

УДК 539.3

© 1999 г. С.А. Назаров, А.С. Слуцкий

АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦЫ ТИПА "КОГТЯ"

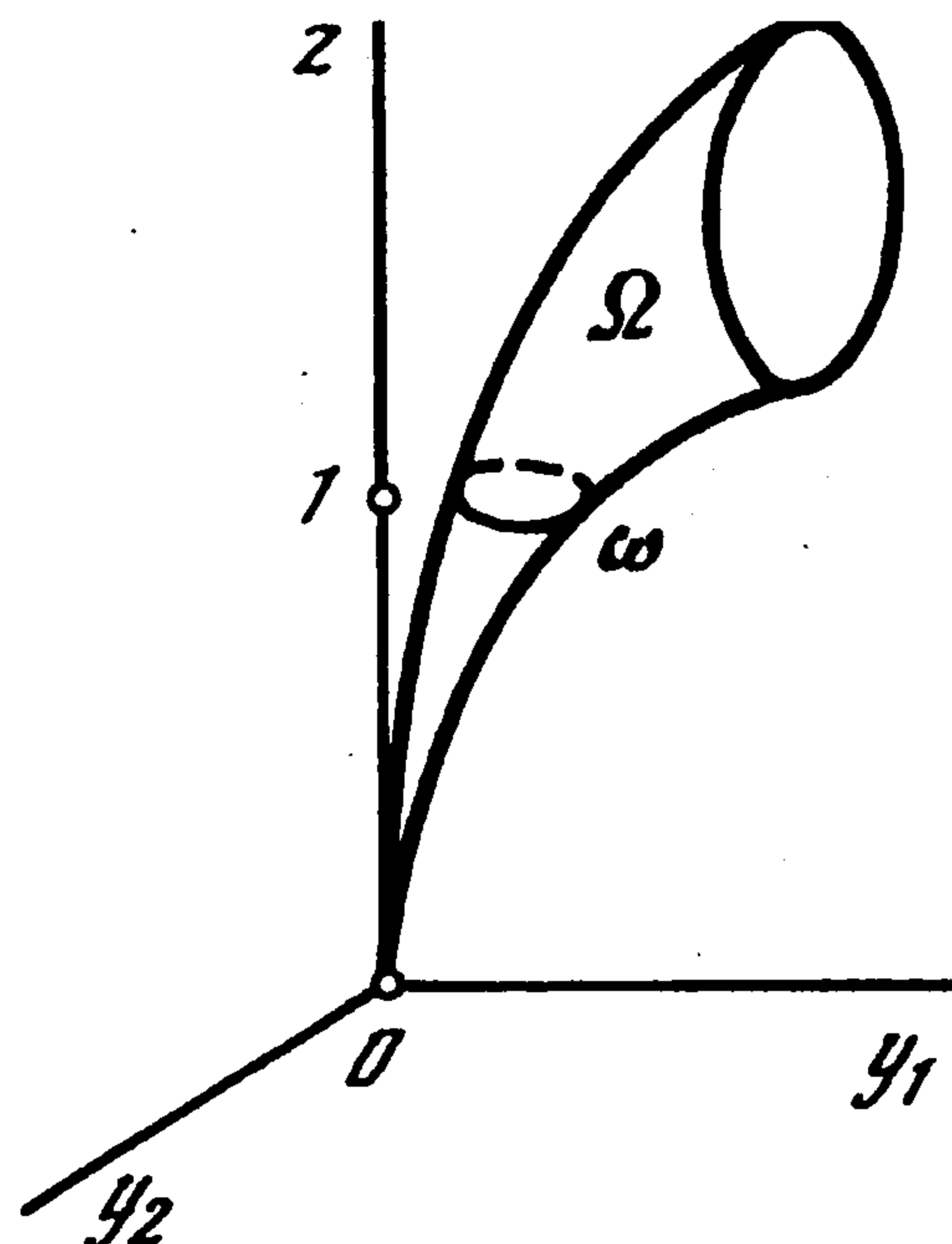
Выводятся асимптотические формулы для полей смещений, деформаций и напряжений вблизи пикообразного заострения поверхности анизотропного упругого тела (особенности типа "когтя"). Построенные сингулярные решения интерпретируются как силы и моменты, сосредоточенные в вершине заострения, а порядки роста смещений зависят от направления действия силы (продольной или поперечной) и оси момента (крутящего или изгибающего), но не от упругих свойств материала. При асимптотическом анализе существенно используется обнаруженная аналогия с одномерными моделями тонких стержней с переменным сечением.

