

УДК 539.3

© 1999 г. И.И. Аргатов

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Методом сращиваемых асимптотических разложений выписывается асимптотика вектор-функции Грина с полюсом на границе. Полученное разложение используется при построении асимптотики контактного давления. Выводятся уравнения контактной задачи с уточняющими интегральными поправками, учитывающими характер закрепления и геометрию упругого тела. Даны примеры вычислений для эллиптического штампа.

Ранее асимптотические (методом "больших  $\lambda$ " [1]) решения контактной задачи строились для полубесконечных упругих тел, таких как слой (см. [2] и др.) и клин [3]. Была изучена [4] осесимметричная задача о вдавлении штампа в торец полубесконечного цилиндра.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругое тело  $\Omega$ , граница которого содержит плоский участок  $\Sigma$ , расположенный в плоскости  $Ox_1x_2$  (фигура). Предположим для простоты, что тело  $\Omega$  целиком принадлежит полупространству  $x_3 > 0$  и пусть  $l$  – радиус наибольшего помещающегося в  $\Omega$  полушара с центром в точке  $O$ . Пусть  $\omega$  – плоская фигура, содержащаяся в круге радиусом  $l$ . Считаем  $\varepsilon > 0$  малым параметром и через  $\omega(\varepsilon)$  обозначаем фигуру, полученную из  $\omega$  сжатием в  $\varepsilon^{-1}$  раз. Вектор  $u = (u_1, u_2, u_3)$  смещений точек тела  $\Omega$  под действием штампа с основанием  $\omega(\varepsilon)$ , давящего без трения на плоский участок  $\Sigma$ , удовлетворяет задаче

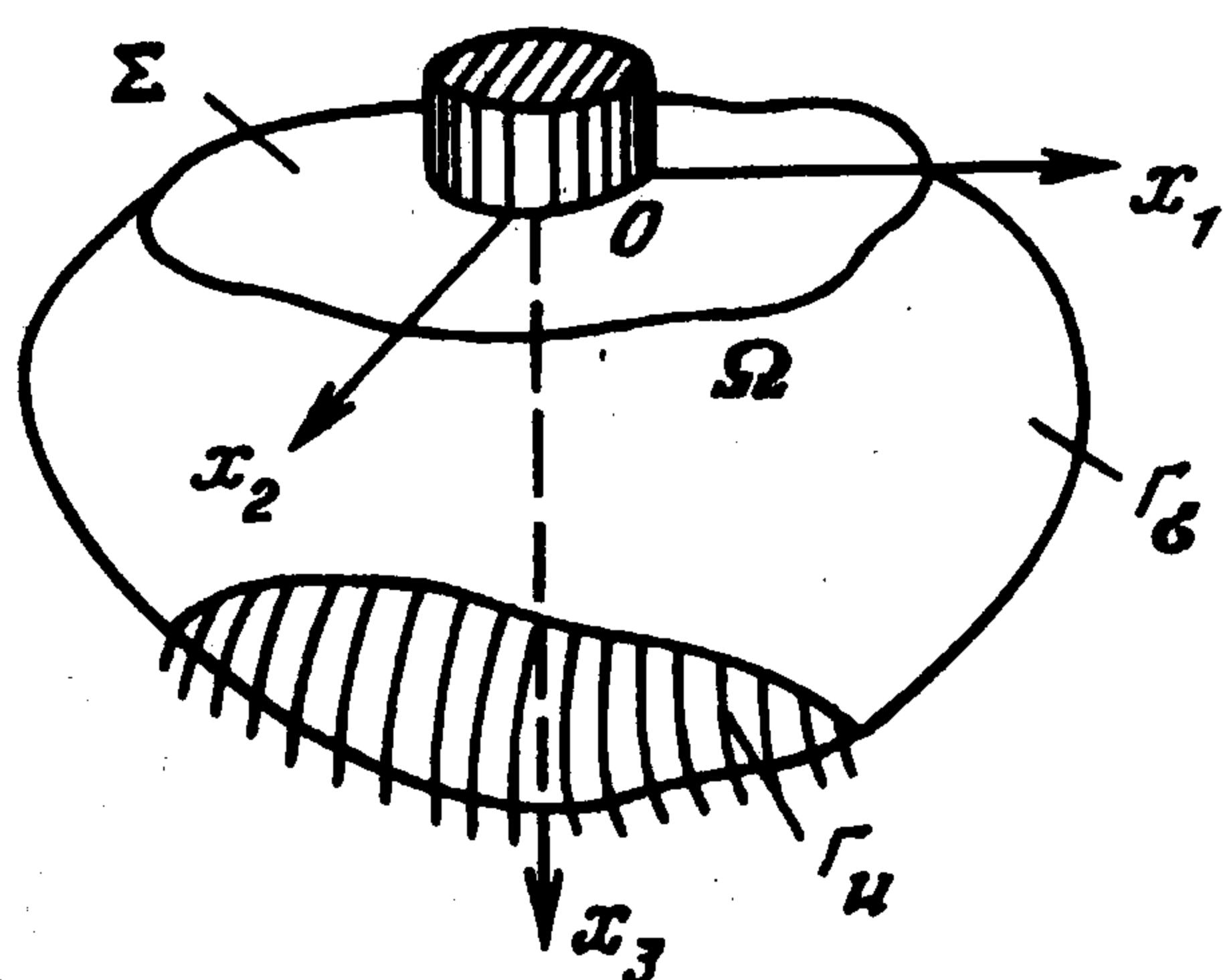
$$\mu \nabla_x \cdot \nabla_x u(\varepsilon; x) + (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u(\varepsilon; x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\sigma_{31}(u; x) = \sigma_{32}(u; x) = 0, \quad x \in \Sigma \quad (1.2)$$

