

УДК 531.36

© 1999 г. А.А. Игнатьев

ОБ ЭКВИАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается система уравнений возмущенного движения, правые части которой – почти периодические функции времени. Доказывается достаточное условие того, что нулевое решение этой системы эквиасимптотически устойчиво по части переменных.

Основным методом исследования устойчивости и асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x, t); \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad X = (X_1, \dots, X_n) \quad (1)$$

по части переменных служит второй метод Ляпунова. Он основан на построении функции Ляпунова $V(x, t)$.

В.В. Румянцев [1] доказал основную теорему об устойчивости решения $x = 0$ системы (1) по части переменных, которая является аналогом теоремы Ляпунова об устойчивости. В ней требуется, чтобы функция $V(x, t)$ была у-определенно-положительной, а ее производная в силу уравнений (1) удовлетворяла условию $dV/dt \leq 0$. Позднее [2,3] была доказана теорема об асимптотической устойчивости по части переменных нулевого решения системы (1). В ней требуется, чтобы производная dV/dt в силу уравнений (1) была у-определенно-отрицательной.

В прикладных задачах часто удается построить у-определенно-положительную функцию $V(x, t)$, производная которой в силу уравнений (1) dV/dt лишь неположительна. Для такого случая была доказана [4,5] теорема об асимптотической устойчивости тривиального решения автономной системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x) \quad (2)$$

Было показано [6], что для общего случая неавтономных систем аналогичная теорема неверна.

Ниже рассматривается более общий случай по сравнению с автономной системой: правые части системы (2) предполагаются почти периодическими функциями времени t . Доказано, что решение $x = 0$ эквиасимптотически у-устойчиво (т.е. $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно относительно начальных возмущений x_0).

По аналогии с введенными ранее обозначениями [7] обозначим через $x_1, \dots, x_m$ ($m > 0$, $n = m + p$, $p \geq 0$) переменные, по отношению к которым исследуется устойчивость решения $x = 0$ системы (1). Для удобства обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ ($i = 1, \dots, m$), а остальные переменные – через $z_j = x_{m+j}$ ($j = 1, \dots, p$), т.е. представим векторы x и X в виде

$$x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^T \equiv (y, z)^T$$

$$X = (Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_p)^T \equiv (Y, Z)^T$$

Обозначим далее

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^m y_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^p z_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}$$

Введем определения.

Определение 1 [8]. Непрерывную функцию $f(t)$ со значениями в R^n называют почти периодической функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $L = L(\varepsilon)$, такое, что в любом промежутке $[\alpha, \alpha + L(\varepsilon)]$, $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ найдется, по крайней мере, одно число τ , при котором

$$\|f(t) - f(t + \tau)\| < \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty$$

Определение 2 [9]. Непрерывную функцию $f(x, t)$ ($x \in R^s$, $-\infty < t < +\infty$) со значениями в R^n называют равномерно почти периодической, если каждому $\varepsilon > 0$ и каждому $r > 0$ соответствует такое $L = L(\varepsilon, r)$, что в любом промежутке $[\alpha, \alpha + L(\varepsilon, r)]$, $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ найдется, по крайней мере, одно число τ , при котором

$$\|f(x, t) - f(x, t + \tau)\| < \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty, \quad \|x\| < r$$

Определение 3 [7]. Движение $x = 0$ называется эквиасимптотически y -устойчивым, если для каждого $t_0 \geq 0$ существует такое $\delta(t_0) > 0$, что $\|y(t; t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ равномерно по $\|x_0\| < \delta(t_0)$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon, t_0) > 0$, при котором из $\|x_0\| < \delta$ следует $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + T$.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения (1). Функции $X(x, t)$ предполагаются определенными, непрерывными и удовлетворяющими условию Липшица по x в области

$$t \in R, \quad \|y\| < H, \quad \|z\| < +\infty, \quad H = \text{const} \quad (3)$$

Предположим также, что решения системы (1) z -продолжимы. Это значит [7], что любое решение $x(t)$ определено при всех $t \geq 0$, для которых $\|y(t)\| \leq H$.

Теорема. Пусть уравнения возмущенного движения (1) таковы, что:

- 1) каждое решение системы (1), начинающееся в некоторой окрестности точки $x = 0$, ограничено;
- 2) можно построить почти периодическую по t , y -определенно-положительную, непрерывно дифференцируемую функцию $V(x, t)$, удовлетворяющую неравенству $dV/dt \leq 0$ в области (3), и если при этом производная dV/dt может равняться нулю лишь в точках множества, не содержащего целиком полутраекторий системы (1) $x(x_0, t_0, t)$, ($t_0 < t < +\infty$) (за исключением тривиального решения), то решение $x = 0$ эквиасимптотически y -устойчиво.