Определение особенностей напряженного состояния вблизи нерегулярностей границы оказывается ключевым моментом во многих разделах механики деформируемого тела, например в теории разрушения, вычислительных методах и пр. Подробно изучены угловые и (в меньшей степени) конические заострения или включения, для которых возможно разделение переменных и редукция размерности задачи. Геометрически более сложные особенности границы требуют разработки новых асимптотических подходов, привязанных к конкретным формам (например, для пикообразных включений и полостей [5–7], а также для заострений типа вершины клюва [8, 9]). Подчеркнем, что специфические свойства системы уравнений теории упругости затрудняют применение аппарата, приспособленного к скалярным уравнениям или системам уравнений первого порядка, – необходимые выкладки и преобразования становятся необозримыми. Для понижения размерности задачи при изучении особенности типа "когтя" решающую роль сыграла обнаруженная аналогия с одномерными моделями тонких стержней, точнее, с общими асимптотическими алгоритмами [10, 11]. Сокращение формул и сопутствующих вычислений стало возможным благодаря применению матричной (а не тензорной) записи. Далее приводится процедура построения формальной асимптотики, но ее обоснование следует из общих результатов [12–15].

1. Постановка задачи. Пусть Ω – однородное анизотропное тело, поверхность $\partial\Omega$ которого имеет особенность типа "когтя" (фигура), т.е. вблизи начала координат O оно совпадает с пикообразным множеством

$$\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < d; z^{-\gamma}(y - Y(z)) \in \omega\} \quad (1.1)$$

Здесь $y = (y_1, y_2)$, $\gamma > 1$ – параметр, характеризующий степень заострения когтя, ω – плоская область, ограниченная простым гладким замкнутым контуром, а соотношения $y = Y(z)$, $z > 0$ задают касающуюся оси z изогнутую ось пика, Y – гладкая вектор-функция, $Y(0) = 0$, $\partial_z Y(0) = 0$. Масштабированием сведем геометрический параметр d к единице, т.е. сделаем координаты безразмерными.



Задачу теории упругости запишем в матричной форме. Определим шестимерный столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \alpha^{-1}\varepsilon_{23}, \alpha^{-1}\varepsilon_{31}, \alpha^{-1}\varepsilon_{13})^t \quad (1.2)$$

При этом ε_{ij} – декартовы компоненты тензора деформации, t – знак транспонирования, а множитель $\alpha = 2^{-1/2}$ введен для того, чтобы совпали естественные нормы тензора и столбца деформации. Если вектор смещений u интерпретируется как столбец $(u_1, u_2, u_3)^t$, то

$$\varepsilon(u) = D(\nabla)^t u$$

$$D(\nabla) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_3 & \alpha\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \alpha\partial_3 & 0 & \alpha\partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \alpha\partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \text{grad}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Пусть еще $\sigma(u)$ – аналогичный (1.2) столбец напряжений, A – симметрическая положительно определенная матрица упругих модулей. Матричная запись закона Гука такова:

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) \quad (1.3)$$

Уравнения равновесия и краевые условия в напряжениях принимают вид

$$L(\nabla)u(x) \equiv D(-\nabla)AD(\nabla)^t u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1.4)$$

$$B(x, \nabla)u(x) \equiv D(n(x))AD(\nabla)^t u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus O \quad (1.5)$$

Если $v = (v_1, v_2)^t$ – нормаль к контуру $\partial\omega \subset \mathbb{R}^2$, то согласно (1.2) вблизи точки O для нормали n к $\partial\Omega$ справедливы формулы

$$n(x) = N(x)^{-1}(v_1(\eta(y, z)), v_2(\eta(y, z)), v_0(y, z))$$

$$N(x) = (1 + v_0^2(\eta(y, z)))^{1/2}, \quad \eta(y, z) = z^{-\gamma}(y - Y(z))$$

$$v_0(y, z) = -v_1(\eta(y, z))(\gamma z^{-1}(y_1 - Y_1(z)) + Y_1'(z)) -$$

$$-v_2(\eta(y, z))(\gamma z^{-1}(y_2 - Y_2(z)) + Y_2'(z))$$

Нагрузки f и g приложены на удалении от точки O . Если они самоуравновешены, то существует решение u задачи (1.4), (1.5) в энергетическом классе $W_2^1(\Omega)^3$. Вблизи особенности это решение с точностью до экспоненциально малых слагаемых совпадает с жестким смещением (см. далее разд. 3). В случае произвольных f и g их можно уравновесить воздействиями, сосредоточенными в точке O (коготь "царапает" абсолютно жесткое тело). Построение соответствующих сингулярных решений и выяснение их свойств составляют предмет данной работы.

2. Асимптотика решения однородной задачи. Вблизи точки O формальную асимптотику решения задачи (1.4), (1.5) ищем в виде степенного ряда

$$u(x) = U^{-2}(z) + U^{-1}(y, z) + U^0(y, z) + U^1(y, z) + U^2(y, z) + \dots \quad (2.1)$$

$$U^k(y, z) = z^{\kappa_k} Q^k(\eta) \quad (2.2)$$

Неизвестными являются как показатель κ_k , так и множитель Q^k , зависящий от переменных $\eta = z^{-\gamma}(y - Y(z))$.