$$\sigma_{33}(u; x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad x' = (x_1, x_2) \notin \omega(\varepsilon) \quad (1.3)$$

$$u_3(\varepsilon; x', 0) = \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1, \quad x' \in \omega(\varepsilon) \quad (1.4)$$

$$\sigma^{(n)}(u; x) = 0, \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad u(\varepsilon; x) = 0, \quad x \in \Gamma_u \quad (1.5)$$



Здесь  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $\sigma_{3k}(u)$  – напряжения,  $\sigma^{(n)}$  – вектор напряжений на площадке с нормалью  $n$ ;  $\delta_0$  – вертикальное перемещение центра подошвы штампа,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы поворота штампа относительно координатных осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Предполагается, что тело закреплено на участке  $\Gamma_u$ , а на  $\Gamma_\sigma$  и  $\Sigma$  вне области контакта свободно от напряжений.

**2. Интегральное уравнение для определения контактного давления.** Обозначим через

$G(y; x)$  вектор-функцию Грина с полюсом в точке  $P(y_1, y_2, 0)$ , удовлетворяющую уравнению (1.1), условиям (1.5) и следующим соотношениям:

$$\sigma_{3k}(G, x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad x \in \Sigma \setminus P \quad (2.1)$$

$$G(y; x) = T(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3) + O(1), \quad x \rightarrow P \quad (2.2)$$

Здесь  $T$  – решение задачи Буссинеска (см., например, [5]) о нагружении упругого полупространства единичной сосредоточенной силой, ориентированной вдоль оси  $Ox_3$ , причем

$$4\pi\mu T_i(x) = x_i x_3 |x|^{-3} - (1 - 2\nu)x_i |x|^{-1} (|x| + x_3)^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

$$4\pi\mu T_3(x) = x_3^2 |x|^{-3} + 2(1 - \nu)|x|^{-1}; \quad |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

Известно (см., например, [6, 7]), что при помощи вектор-функции Грина задача определения контактного давления сводится к интегральному уравнению

$$\iint_{\omega(\epsilon)} G_3(y; x_1, x_2, 0) p(y) dy = \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1 \quad (2.4)$$

Используя представление

$$G(y; x) = T(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3) + g(y; x) \quad (2.5)$$

где  $g(y; x)$  – регулярная вектор-функция, уравнение (2.4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\omega(\epsilon)} \frac{p(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} = \\ = \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1 - \iint_{\omega(\epsilon)} g_3(y; x_1, x_2, 0) p(y) dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. О свойствах решений уравнения (2.6) см. [6], § 51 и [8], § 1.2.