Перед тем как доказывать теорему, сформулируем ряд вспомогательных предложений.

Лемма 1. Функции $X(x, t)$ и $V(x, t)$ равномерно почти периодичны.

Лемма доказана ранее [9].

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует неограниченно возрастающая последовательность ε -почти-периодов $\{\tau_i\}$ общих для функций $X(x, t)$ и $V(x, t)$:

$$\|X(x, t) - X(x, t + \tau_i)\| < \varepsilon, \quad |V(x, t) - V(x, t + \tau_i)| < \varepsilon$$

Доказательство леммы следует из теоремы Кронекера [10].

Лемма 3. Пусть $x(x_0, t_0, t)$ ($t_0 < t < +\infty$) — полутраектория системы (1), удовлетворяющая начальному условию $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$ и лежащая в области (3), а $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю; $\{\tau_k\}$ — некоторая последовательность ε_k -почти-периодов вектор-функции $X(x, t)$ (где каждому ε_k соответствует ε_k -почти-период τ_k), причем $\{\tau_k\}$ монотонно возрастает, и $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(x_k, t_0, t^*) - x(x_0, t_0, t^* + \tau_k)\| = 0, \quad x_k = x(x_0, t_0, t_0 + \tau_k) \quad (4)$$

где t^* — некоторый момент времени, больший чем t_0 .

Доказательство леммы приведено ранее [11].

Для доказательства теоремы воспользуемся изложенным ранее методом [11, 12].

Отметим, что y -устойчивость нулевого решения следует из теоремы В.В. Румянцева [1].

Можно показать, что $\|y(x_0, t_0, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Предположим обратное. Функция $V(x(x_0, t_0, t), t)$ монотонно не возрастает, так как $dV/dt \leq 0$. Поэтому существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(x_0, t_0, t), t) = V_0$ и $V(x(x_0, t_0, t), t) \geq V_0$ при любом $t > t_0$. Из сделанного предположения следует, что $V_0 \neq 0$. Возьмем теперь $\{\varepsilon_i\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящуюся к нулю. Для любого ε_i существует последовательность почти-периодов $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{in}, \dots$, стремящаяся в бесконечности для функций $V(x, t)$ и $X(x, t)$. Можно записать, что

$$|V(x, t) - V(x, t + \tau_{in})| < \varepsilon_i, \quad \|X(x, t) - X(x, t + \tau_{in})\| < \varepsilon_i$$

$$\|x\| \leq \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty$$

Будем считать, что $\tau_{in} < \tau_{i+1, n}$, и обозначим $\tau_{kk} = \tau_k$. Рассмотрим последовательность точек $x_k = x(x_0, t_0, t_0 + \tau_k)$ ($k = 1, 2, \dots$). По условию 1 теоремы эта последовательность ограничена. Из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты считаем, что последовательность $\{x_k\}$ сама сходится. Пусть x^* — предельная точка последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Из предположения следует, что $x^* \neq 0$. Используя то, что функция $V(x, t)$ непрерывна и почти периодична, можно записать

$$V(x^*, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k, t_0 + \tau_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x(x_0, t_0, t_0 + \tau_k), t_0 + \tau_k) = V_0$$

Рассмотрим полутраекторию $x(x^*, t_0, t)$ ($t_0 < t < \infty$). По условию на ней должны существовать точки, где $dV(x(x^*, t_0, t), t)/dt < 0$, т.е. можно указать $t^* > t_0$, такое, что $V(x(x^*, t_0, t^*), t^*) = V_1 < V_0$.

Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных имеем

$$x(x^*, t_0, t^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(x_k, t_0, t^*)$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x(x_k, t_0, t^*), t^*) = V_1 \quad (5)$$

Так как $X(x, t)$ — функция почти периодическая и выполнено условие (4), получаем

$$\|x(x_k, t_0, t^*) - x(x_0, t_0, t^* + \tau_k)\| \leq \gamma_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0 \quad (6)$$

Из того, что $V(x, t)$ — равномерно почти периодическая функция, вытекает, что

$$|V(x, t^*) - V(x, t^* + \tau_k)| < \varepsilon_k \quad (7)$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что

$$|V(x(x_0, t_0, t^* + \tau_k), t^*) - V_1| < \eta_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0 \quad (8)$$

Складывая неравенство (7) при $x = (x(x_0, t_0, t^* + \tau_k))$ и неравенство (8), получаем

$$|V(x(x_0, t_0, t^* + \tau_k), t^* + \tau_k) - V_1| < \eta_k + \varepsilon_k; \quad \eta_k + \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \quad (9)$$

Но

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x(x_0, t_0, t^* + \tau_k), t^* + \tau_k) = V_0 \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) противоречат друг другу, так как $V_1 < V_0$. Следовательно, предположение о том, что $V_0 \neq 0$, неверно, т.е. $V_0 = 0$. Так как функция $V(x, t)$ у-определенно-положительна, то

$$a(\|y\|) \leq V(x, t) \quad (11)$$

где a – некоторая функция Хана [13]. Итак, $V(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Используя оценку (11), получаем, что $a(\|y(x_0, t_0, t)\|) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|y(x_0, t_0, t)\| \rightarrow 0$.