Заметим, что матрицы $D(\nabla)$ и $D(n(x))$ допускают представления

$$D(\nabla) = D_y + D_z, \quad D(n) = D_v + v_0 D_1 \quad (2.3)$$

$$D_y = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_z = D_1 \partial_z$$

$$D_v = \begin{vmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha v_2 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 & \alpha v_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha v_2 & \alpha v_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

В силу (1.4), (1.5), (2.3) имеем

$$L(\nabla) = L^0(\nabla_y) + L^1(\nabla_y, \partial_z) + L^2(\partial_z)$$

$$N(x)B(x, \nabla) = B^0(y, z, \nabla_y) + B^1(y, z, \nabla_y, \partial_z) + B^2(y, z, \partial_z) \quad (2.4)$$

$$L^0 = -D_y A D_y^t, \quad L^1 = -D_y A D_z^t - D_z A D_y^t, \quad L^2 = -D_z A D_z^t$$

$$B^0 = D_v A D_y^t, \quad B^1 = D_v A D_z^t + v_0 D_1 A D_y^t, \quad B^2 = v_0 D_1 A D_z^t \quad (2.5)$$

Операторы в правых частях (2.4) обладают следующим свойством обобщенной однородности:

$$L^j(\nabla)(z^\kappa U(\eta(y, z))) = z^{\kappa-2\gamma-j(1-\gamma)} F_\kappa^j(\eta(y, z))$$

$$B^j(x, \nabla)(z^\kappa U(\eta(y, z))) = z^{\kappa-\gamma-j(1-\gamma)} G_\kappa^j(\eta(y, z))$$

Иными словами, формулы (2.4) интерпретируются как разложения по степеням $z^{\gamma-1}$ и потому логично считать, что в (2.2) $\kappa_k = \kappa_{k-1} + 1 - \gamma$.

Подставим (2.1) и (2.4) в (1.4), (1.5) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях z . В результате получим рекуррентную последовательность задач на "сечении" $\omega(z)$

$$L^0 U^j = -L^1 U^{j-1} - L^2 U^{j-2} \text{ в } \omega(z) \quad (2.6)$$

$$B^0 U^j = -B^1 U^{j-1} - B^2 U^{j-2} \text{ на } \partial\omega(z)$$

При этом $j = -2, -1, \dots, U^{-4} = U^{-3} = 0$.

Известно, что при гладких правых частях двумерная задача

$$L^0 U = F \text{ в } \omega(z), \quad B^0 U = G \text{ на } \partial\omega(z) \quad (2.7)$$

имеет решение U в том и только в том случае, если выполнены условия ортогональности

$$(F, \Phi^q)_{\omega(z)} + (G, \Phi^q)_{\partial\omega(z)} = 0, \quad q = 1, \dots, 4 \quad (2.8)$$

$$\Phi^1 = e^1, \quad \Phi^2 = e^2, \quad \Phi^3 = e^3, \quad \Phi^4(\eta) = \alpha(\eta_1 e^2 - \eta_2 e^1) \quad (2.9)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$, e^j – орт оси x^j . Гладкое (ограниченное) решение U задачи (2.7) определено с точностью до линейной комбинации векторов (2.9) и становится единственным при соблюдении условий $(U, \Phi^q) = 0$ ($q = 1, \dots, 4$).

Структура начальных членов ряда (2.1) такая же, как в асимптотическом представлении, используемом в теории тонких стержней (см., например, [10])

$$U^{-2}(z) = e^1 w_1(z) + e^2 w_2(z) \quad (2.10)$$

$$U^{-1}(y, z) = w_3(z) e^3 + w_4(z) \Phi^4(\eta) - e^3(\eta_1 \partial_z w_1(z) + \eta_2 \partial_z w_2(z))$$

Функции w_p образуют столбец $w = (w_1, \dots, w_4)^t$, подлежащий дальнейшему определению. При этом w_1 и w_2 описывают в главном изгиб когтя, w_3 – его смещение вдоль оси, а w_4 – закручивание.

Согласно соотношениям (2.6) задача для U^0 такова:

$$L^0 U^0 = D_y A D_z^t U^{-1} + D_z A \{D_y^t U^{-1} + D_z^t U^{-2}\} \text{ в } \omega(z) \quad (2.11)$$

$$B^0 U^0 = -D_v A D_z^t U^{-1} - v_0 D_1 A \{D_y^t U^{-1} + D_z^t U^{-2}\} \text{ на } \partial\omega(z)$$

Согласно равенствам (2.10) суммы в фигурных скобках из (2.11) равны нулю. Таким образом, правые части системы (2.11) удовлетворяют условиям разрешимости (2.8).

