

УДК 539.375

© 1999 г. А.В. Андреев, Р.В. Гольдштейн, Ю.В. Житников

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ИЗЛОМА ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В рамках плоской задачи теории упругости исследуется асимптотическое поведение упругого поля в окрестности угловой точки излома трещины на границе раздела различных материалов при учете контакта ее поверхностей и возможности их взаимного скольжения с сухим трением. Решение задачи проводится методом комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили. Полученные результаты позволили оценить угловой диапазон существования контактных решений и сингулярность напряжений вблизи точки излома трещины. Показано, что образование зон налегания с учетом сил трения при скольжении существенно зависит от величины угла излома, модулей упругости материалов, коэффициента трения. Проведены численные расчеты и получены распределения напряжений и смещений в окрестности угловой точки.

Известно [1, 2], что возникновение областей контакта вдоль трещины существенно влияет на величину коэффициента интенсивности напряжений. Была получена асимптотика решения в окрестности вершины угла в однородном материале [3, 4] и для составного клина [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерная задача линейной теории упругости о распределении напряжений и смещений в окрестности точки излома ломаной трещины на границе раздела двух сред (фиг. 1) при учете образования зоны контакта ее поверхностей, прилегающей к точке излома трещины. Возможны следующие варианты поведения решения: 1) в окрестности точки излома не возникает зон налегания, т.е. поверхности трещины свободны; 2) область налегания возникает на части границы трещины, примыкающей к углу излома; 3) вся поверхность трещины в окрестности угла излома находится в контакте.

В первом случае, асимптотическое поведение решения разбивается на две независимые асимптотики для однородных материалов, соответственно для углов, прилегающих к точке излома. Эти асимптотики известны [3, 4] и здесь рассматриваться не будут.

Для двух последних случаев возникает контактное взаимодействие поверхностей трещин, и именно эти два случая будут рассмотрены ниже.

Сформулируем краевую задачу для второго случая. Пусть граница $\theta = \alpha$ соответствует свободной поверхности, а $\theta = 0$ – область контакта поверхностей трещины, прилегающих к границе излома (r, θ – полярная система координат, связанная с вершиной трещины, α – угол излома). Краевая задача при учете сил сухого трения в области контакта имеет вид

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \alpha) = 0 \quad (1.1)$$

$$u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = u_{\theta}^{(2)}(r, 2\pi), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 2\pi) \quad (1.2)$$

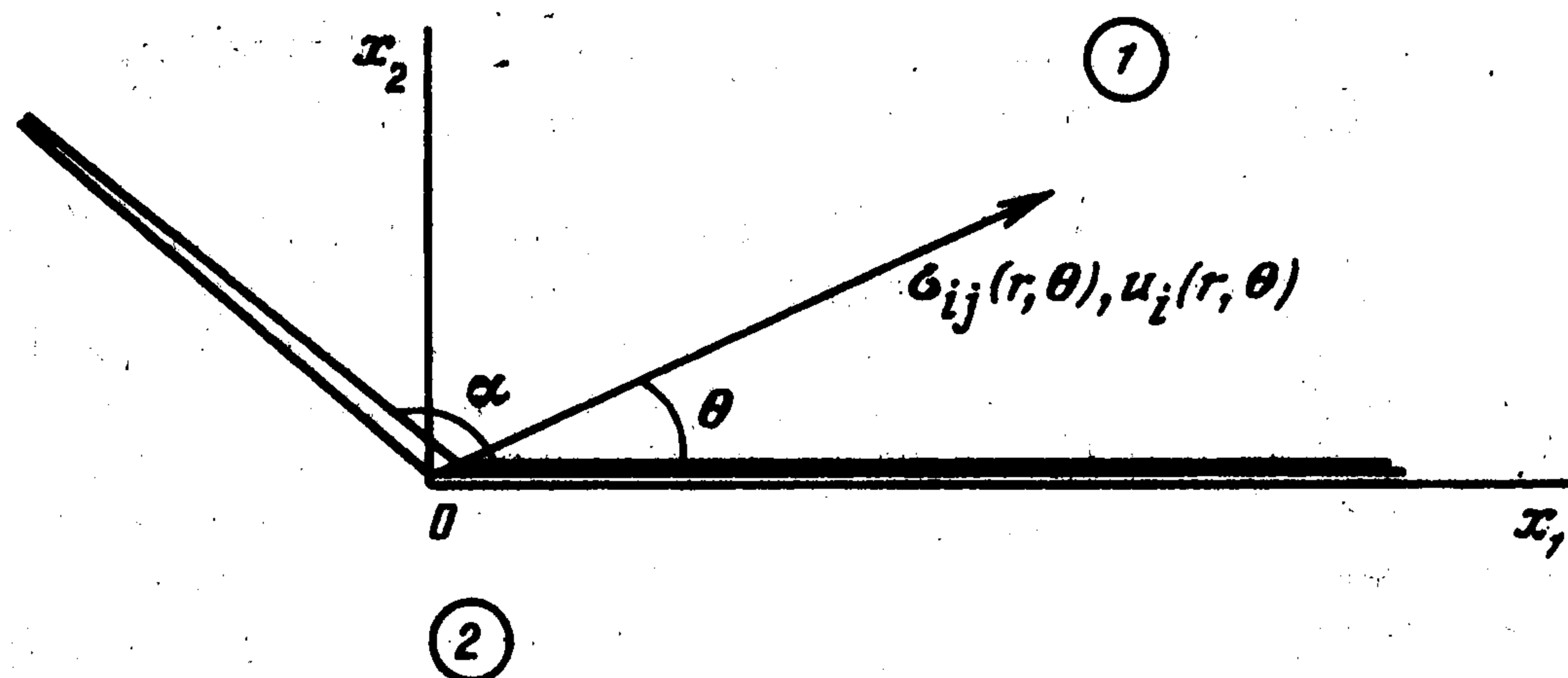
$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) = \rho \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) \frac{(u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi))}{|u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi)|} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) = -\sigma_{r\theta}^{(2)}(r, 2\pi)$$