По условию теоремы $V(x, t) \geq a(\|y(x_0, t_0, t)\|)$. Выше было показано, что $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(x_0, t_0, t), t) = 0$. Вывод предельного соотношения $\|y(x_0, t_0, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно относительно x_0 , принадлежащего δ -окрестности начала координат следует из полученного ранее результата [7], где число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ определяется из условия у-устойчивости: $\|x_0\| \leq \delta \rightarrow \|y(t)\| < \varepsilon$ для любого $t > t_0$. Это и доказывает эквивалентную у-устойчивость нулевого решения системы (1).

Замечание. Для частного случая почти периодических систем – для квазипериодических систем аналогичная теорема может быть доказана методом предельных систем с использованием теоремы 2.2 из [14] и результатов работы [15].

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz}{dt} = z \sin(y_1^2 + y_2^2)(\sin t + \sin \sqrt{3}t) - z^3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2^3 - y_1(y_2^2 + 1)(1 + z^2 + \sin^2 2t + \cos^2 \sqrt{2}t)$$

$$dy_2/dt = y_1^3$$

Возьмем $V = (y_1^4 + y_2^4)/4$. Тогда

$$dV/dt = -y_1^4(y_2^2 + 1)(1 + z^2 + \sin^2 2t + \cos^2 \sqrt{2}t) \leq 0$$

dV/dt может равняться нулю лишь на множестве $y_1 = 0$, которое не включает в себя целых полутраекторий рассматриваемой системы. Следовательно, по доказанной теореме, нулевое решение нашей системы эквивалентно устойчиво по отношению к переменным y_1, y_2 .

Автор благодарит А.Я. Савченко за постановку задачи и А.М. Ковалева за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим. 1957. № 4. С. 9–16.
2. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
3. Озиранер А.С., Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–384.
4. Rumyantsev V.V. On the stability with respect to a part of the variables // Symposium mathematics. V. 6. Meccanica non-lineare e stabilita. 1970. L.; N.Y.: Acad. Press, 1971. P. 243–265.
5. Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659–665.
6. Матросов В.М. Об устойчивости движения // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 885–895.
7. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
8. Зубов В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.

9. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1979. 352 с.
10. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М.: Гостехтеориздат, 1953. 386 с.
11. Савченко А.Я., Игнатъев А.О. Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 204 с.
12. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
13. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N.Y.: Springer, 1977. = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
14. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707–713.
15. Shell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. Pt 1; 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. № 2. P. 241–283.

Донецк

Поступила в редакцию
19.V.1998

УДК 531.38

© 1999 г. Дружинин Э.И.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ УРАВНОВЕШЕННОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Исследуются перманентные вращения гиростата вокруг его закрепленного центра тяжести. Предполагается, что линия действия переменного во времени вектора гиростатического момента сохраняет постоянное положение в связанной с несущим телом системе координат. Показано, что в этом случае при отличном от нуля суммарном кинетическом моменте гиростата его перманентные вращения могут происходить лишь вокруг его главных осей инерции. При этом вектор гиростатического момента должен быть коллинеарен одной из главных осей инерции гиростата.

Рассмотрим гиростат с закрепленным центром тяжести и не подверженный действию внешних сил. Пусть переменный во времени вектор $\mathbf{k}$ – момент количеств движения носимых тел гиростата в их движении относительно несущего тела (в дальнейшем гиростатический момент) – имеет линию действия, неизменно расположенную в связанной с несущим телом системе координат (ССК). Такая постановка характерна, например, для задачи анализа динамических эффектов при изучении режима аварийной закрутки стационарного спутника связи, снабженного в качестве исполнительного органа трехстепенным гироскопом с управляемым маховиком (в режиме закрутки рамки гироскопа выставлены на упоры). Итак, $\mathbf{k} = k(t)\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ – неподвижный в ССК орт, а $k(t)$ – некоторая заданная функция времени, непрерывная и ограниченная для всех $t \in R$.

Уравнение движения гиростата в векторной форме в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0 \quad (1)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}$ – суммарный момент количеств движения гиростата, $\mathbf{I}$ – тензор инерции гиростата как твердого тела для точки закрепления, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости гиростата. Точка над вектором $\mathbf{K}$ означает производную по времени в ССК (относительную производную).

Выпишем первый интеграл уравнения (1)

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k} = \text{const} \quad (2)$$