Представим решение U^0 задачи (2.11) в удобном для дальнейших преобразований виде. С этой целью укажем вытекающие из (2.10) и (2.3) равенства

$$D_z^t U^{-1}(y, z) = Y(y) D(\partial_z) w(z) \quad (2.12)$$

$$D(\partial_z) = \text{diag}\{\partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z\}$$

$$Y(y)^t = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 y_1 & -\alpha^2 y_2 & 0 \end{vmatrix}$$

В силу (2.11), (2.12) получаем

$$U^0(y, z) = X(y, z) D(\partial_z) w(z) \quad (2.13)$$

Матрица-функция X удовлетворяет соотношениям

$$L^0 X = D_y A Y \text{ в } \omega(z), \quad B^0 X = -D_v A Y \text{ на } \partial\omega(z) \quad (2.14)$$

Вектор U^1 находится из краевой задачи

$$L^0 U^1 = D_y A D_z^t U^0 + D_z A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\} \text{ в } \omega(z) \quad (2.15)$$

$$B^0 U^1 = -D_v A D_z^t U^0 - v_0 D_1 A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\} \text{ на } \partial\omega(z)$$

Для любой гладкой в $\bar{\Omega}$ функции H справедлива формула (см., например, [16])

$$\frac{d}{dz} \int_{\omega(z)} H(y, z) dy = \int_{\omega(z)} \frac{\partial H}{\partial z}(y, z) dy - \int_{\partial\omega(z)} H(y, z) v_0(y, z) ds_y \quad (2.16)$$

При помощи этого соотношения покажем, что выполняются первые два условия (2.8) разрешимости задачи (2.15). Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (e^i, \partial_z D_1 A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\omega(z)} + (e^i, -v_0 D_1 A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\partial\omega(z)} = \\ &= \partial_z (D_1^t e^i, A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\omega(z)} = \partial_z (-e^3 y_i, D_y A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\omega(z)} + \\ &+ \partial_z (e^3 y_i, D_v A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\partial\omega(z)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь использована вытекающая из (2.3) формула

$$D_1^t e^i = D_y^t e^3 y_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.18)$$

Правая часть равенства (2.18) равна нулю согласно соотношениям (2.11). Два других условия разрешимости задачи (2.15) в силу (2.13), (2.16) преобразуются так:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi^i, D_z A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\omega(z)} - (\Phi^i, v_0 D_1 A \{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\partial\omega(z)} = \\ &= -\partial_z (D_1^t \Phi^i, A \{D_y^t X + Y\})_{\omega(z)} D(\partial_z) w(z), \quad i = 3, 4 \end{aligned} \quad (2.19)$$

В результате возникают два уравнения для нахождения вектора w . Еще одна пара уравнений появляется как условие разрешимости очередной задачи

$$L^0 U^2 = D_y A D_z^t U^1 + D_z A \{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\} \text{ в } \omega(z) \quad (2.20)$$

$$B^0 U^2 = -D_v A D_z^t U^1 - v_0 D_1 A \{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\} \text{ на } \partial\omega(z)$$

При учете соотношений (2.16), (2.18) и (2.15), а также (2.12), (2.13) имеем

$$\begin{aligned}
0 &= (e^i, D_z A\{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\})_{\omega(z)} - (e^i, v_0 D_1 A\{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\})_{\partial\omega(z)} = \\
&= \partial_z (D_y y_i e^3, D_1 A\{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\})_{\omega(z)} = \partial_z (e^i, D_1 A\{D_y^t U^1 + D_z^t U^0\})_{\omega(z)} = \\
&= \partial_z [(y_i e^3, D_z A\{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\omega(z)} - (y_i e^3, v_0 D_1 A\{D_y^t U^0 + D_z^t U^{-1}\})_{\partial\omega(z)}] = \\
&= -\partial_z^2 (y_i D_1^t e^3, A\{D_y^t X + Y\})_{\omega(z)} D(\partial_z) w(z) = 0, \quad i=1, 2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Возникшие в соотношениях (2.21) и (2.19) выражения $y_i D_1^t e^3$ и $D_1^t \Phi^i$ совпадают со столбцами матрицы Y . Поэтому система дифференциальных уравнений для определения w принимает вид

$$L(z, \partial_z) w(z) \equiv D(-\partial_z) M(z) D(\partial_z) w(z) = 0 \tag{2.22}$$

В силу соотношений (2.14) (4×4) -матрица M оказывается матрицей Грама, положительно определенной и симметрической,

$$M(z) = \int_{\omega(z)} Y^t A(D_y^t X + Y) dy = \int_{\omega(z)} (D_y^t X + Y)^t A(D_y^t X + Y) dy \tag{2.23}$$

3. Специальные решения. Можно убедиться, что система (2.22) имеет следующие решения:

$$W^q = e^q, \quad q=1, \dots, 4; \quad W^{4+i}(z) = ze^i, \quad i=1, 2 \tag{3.1}$$

Здесь $e^1, \dots, e^4$ – единичные векторы осей в $\mathbb{R}^4$. Согласно (2.10) и (2.12) при подстановке в формулу (2.1) столбцов (3.1) слагаемые $U^2, U^3, \dots$ исчезают (например, в (2.13) оператор $D(\partial_z)$ аннулирует $W^1, \dots, W^6$), а слагаемые (2.10) с W^q вместо w формируют жесткие смещения $\Phi^q(y, z)$, причем $\Phi^{6-i}(y, z) = e^i z - y_i e^3$ ($i=1, 2$).