**3. Асимптотика вектор-функции Грина.** Пусть  $g(x)$  – регулярная составляющая вектор-функции Грина  $G(O; x)$  с полюсом в начале координат, аннулирующая невязку  $T(x)$  в краевых условиях (1.5) и (1.6), т.е.

$$\sigma^{(n)}(g; x) = -\sigma^{(n)}(T; x), \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad g(x) = -T(x), \quad x \in \Gamma_\mu$$

Так как  $g$  в окрестности точки  $O$  удовлетворяет однородным уравнению (1.1) и краевому условию (2.1), то ее ряд Маклорена

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^6 g_{1,k} V^{1,k}(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{3(m+1)} g_{m,k} V^{m,k}(x) \quad (3.1)$$

вообще говоря, будет содержать  $3(m+1)$  векторный однородный полином  $V^{m,k}(x)$  степени  $m$  (см. [9], гл. 13; [10], разд. 5.3). На границе нормальная составляющая вектора  $g(x)$  оставляет след

$$\frac{2\pi\mu}{1 - \nu} g_3(x_1, x_2, 0) = A_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + C_{11} x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + C_{22} x_2^2 + \dots \quad (3.2)$$

*Замечание.* Для  $m = 1$  и  $m = 2$  вектор-функции  $V^{m,k}$  могут быть выбраны такими:

$$V^{1,1} = -x_3 e_2 + x_2 e_3, \quad V^{1,2} = x_3 e_1 - x_1 e_3, \quad V^{1,3} = -x_2 e_1 + x_1 e_2$$

$$V^{1,4} = x_2 e_1 + x_1 e_2, \quad V^{1,5} = x_1 e_1 - \alpha x_3 e_3, \quad V^{1,6} = x_2 e_2 - \alpha x_3 e_3$$

$$\begin{aligned}
V^{2,1} &= -2x_1x_3e_1 + (x_1^2 + \alpha x_3^2)e_3, & V^{2,2} &= -x_2x_3e_1 - x_1x_3e_2 + x_1x_2e_3 \\
V^{2,3} &= -2x_2x_3e_2 + (x_2^2 + \alpha x_3^2)e_3, & V^{2,4} &= [x_1^2 - (2 + \alpha)x_3^2]e_1 - 2\alpha x_1x_3e_3 \\
V^{2,5} &= x_1x_2e_1 - 2^{-1}(1 + \alpha)x_3^2e_2 - \alpha x_2x_3e_3, & V^{2,6} &= (x_2^2 - x_3^2)e_1 \\
V^{2,7} &= (x_1^2 - x_3^2)e_2, & V^{2,8} &= -2^{-1}(1 + \alpha)x_3^2e_1 + x_1x_2e_2 - \alpha x_1x_3e_3 \\
V^{2,9} &= [x_2^2 - (2 + \alpha)x_3^2]e_2 - 2\alpha x_2x_3e_3; & \alpha &\equiv v(1 - v)^{-1}
\end{aligned}$$

Коэффициенты, выписанные в правой части (3.2), равны соответственно постоянным  $g_3(0)$ ,  $-g_{1,2}$ ,  $g_{1,1}$ ,  $g_{2,1}$ ,  $2^{-1}g_{2,2}$ ,  $g_{2,3}$ , умноженным на  $\pi E(1 - v^2)^{-1}$ . Пусть  $L$  — размерность длины. Тогда размерности величин  $A_0$ ,  $B_i$  и  $C_{ij}$  соответственно равны  $L^{-1}$ ,  $L^{-2}$  и  $L^{-3}$ . Если  $Ox_3$  — ось симметрии тела  $\Omega$ , причем участки его границы, на которых заданы краевые условия (1.5), (1.6), также осесимметричны, то

$$g_{1,1} = \dots = g_{1,4}, \quad g_{1,5} = g_{1,6}, \quad g_{2,1} = g_{2,3}, \quad g_{2,2} = 0, \quad g_{2,4} = \dots = g_{2,9}$$

Вектор-функция Грина  $G$  дает решение задачи о действии на границу  $\Omega$  сосредоточенной силы. Введем еще решения  $G^{(i)}$  и  $G^{(m,n)}$  задачи о нагружении тела  $\Omega$  в точке  $O$  сосредоточенными моментами и полимоментами, удовлетворяющие уравнению (1.1), условиям (2.1), (1.5) и следующим соотношениям:

$$G^{(i)}(x) = S^{(i)}(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0; \quad G^{(m,n)}(x) = S^{(m,n)}(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0$$

$$S^{(1)}(x) = -\frac{\partial T(x)}{\partial x_2}, \quad S^{(2)}(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x_1}, \quad S^{(m,n)}(x) = \frac{\partial^m T(x)}{\partial x_1^{m-n} \partial x_2^n}$$

Здесь  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  — решения задачи о нагружении упругого полупространства единичным сосредоточенным моментом (индекс указывает направление вектора интенсивности). Для  $G^{(i)}$  и  $G^{(m,n)}$  верны представления вида (2.5) и разложения, аналогичные (3.1), (3.2).

