

9. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 352 с.
10. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М.: Гостехтеориздат, 1953. 386 с.
11. Савченко А.Я., Игнатъев А.О. Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 204 с.
12. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
13. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N.Y.: Springer, 1977. = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
14. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707–713.
15. Shell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. Pt 1; 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. № 2. P. 241–283.

Донецк

Поступила в редакцию
19.V.1998

УДК 531.38

© 1999 г. Дружинин Э.И.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ УРАВНОВЕШЕННОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Исследуются перманентные вращения гиростата вокруг его закрепленного центра тяжести. Предполагается, что линия действия переменного во времени вектора гиростатического момента сохраняет постоянное положение в связанной с несущим телом системе координат. Показано, что в этом случае при отличном от нуля суммарном кинетическом моменте гиростата его перманентные вращения могут происходить лишь вокруг его главных осей инерции. При этом вектор гиростатического момента должен быть коллинеарен одной из главных осей инерции гиростата.

Рассмотрим гиростат с закрепленным центром тяжести и не подверженный действию внешних сил. Пусть переменный во времени вектор $\mathbf{k}$ – момент количеств движения носимых тел гиростата в их движении относительно несущего тела (в дальнейшем гиростатический момент) – имеет линию действия, неизменно расположенную в связанной с несущим телом системе координат (ССК). Такая постановка характерна, например, для задачи анализа динамических эффектов при изучении режима аварийной закрутки стационарного спутника связи, снабженного в качестве исполнительного органа трехстепенным гироскопом с управляемым маховиком (в режиме закрутки рамки гироскопа выставлены на упоры). Итак, $\mathbf{k} = k(t)\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ – неподвижный в ССК орт, а $k(t)$ – некоторая заданная функция времени, непрерывная и ограниченная для всех $t \in R$.

Уравнение движения гиростата в векторной форме в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0 \quad (1)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}$ – суммарный момент количеств движения гиростата, $\mathbf{I}$ – тензор инерции гиростата как твердого тела для точки закрепления, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости гиростата. Точка над вектором $\mathbf{K}$ означает производную по времени в ССК (относительную производную).

Выпишем первый интеграл уравнения (1)

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k} = \text{const} \quad (2)$$

Как известно, перманентными осями вращения твердого тела ($k(t) \equiv 0$), закрепленного в центре тяжести, могут быть лишь его главные оси инерции. Для уравновешенного гиростата с постоянным вектором гиросtatического момента ($k(t) \equiv \text{const}$) перманентной осью может служить любая образующая конуса $(I_n \times n, k) = 0$, где n – орт перманентной оси вращения в ССК (см., например, [1]).

Можно ожидать, то для уравновешенного гиростата с переменным гиросtatическим моментом получим более богатое множество его перманентных вращений (так, при возможности реализовать произвольную вектор-функцию $k(t)$, за счет ее выбора можно осуществить любое заданное перманентное вращение гиростата [2]). Однако для случая переменного гиросtatического момента с постоянным в ССК направлением его линии действия при $K = K_0 \neq 0$ имеет место следующий факт.

Теорема. При отличном от нуля суммарном кинетическом моменте перманентные вращения уравновешенного гиростата с переменным гиросtatическим моментом, линия действия которого занимает неизменное положение в связанной с несущим телом системе координат, возможны только вокруг его главных осей инерции.

Доказательство. Представим угловую скорость вращения гиростата в виде $\omega = \omega n$, где n – скат перманентной оси вращения.

Поскольку выполняется условие $(I_n, n) > 0$, вектор I_n не перпендикулярен орту оси вращения n и поэтому плоскость, проходящая через неподвижные в ССК векторы I_n и I , будет поворачиваться при перманентном вращении гиростата вокруг неперпендикулярной к ней оси n , и, следовательно, будет менять свое положение в инерциальной системе координат (ИСК). В силу разложения

$$K = \omega \cdot I_n + k(t)I \quad (3)$$

постоянный в ИСК вектор $K = K_0$ должен принадлежать этой плоскости во все время вращения гиростата. При указанных обстоятельствах движения плоскости это возможно лишь в случае, если вектор K сам будет осью ее вращения, т.е. в случае коллинеарности векторов K и n .

Таким образом, для осуществления перманентного вращения необходимо $K = \lambda_1 n$. При этом из (1) следует, что $K = 0$, т.е. вектор кинетического момента гиростата при перманентном вращении будет постоянен и в ИСК, и в ССК.

Из постоянства вектора K в ССК и разложения (3) следует, что при переменной величине гиросtatического момента перманентное вращение может происходить лишь с переменной величиной угловой скорости $\omega = \omega(t)$. Поэтому разложение (3) постоянного в ССК вектора K по постоянным в этой же системе координат направлениям векторов I_n и I при переменных компонентах $\omega(t)$ и $k(t)$ возможно только в случае совпадения этих направлений, т.е. при $I = \lambda_2 I_n$. Следовательно, (см. (3)) при перманентном вращении необходимо выполняется равенство $K = \lambda_3 I_n$. С другой стороны, имеем $K = \lambda_1 n$. Итак, для осуществления перманентного вращения необходимо: $I_n = \lambda n$ (λ – скаляр), т.е. вектор n – собственный вектор тензора инерции I .

Следствие. Из доказательства теоремы следует, что $I = \lambda_0 n$. Таким образом, перманентное вращение гиростата с постоянным направлением линии действия вектора гиросtatического момента возможно только в случае, когда вектор гиросtatического момента коллинеарен одной из главных осей инерции гиростата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гиростатов // ППМ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
2. Кейс И.А. О существовании некоторых интегралов уравнений движения гиростата, закрепленного в одной точке // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1963. № 6. С. 55–63.

Иркутск

Поступила в редакцию
31.III.1999