Найдем еще шесть решений $T^1, \dots, T^6$, которым в дальнейшем придадим смысл сосредоточенных сил и моментов. Столбцы (3.1) объединим в (4×6) -матрицу W и введем еще одну матрицу

$$V = \begin{pmatrix} -z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (V^1, \dots, V^6) \tag{3.2}$$

Отметим, что W получается из V перестановкой крайних столбцов и сменой знаков.

Через T обозначим матрицу, удовлетворяющую равенству

$$M(z) D(\partial_z) T(z) = V(z) \tag{3.3}$$

Так как $M(z) = Z(z) M(1) Z(z)$, где $Z(z) = \text{diag}\{z^{2\gamma}, z^{2\gamma}, z^\gamma, z^{2\gamma}\}$, приходим к формулам

$$\begin{aligned}
T^j(z) &= D(\partial_z)^{-1} Z(z)^{-1} M(1)^{-1} Z(z)^{-1} V^j(z) \\
D(\partial_z)^{-1} &= \text{diag}\{\partial_z^{-1} \partial_z^{-1}, \partial_z^{-1} \partial_z^{-1}, \partial_z^{-1} \partial_z^{-1}\} \\
\partial_z^{-1} z^\tau &= (\tau+1)^{-1} z^{\tau+1} \quad \text{при } \tau \neq 1 \\
\partial_z^{-1} z^{-1} &= \ln z, \quad \partial_z^{-1} \ln z = z(\ln z - 1)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Заменяя в формулах (2.10), (2.13) столбец w на T^j , получаем в согласии с представлением (2.1) поля смещений Ψ^j , которые порождают в соотношениях (1.4) и (1.5) невязки, малые вблизи точки Q . Укажем степенные порядки компонент вектор-функций T^j . Используя звездочку для несущественных в данном контексте множителей, имеем

$$T^q(z) = (z^{\mu_q} *, z^{\mu_q} *, z^{\mu_q - 1 + \gamma} *, z^{\mu_q - 1} *) \tag{3.5}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 3 - 4\gamma, \quad \mu_3 = 2 - 3\gamma, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 2 - 4\gamma$$

4. Формула Грина и сосредоточенные воздействия. Справедлива следующая одномерная формула Грина:

$$\int_a^b \mathbf{v}^t(z) \mathbf{L}(z, \partial_z) \mathbf{w}(z) dz = 2\mathbf{E}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{W}(\partial_z)^t \mathbf{v}(z))^t \mathbf{N}(z, \partial_z) \mathbf{w}(z) \Big|_a^b \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_a^b (\mathbf{D}(\partial_z)^t \mathbf{v}(z))^t \mathbf{M}(z) \mathbf{D}(\partial_z)^t \mathbf{w}(z) dz$$

$$\mathbf{N}(z, \partial_z) = \mathbf{V}(\partial_z)^t \mathbf{M}(z) \mathbf{D}(\partial_z)^t$$

Обозначив $\mathbf{1}_m$ и $\mathbf{0}_m$ единичную и нулевую матрицы размером $m \times m$, непосредственными вычислениями проверяем равенства

$$\mathbf{N}(z, \partial_z) \mathbf{W}(z) = \mathbf{0}_6, \quad (\mathbf{W}(\partial_z)^t \mathbf{W}(z))^t \mathbf{N}(z, \partial_z) \mathbf{T}(z) = \mathbf{1}_6 \quad (4.2)$$

В рамках одномерной модели соотношения (4.2) означают, что решения T^1, T^2, T^3 и T^4, T^5, T^6 задают соответственно поперечные и продольную силы и крутящий и изгибающие моменты. Оказывается, что в несимметричном случае для аналогичного истолкования трехмерных полей необходима некоторая перестройка базиса $\{T^1, \dots, T^6\}$. Убедимся в этом, связав одномерную формулу Грина (4.1) с обычной, трехмерной. Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} I_{pq}(z) &= \int_{\omega(z)} \Phi^p(y, z) \sigma^{(3)}(\Psi^q; y, z) dy = \\ &= \int_{\omega(z)} \Phi^p(y, z) D_1 A D(\nabla)^t \Psi^q(y, z) dy, \quad p, q = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\Psi^q(y, z) = \Psi^{-2,q}(z) + \Psi^{-1,q}(y, z) + \Psi^{0,q}(y, z) + \Psi^{1,q}(y, z) \quad (4.4)$$

Трехмерные поля (4.4) определяются в соответствии с представлением (2.1) по решениям T^q . Именно $\Psi^{-2,q}, \Psi^{-1,q}$ и $\Psi^{0,q}$ заданы формулами (2.10) и (2.13), в которых w заменено на T^j , а $\Psi^{1,q}$ отыскивается из задачи (2.15) с $U^k = \Psi^{q,k}, k = -1, 0$.

Итак, для упомянутой интерпретации векторов $\Psi^1, \dots, \Psi^6$ должно выполняться равенство $I = \mathbf{1}_6 + o(1)$, где $I = (I_{pq})$ — матрица размером 6×6 , составленная из интегралов (4.3).