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [11]; [12], гл. 3, § 1) и выпишем асимптотику регулярной составляющей  $g(\varepsilon\eta; x)$  вектор-функции Грина  $G(\varepsilon\eta; x)$  при малых значениях параметра  $\varepsilon$ . В окрестности начала отсчета введем "растянутые" координаты

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad \xi_i = \varepsilon^{-1}x_i \quad (3.3)$$

Согласно (2.3) имеем

$$T(x_1 - \varepsilon\eta_1, x_2 - \varepsilon\eta_2, x_3) = \varepsilon^{-1}T(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3)$$

Используя разложение

$$T(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3) = T(\xi) - \sum_{i=1}^2 \eta_i \frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi_i} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n=0}^m C_m^n \eta_1^{m-n} \eta_2^n \frac{\partial^m T(\xi)}{\partial \xi_1^{m-n} \partial \xi_2^n} \quad (3.4)$$

справедливое при достаточно больших  $|\xi|$ , устанавливаем асимптотическое разложение

$$g(\varepsilon\eta; x) = g(x) + \varepsilon[\eta_2 g^{(1)}(x) - \eta_1 g^{(2)}(x)] + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^2 2^{-1} C_2^n \eta_1^{2-n} \eta_2^n g^{(2,n)}(x) + \dots \quad (3.5)$$

Здесь  $g^{(i)}$  и  $g^{(m,n)}$  — регулярные составляющие сингулярных вектор-функций  $G^{(i)}$  и  $G^{(m,n)}$ . Очередные члены справа в (3.5) находятся с помощью разложения (3.4). Заметим, что данный результат нетрудно получить и методом составных асимптотических разложений [13, 14].

Избавляясь от присутствия параметра  $\varepsilon$ , перепишем (3.5) в виде

$$g(y; x) = g(x) - y_1 g^{(2)}(x) + y_2 g^{(1)}(x) + \sum_{n=0}^2 2^{-1} C_2^n y_1^{2-n} y_2^n g^{(2,n)}(x) + \dots \quad (3.6)$$

**4. Асимптотика контактного давления.** Введем в уравнение (2.6) растянутые координаты (3.3) и в интегралах осуществим замену переменных  $y_i = \varepsilon \eta_i$  ( $i = 1, 2$ ). При этом из уравнения границы области интегрирования исчезает параметр  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\omega} \frac{\varepsilon p(\varepsilon \eta_1, \varepsilon \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = \\ = \delta_0 + \varepsilon(\beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1) - \varepsilon \iint_{\omega} g_3(\varepsilon \eta; \varepsilon \xi_1, \varepsilon \xi_2, 0) \varepsilon p(\varepsilon \eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (4.1) для контактного давления  $p(x_1, x_2) \equiv -\sigma_{33}(u; x_1, x_2, 0)$  вытекает разложение

$$p(x_1, x_2) = \varepsilon^{-1} p^0(\xi_1, \xi_2) + p^1(\xi_1, \xi_2) + \dots \quad (4.2)$$

Соответственно для равнодействующей и моментов системы нагрузок, действующих на штамп, имеем

$$F_3 = \varepsilon F_3^0 + \varepsilon^2 F_3^1 + \dots; \quad M_i = \varepsilon^2 M_i^0 + \varepsilon^3 M_i^1 + \dots, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Заменим ядро интегрального оператора в правой части уравнения (4.1) разложением (3.5), затем используем разложения типа (3.2) и учтем замену переменных (3.3). В полученное соотношение подставим ряд (4.2), приравняем члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  и придем к уравнениям

$$(Bp^0)(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\omega} \frac{p^0(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = \delta_0 \quad (4.4)$$

$$(Bp^1)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 A_0 + \beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1 \quad (4.5)$$

