представленные в этом разделе и выше результаты расчета глубины внедрения и других величин, отвечающих оптимальным телам, не следует рассматривать соответствующими какой-либо конкретной среде. Принятые значения определяющих параметров в (1.1), (1.2), а также σ_s лишь по порядку величины близки к их характерным значениям у грунтов и металлов. В связи с этим, расчетные данные только демонстрируют преимущество пространственных форм по сравнению с эквивалентными телами вращения в глубине проникания в среды с существенно разными характеристиками и возможности теории. Сравнение глубин внедрения оптимальных пространственных тел, найденных в рамках различных моделей трения (разд. 2, 3), возможно лишь в результате численных расчетов проникания тел заданной геометрии с использованием смешанной модели трения на поверхности контакта тела со средой [11, 12].

Отметим также, что к расчету величины H для оптимального тела, проникающего в металл со скоростью $u_0 = 2000$ м/с (фиг. 5, кривые 2), следует относиться критически. При таких скоростях допущение о недеформируемости тела уже нельзя считать выполнимым. Поэтому, учитывая также весьма небольшое увеличение глубины внедрения у абсолютно оптимального тела по сравнению с эквивалентным конусом (фиг. 3, сплошная кривая 2), можно прийти к заключению, что при проникании в металлы переход от тела вращения к эквивалентному оптимальному телу пространственной формы, скорее всего, не приведет к заметному изменению глубины внедрения. В то же время, при проникании в грунт такой переход в соответствующей области изменения определяющих параметров может обеспечить значительное увеличение глубины внедрения (фиг. 5, кривые 1, 3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи для деформируемого полупространства // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 21. С. 76–131.
2. Антуков В.Н. Проникание: Механические аспекты и математическое моделирование // Проблемы прочности. 1990. № 2. С. 60–68.
3. Гонор А.Л. Движение тел со звездообразным поперечным сечением в сжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 101–112.
4. Остапенко Н.А. Проникание тонкого тела со звездообразным поперечным сечением в упругое полупространство // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 1. С. 62–66.
5. Гонор А.Л., Поручиков В.Б. Проникание тел звездообразной формы в сжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 405–412.
6. Gonor A.L., Ostapenko N.A., Poruchikov V.B., Chernyi G.G. Slender body entry into a compressible fluid // Fluid Mechanics. Mechanical engineering and applied mechanics. 1991. V. 2. P. 175–192.
7. Остапенко Н.А. Проникание тонкого циклически-симметричного пространственного тела в упругое полупространство // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 808–818.
8. Остапенко Н.А., Романченко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПМТФ. 1994. № 4. С. 32–40.

9. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 95–106.
10. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
11. Григорян С.С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
12. Остапенко Н.А. Теория тонких тел вращения минимального сопротивления, движущихся в плотных средах при смешанном законе трения на поверхности контакта // Проблемы современной механики / Под ред. С.С. Григоряна. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 168–178.
13. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара $10^2 + 10^3$ м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
14. Витман Ф.Ф., Златин Н.А. О процессе соударения деформируемых тел и его моделирования // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33. Вып. 8. С. 982–989.
15. Сагомонян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975. № 5. С. 104–111.
16. Рахматулин Х.А., Сагомонян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. М.: Изд-во МГУ, 1964. 239 с.
17. Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
18. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. A. Miele. L.: Acad. Press, 1965. = Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
19. Флитман Л.М. О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 131–137.
20. Флитман Л.М. Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 155–164.
21. Бондарчук В.С., Ведерников Ю.А., Дулов В.Г., Минин В.Ф. К оптимизации звездообразных ударников // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1982. № 13. Вып. 3. С. 50–65.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1998