В силу формул (2.3) и (2.10), (2.12), (2.13), построенный по Ψ^q столбец деформаций принимает вид

$$\varepsilon(\Psi^q) \equiv D^t(\nabla) \Psi^q = A(D_y^t X + Y) D T^q + (D_y^t \Psi^{3,q} + D_z^t \Psi^{2,q}) + D_z^t \Psi^{3,q} \quad (4.5)$$

В соответствии с разложением (4.5) представим интеграл (4.3) как сумму $I_{pq}^0 + I_{pq}^1 + I_{pq}^2$ и вычислим ее члены.

Пусть сначала $p = 3, 4$. Согласно (4.5) имеем

$$I_{pq}^0(z) = \int_{\omega(z)} \Phi^p(y)^t D_1 A (D_y^t X(y, z) + Y(y)) dy D T^q(z)$$

$$I_{4q}^1 = O(z^{\gamma-1}), \quad I_{4q}^2 = O(z^{2\gamma-2}) \quad q = 3, 4$$

Порядки бесконечно малых I_{4q}^1 и I_{4q}^2 вычисляются на основании представлений (3.5) и неравенств

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_i^m \partial z^n} \Psi^{(p,q)}(y, z) \right| \leq c z^{\mu_q + p(\gamma-1) - m\gamma - n} \quad (4.6)$$

$$m, n = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим Y^p столбец матрицы Y . Так как $D_1^t \Phi^p(y) = Y^p(y) (p = 3, 4)$, формулы (2.23) и

(3.4) означают, что

$$I_{pq}^0(z) = (e^p)^t M(z) D(\partial_z) T^q(z) = (e^p)^t V^q(z) = \delta_{p,q} \quad (4.7)$$

$p = 3, 4; q = 1, \dots, 6$

Обратимся к случаю $p = 1, 2$. В силу (4.6) имеем $I_{pq}^2(z) = O(z^{\gamma-1}) (q = 1, 2)$ и $I_{p3}^2(z) = O(z^{2\gamma-2})$. Покажем, что $I_{pq}^0 = 0 (q = 1, \dots, 6)$. Так как $\Phi^p = e^p$, при учете соотношений (2.14) и (2.18) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\omega(z)} (e^p)^t D_1 A (D_y^t X + Y) dy &= \int_{\omega(z)} (D_y^t e^3 y_p)^t A (D_y^t X + Y) dy = \\ &= - \int_{\omega(z)} (y_p e^3)^t D_y A (D_y^t X + Y) dy + \int_{\partial\omega(z)} (y_p e^3)^t D_v A (D_y^t X + Y) ds_y = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Используя соотношения (2.15) и (2.16), (2.18), находим, что

$$\begin{aligned} I_{pq}^1(z) &= \int_{\omega(z)} (e^p)^t D_1 A H_q^1 dy = \int_{\omega(z)} (D_y^t e^3 y_p)^t A H_q^1 dy = \\ &= - \int_{\omega(z)} (y_p e^3)^t D_y A H_q^1 dy + \int_{\partial\omega(z)} (y_p e^3)^t D_v A H_q^1 ds_y = \\ &= \int_{\omega(z)} (y_p e^3)^t \partial_z D_1 A H_q^0 dy - \int_{\partial\omega(z)} (y_p e^3)^t v_0 D_1 A H_q^1 ds_y = \partial_z \int_{\omega(z)} (y_p e^3)^t D_1 A H_q^0 dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$H_q^1 = D_y^t \Psi^{(3,q)} + D_z^t \Psi^{(2,q)} H_q^0 = (D_y^t X + Y) D(\partial_z) T^q$$

Поскольку $y_p D_1^t e^3 = -(e^p)^t Y(y) = -Y^p$, имеем

$$I_{pq}^1(z) = -(e^p)^t \partial_z M(z) D(\partial_z) T^q(z), \quad p = 1, 2, \quad q = 1, \dots, 6 \quad (4.10)$$

Согласно соотношениям (3.3) и (3.2) столбцы $M(z) D(\partial_z) T^q(z)$ постоянным при $q = 3, \dots, 6$, и следовательно, $I_{pq} = 0$. В случае $q = 1, 2$ справедливы равенства

$$I_{pq}^1(z) = (e^p)^t \partial_z M(z) D(\partial_z) T^q(z) = (e^p)^t \partial_z z e^q = (e^p)^t e^q = \delta_{p,q}$$

Пусть теперь $p = 5, 6$. Используя соотношения (3.5), (4.6), обнаруживаем, что

$$I_{pq}^2(z) = O(z^{\gamma-1}), \quad q = 4, 5, 6; \quad I_{pq}^2(z) = O(z^\gamma), \quad q = 1, 2$$

$$I_{p3}^2(z) = O(z^{2\gamma-1}) I_{pq}^0(z) + I_{pq}^1(z) = \int_{\omega(z)} \{(e^i z -$$

$$-e^3 y_i)^t D_1 A H_0^q(z) - (e^3 y_i)^t D_1 A H_q^1(z)\} dz, \quad i = p-4$$

Учитывая равенство (4.8) и повторяя преобразования (4.9), получаем, что в силу соотношений (3.3) и (3.2) при $p = 5, 6$ выполняются равенства

$$I_{pq}^0(z) + I_{pq}^1(z) = -z(e^p)^t \partial_z M(z) D(\partial_z) T^q(z) + (e^p)^t M(z) D(\partial_z) T^q(z) \quad (4.11)$$