$$(Bp^2)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^0 A_0^{(i)} - \tilde{F}_3^1 A_0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} (Bp^3)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 (C_{11} \xi_1^2 + 2C_{12} \xi_1 \xi_2 + C_{22} \xi_2^2) - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^0 (B_1^{(i)} \xi_1 + B_2^{(i)} \xi_2) - \\ - \tilde{F}_3^1 (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) - \sum_{n=0}^2 \tilde{M}_{2,n}^0 A_0^{(2,n)} - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^1 A_0^{(i)} - \tilde{F}_3^2 A_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Коэффициенты  $\tilde{F}_3^r$ ,  $\tilde{M}_i^r$  и  $\tilde{M}_{2,n}^r$  равны умноженным на  $(\pi E)^{-1}(1 - \nu^2)$  величинам  $F_3^r$ ,  $M_i^r$  и  $M_{2,n}^r$ , вычисляемым по формулам

$$F_3^r = \iint_{\omega} p^r(\eta) d\eta, \quad \begin{cases} M_1^r \\ M_2^r \end{cases} = \iint_{\omega} \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{Bmatrix} p^r(\eta) d\eta$$

$$M_{m,n}^r = \frac{(-1)^m}{m!} C_m^n \iint_{\omega} \eta_1^{m-n} \eta_2^n p^r(\eta) d\eta, \quad m = 2, 3, \dots$$

Постоянные  $A_0^{(i)}$ ,  $B_k^{(i)}$  ( $i, k = 1, 2$ ) и  $A_0^{(2,n)}$  ( $n = 0, 1, 2$ ) представляют собой коэффициенты в асимптотическом разложении (аналогичном (3.2)) ортогональной к границе компоненты регулярной составляющей векторов  $G^{(i)}$  и  $G^{(2,n)}$  соответственно.

Величины  $A_0^{(i)}$  и  $B_k^{(i)}$ ,  $A_0^{(2,n)}$  имеют размерности, равные  $L^{-2}$  и  $L^{-3}$ . Они зависят, вообще говоря, от постоянной Пуассона и определяются формой, размерами тела  $\Omega$  и условиями его закрепления.

Таким образом, задача построения асимптотики контактного давления сведена к рекуррентной последовательности уравнений (4.4)–(4.7) и т.д. для членов ряда (4.2). В частном случае такой результат впервые был получен в [2] (см. также [6], § 53).

**5. Давление под эллиптическим штампом.** Пусть фигура  $\omega(\varepsilon)$  ограничена эллипсом  $x_1^2 + x_2^2(1-e^2)^{-1} = a_e^2$ , где  $e$  – эксцентриситет,  $a_e = \varepsilon A$  – большая полуось. Тогда, используя решения [15], на основании (4.4)–(4.6) трехчленное асимптотическое представление (4.2) получаем в виде (вернулись к реальному масштабу)

$$p(x_1, x_2) \approx \frac{E}{2(1-\nu^2)a\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)}\right)^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{\delta_0}{K(e)} - \frac{aA_0}{K(e)}\delta_0 - \frac{\beta_2 x_1}{D(e)} + \frac{\beta_1 x_2}{B(e)} + \left(\frac{aA_0}{K(e)}\right)^2 \delta_0 - \frac{a\delta_0}{K(e)} \left[ \frac{B_1 x_1}{D(e)} + \frac{B_2 x_2}{B(e)} \right] \right\} \quad (5.1)$$

$$D(e) = e^{-2}[K(e) - E(e)], \quad B(e) = K(e) - D(e)$$

Здесь  $K$  и  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. При этом значения коэффициентов в правой части уравнения (4.6) таковы:

$$\tilde{F}_3^0 = AK(e)^{-1}\delta_0, \quad \tilde{M}_1^0 = \tilde{M}_2^0 = 0 \\ \tilde{M}_{2,0}^0 = A^3[6K(e)]^{-1}\delta_0, \quad \tilde{M}_{2,1}^0 = 0, \quad \tilde{M}_{2,2}^0 = \tilde{M}_{2,0}^0(1-e^2) \quad (5.2)$$

$$\tilde{F}_3^1 = -A^2K(e)^{-2}A_0\delta_0, \quad \tilde{M}_1^1 = A^3(1-e^2)[3B(e)]^{-1}\beta_1$$

$$\tilde{M}_2^1 = A^3[D(e)]^{-1}\beta_2; \quad \tilde{F}_3^2 = A^3K(e)^{-3}A_0^2\delta_0$$

Данный пример показывает, что вычисление первых членов асимптотики несколько упрощается, если начало координат совпадает с так называемым [16] центром давления основания штампа. В этом случае  $M_1^0 = M_2^0 = 0$ .

*Замечание.* Нетрудно выписать и решение уравнения (4.7) (см. [2, 6, 8, 15, 17]). При этом решение уравнения  $(Bp)(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2$  может быть получено на основании результатов [15] (см. гл. 5, § 8) в виде

$$p(\xi_1, \xi_2) = \frac{E}{2(1-\nu^2)A\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \frac{\xi_1^2}{A^2} - \frac{\xi_2^2}{A^2(1-e^2)}\right)^{-1/2} \frac{\xi_1\xi_2}{D(e) - C(e)}$$

$$C(e) = e^{-2}[D(e) - B(e)]$$

**6. Уравнение контактной задачи для тела конечных размеров.** Используя разложение (3.6), найдем

$$\iint_{\omega(\varepsilon)} g_3(y; x_1, x_2, 0) p(y) dy = F_3 g_3(x_1, x_2, 0) + \\ + \sum_{i=1}^2 M_i g_3^{(i)}(x_1, x_2, 0) + \sum_{n=0}^2 M_{2,n} g_3^{(2,n)}(x_1, x_2, 0) + \dots$$

Преобразуем предыдущее соотношение с учетом разложений типа (3.2), принимая во внимание распределение величин  $F_3, M_i, M_{2,n} \dots$  по степеням параметра  $\varepsilon$  (см. (4.3)).

Имеем

$$\iint_{\omega(\varepsilon)} g_3(y; x_1, x_2, 0) p(y) dy = \tilde{F}_3 A_0 + \tilde{F}_3 (B_1 x_1 + B_2 x_2) + \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i A_0^{(i)} + \\ + \tilde{F}_3 (C_{11} x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + C_{22} x_2^2) + \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i (B_1^{(i)} x_1 + B_2^{(i)} x_2) + \sum_{n=0}^2 \tilde{M}_{2,n} A_0^{(2,n)} + \dots \quad (6.1)$$

Ясно, что подстановка разложения (4.1) в (6.1) приводит к уравнениям (4.4)–(4.7). С другой стороны, удерживая в соотношении (6.1) конечное число слагаемых, получаем одно "связанное" уравнение, решение которого сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Отметим, что метод сведения интегрального уравнения контактной задачи (2.6) к приближенному путем полиномиальной аппроксимации ядра интегрального оператора в его правой части был предложен ранее [18] (см. также [6], § 54).

*Пример.* Ограничимся в правой части равенства (6.1) только первым слагаемым. Решение уравнения

$$(Bp)(x_1, x_2) = \delta_0 - F_3 A_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1$$

отличается от (5.1) тем, что выражение в фигурных скобках заменяется на

$$\frac{\delta_0 - F_3 A_0}{K(e)} - \frac{\beta_2 x_1}{D(e)} + \frac{\beta_1 x_2}{B(e)}$$

Подставляя это решение в уравнение равновесия штампа, найдем

$$F_3 = \frac{a\delta_0}{K(e)} \left( 1 + \frac{aA_0}{K(e)} \right)^{-1}$$

что дает три верных члена асимптотического разложения величины  $F_3$  (см. (5.2)). Данный эффект отмечался ранее [19].

Работа выполнена при финансовой поддержке Администрации Санкт-Петербурга (М98-2.2П-36).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.
2. Александров В.М., Ворович И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323–333.
3. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
4. Бородачев Н.М. О вдавливании штампа в торец полубесконечного упругого цилиндра // Прикл. механика. 1967. Т. 3. № 9. С. 83–89.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. Кравчук А.С. Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 283–288.
8. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
9. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
10. Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Низаров С.А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10. № 4. С. 3–91.

11. *Van Dyke M.D.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York: Academic Press, 1964. = *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
14. *Назаров С.А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
15. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
16. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
17. *Довнорович В.И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1959. 107 с.
18. *Александров В.М.* Некоторые контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 758–764.
19. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. Моск. мат. об-ва. 1996. Т. 57. С. 16–75.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
1.XII.1998