Итак, матрица I , составленная из интегралов (4.3), может быть с точностью до бесконечно малых $O(z^{\gamma-1})$ записана в форме

$$I = \begin{pmatrix} 1_3 + L & K \\ 0_3 & 1_3 \end{pmatrix}, \quad K = (K_{ij}'), \quad L = (L_{ij})$$

$$L_{3m} = I_{3m}^0, \quad L_{33} = L_{mj} = 0, \quad K_{ij} = I_{i,j+3}, \quad m = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, 3$$

При симметричном строении пика $K = L = 0_3$ и поэтому сами трехмерные поля $\Psi^1, \dots, \Psi^6$ допускают ту же механическую интерпретацию, что и $T^1, \dots, T^6$ (см. текст после

(4.2)). В случае ненулевых K и L необходимо обратить матрицу I и ввести новый базис

$$\begin{aligned} (\Psi_0^1, \Psi_0^2, \dots, \Psi_0^6) &= (\Psi^1, \dots, \Psi^6) I^{-1} = \\ &= (\Psi^1, \dots, \Psi^6) \begin{vmatrix} \mathbf{1}_3 - L & K(L - \mathbf{1}_3) \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Так как нижние блоки матрицы I^{-1} нулевые, векторы Ψ_0^{j+3} и Ψ^{j+3} не различаются ($j = 1, 2, 3$). Разности $\Psi_0^m - \Psi^m$ являются линейными комбинациями векторов $\Psi^3, \dots, \Psi^6$. Подсчет порядков (по z) коэффициентов комбинаций показывает, что возникающие добавки – бесконечно малые по сравнению с Ψ^m . То же верно и для разности $\Psi_0^3 - \Psi^3$, выражающейся Ψ^1, Ψ^2 и Ψ^4, Ψ^5, Ψ^6 . Таким образом, ортогонализация базиса (4.4) приводит к изменению только младших асимптотических слагаемых.

5. Конкретные формулы. Пусть изотропное (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$) тело (1.1) образовано вращением дуги окружности радиусом d вокруг касательной, т.е. после отбрасывания бесконечно малых $o(z^2)$ получаем

$$Y(z) = 0, \quad \gamma = 2, \quad \omega = \{y \in \mathbf{R}^2 : |y| < d^{-1}\}$$

Считаем, что $d = 1$. В этом случае матрицы A , X и M задаются равенствами

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 2\mu \mathbf{1}_3 + \lambda U_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & 2\mu \mathbf{1}_3 \end{vmatrix} \\ X(y) &= \tau \begin{vmatrix} \alpha^2(y_1^2 - y_2^2) & y_1 y_2 & -y_1 & 0 \\ y_1 y_2 & \alpha^2(y_2^2 - y_1^2) & -y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ M &= \text{diag} \left\{ \frac{\pi}{4} E, \frac{\pi}{4} E, 2\pi E, \frac{\pi}{4} \mu \right\}, \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

При этом v и E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга, U_3 – (3×3) -матрица, целиком составленная из единиц. Полиномиальные решения (3.4) результирующей задачи (2.22) имеют вид

$$T^i(z) = -\pi^{-1} \beta_2^{-1} \beta_3^{-1} E^{-1} z^{\beta_3} e^i$$

$$T^{4+i}(z) = \pi^{-1} \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} E^{-1} z^{\beta_2} e^i, \quad i = 1, 2$$

$$T^3(z) = \frac{1}{8} \pi^{-1} \beta_2^{-1} E^{-1} z^{\beta_2/2} e^3, \quad T^4(z) = 2\pi^{-1} \beta_1^{-1} \mu^{-1} z^{\beta_1} e^4$$

$$\beta_k = k - 4\gamma, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Благодаря симметрии трехмерные поля $\Psi^1, \dots, \Psi^6$ определяются формулой (4.4), т.е. матрица I^{-1} в (4.12) единичная. Итак, сингулярные решения, порожденные единичными перерезывающими силами, определяются так:

$$\begin{aligned} \Psi^5(y, z) &= \pi^{-1} E^{-1} (e^1 (\beta_1^{-1} \beta_2^{-1} z^{\beta_2} + \alpha^2 (y_1^2 - y_2^2) z^{\beta_0}) + e^2 y_1 y_2 z^{\beta_0}) \\ \Psi^6(y, z) &= \pi^{-1} E^{-1} (e^1 y_1 y_2 z^{\beta_0} + e^2 (\beta_1^{-1} \beta_2^{-1} z^{\beta_2} + \alpha^2 (y_2^2 - y_1^2) z^{\beta_0})) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Особенности $O(z^{1-3\gamma})$, отвечающие крутящему и изгибающим моментам, слабее, чем особенности $O(z^{2-4\gamma})$ векторов Ψ^5 и Ψ^6 , а именно,

$$\Psi^4(y, z) = -2\pi^{-1} \mu^{-1} \beta_1^{-1} \alpha (e^1 y_2 z^{\beta_1} - e^2 y_1 z^{\beta_1})$$

$$\Psi^1(y, z) = -2\pi^{-1} E^{-1} (e^1 (\beta_2^{-1} \beta_3^{-1} z^{\beta_3} + \alpha^2 (y_1^2 - y_2^2) z^{\beta_1}) + e^2 y_1 y_2 z^{\beta_1}) \quad (5.2)$$

$$\Psi^2(y, z) = -2\pi^{-1} E^{-1} (e^1 y_1 y_2 z^{\beta_1} + e^2 (\beta_2^{-1} \beta_3^{-1} z^{\beta_3} + \alpha^2 (y_1^2 - y_2^2) z^{\beta_1}))$$

Наконец, наименьший показатель сингулярности $1 - 2\gamma$ связывается с продольной силой

$$\Psi^3(y, z) = -\frac{1}{8} \pi^{-1} E^{-1} (e^1 y_1 z^{-1+\beta_2/2} + e^2 y_1 z^{-1+\beta_2/2-1} - e^3 2\beta_2^{-1} z^{\beta_0/2}) \quad (5.3)$$

Сравнение особенностей проведено по порядкам смещений при $z \rightarrow 0$. Напряжения и деформации составляют $O(z^{-2\gamma-1})$ для всех моментов и $O(z^{-2\gamma})$ для всех сил, т.е. в этом смысле продольная и поперечные силы уравниваются. Впрочем, показатели $-2\gamma - 1$ и -2γ могут быть найдены при помощи более простых соображений и не требуют полного изучения структуры упругих решений.

Итак, особенность поля смещений вблизи вершины симметричного изотропного пика описывается линейной комбинацией вектор-функций (5.1)–(5.3). Столь же простые соотношения получаются и для произвольного, несимметричного или анизотропного, пика, если известна матрица $\mathbf{M}$ из системы дифференциальных уравнений (2.22). Вычисление матрицы $\mathbf{M}(z) = \mathbf{Z}(z) \mathbf{M}$ (1) согласно интегральному представлению (2.23) – единственный момент в асимптотической процедуре, требующий решения двумерной задачи теории упругости (2.14) на сечении $\omega = \omega(1)$. После этого явные формулы (3.4) дают векторы $T^1, \dots, T^6$, зависящие от переменной z . Замена столбца ω на T^j в выражениях (2.10)–(2.13) и представление (2.1) для трехмерного поля приводит к аналогичным (5.1)–(5.3) сингулярным решениям $\Psi^1, \dots, \Psi^6$. Окончательная перенормировка (4.12) этих решений придает им тот же физический смысл, что и в изотропном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00974).

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
2. Grisvard P. Singularities in boundary value problems. Paris: Moson; Berlin: Springer, 1992. 198 p.
3. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. 414 p.
4. Costabel M., Dauge M. Computation of corner singularities in linear elasticity // Lecture Notes in Pure Applied Mathematics. N. g.: Dekker, 1994. V. 167. P. 59–68.
5. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 155–163.
6. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи пространственного пикообразного включения // Механика композитных материалов. 1985. № 5. С. 792–800.
7. Nazarov S.A. Asymptotics of the solution to the Neumann problem in a domain with singular point of peak exterior type // Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 217–250.
8. Назаров С.А., Полякова О.Р. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи пространственной особенности границы типа "вершины клюва" // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 127–142.
9. Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
10. Назаров С.А. Асимптотика решения задачи Неймана в точке касания гладких компонент границы области // Известия РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 1. С. 92–120.
11. Назаров С.А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы мат. анализа. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1997. Вып. 16. С. 167–192.
12. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36.

- № 5. С. 1080–1113; Письмо в редакцию // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 3. С. 709–710.
13. *Пламеневский Б.А.* Об асимптотическом поведении решений квазиэллиптических дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 6. С. 1332–1375.
14. *Козлов В.А., Мазья В.Г.* Оценки в L_p -средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. I. Случай модельного оператора // Seminar Analysis Operator Equations and Numerical Analysis 1985/86. Berlin: Karl-Weierstrass-Institut für Math. Acad. Wiss. DDR, 1986. S. 55–91.
15. *Козлов В.А., Мазья В.Г.* Оценки в L_p -средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Math. Nachr. 1988. Bd. 137. S. 113–139.
16. *Назаров С.А., Пилецкас К.И.* Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале // Лит. мат. сб. 1990. Т. 30. № 4. С. 772–783.

Санкт-Петербург
e-mail: serna@snark.ipme.ru
andr@as2607.spb.edu

Поступила в редакцию
25.I.1999