где $\sigma_{\gamma\beta}^{(j)}(r, \theta), u_{\gamma}^{(j)}(r, \theta)$ ($\gamma, \beta = r, \theta, j = 1, 2$) – компоненты тензора напряжений и вектора смещения, соответственно, в полярной системе координат для двух различных материалов, ρ – коэффициент трения. Кроме того, решение краевой задачи должно удовлетворять дополнительным условиям

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 2\pi) \leq 0, \quad u_{\theta}^{(1)}(r, \alpha) \leq u_{\theta}^{(2)}(r, \alpha) \quad (1.4)$$

которые по существу представляют собой условие сжатия при $\theta = 0$ и условие раскрытия при $\theta = \alpha$ соответственно.



Фиг. 1

В третьем варианте поверхности трещины находятся в контакте по обе стороны от точки излома и краевая задача имеет вид

$$u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = u_{\theta}^{(2)}(r, 2\pi), \quad u_{\theta}^{(1)}(r, \alpha) = u_{\theta}^{(2)}(r, \alpha) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 2\pi), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \alpha)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) = \rho \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) \frac{(u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi))}{|(u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi))|}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \rho \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \alpha) \frac{(u_r^{(1)}(r, \alpha) - u_r^{(2)}(r, \alpha))}{|(u_r^{(1)}(r, \alpha) - u_r^{(2)}(r, \alpha))|}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) = -\sigma_{r\theta}^{(2)}(r, 2\pi), \quad \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \alpha)$$

Дополнительные условия (условия сжатия как при $\theta = 0$, так и при $\theta = \alpha$) имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 2\pi) \leq 0, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \alpha) \leq 0 \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.1)–(1.3), (1.5) при дополнительных условиях (1.4), (1.6) определяют асимптотику решения вблизи угла излома с учетом образования зон налегания и раскрытия ее поверхностей.

2. Построение асимптотического решения. Напряженно-деформированное состояние в каждой из характерных областей запишем с использованием известных комплексных представлений [6]

$$\sigma_{rr}^{(j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(j)} = 2[\varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)}]$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(j)} = 2[\bar{z}\varphi_j''(z) + \psi_j'(z)]e^{2i\theta} \quad (2.1)$$

$$2\mu_j \cdot (u_r^{(j)} + iu_{\theta}^{(j)}) = e^{-i\theta} [\kappa_j \varphi_j(z) - \overline{z\varphi_j'(z)} - \overline{\psi_j(z)}]$$

где $j = 1, 2$, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ при плоской деформации и $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ при плоском

напряженном состоянии, ν_j — коэффициент Пуассона, μ_j — модуль сдвига, $z = re^{i\theta}$, $\phi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ — комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили в соответствующих областях.

Решение системы (2.1) в каждой из характерных областей запишем в виде

$$\phi_j(z) = a_j z^\lambda, \quad \psi_j(z) = b_j z^\lambda \quad (2.2)$$

Здесь a_j и b_j — неизвестные комплексные постоянные, λ полагаем вещественным числом. В этом случае выражения (2.1) будут определять поля напряжений и смещений. Последнее связано с тем, что осцилляционное решение [7] для асимптотики на границе раздела двух материалов при наличии зоны контакта отсутствует [8]. Справедливость этого утверждения проверяется численно в процессе нахождения корней характеристического уравнения.

Введем обозначения

$$a_j = A_j + iB_j, \quad b_j = C_j + iD_j, \quad j = 1, 2$$

Используя соотношения (2.1), (2.2), получим выражения для напряжений и смещений в характерных областях ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(j)} &= \lambda r^{\lambda-1} [A_j(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta + B_j(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta + C_j\sin(\lambda+1)\theta + D_j\cos(\lambda+1)\theta] \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} &= \lambda r^{\lambda-1} [A_j(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta - B_j(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta + C_j\cos(\lambda+1)\theta - D_j\sin(\lambda+1)\theta] \\ \sigma_{rr}^{(j)} &= \lambda r^{\lambda-1} [A_j(3-\lambda)\cos(\lambda-1)\theta - B_j(3-\lambda)\sin(\lambda-1)\theta - \\ &\quad - C_j\cos(\lambda+1)\theta + D_j\sin(\lambda+1)\theta] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$u_\theta^{(j)} = \frac{r^\lambda}{2\mu_j} [A_j(\lambda + \kappa_j)\sin(\lambda-1)\theta + B_j(\lambda + \kappa_j)\cos(\lambda-1)\theta + C_j\sin(\lambda+1)\theta + D_j\cos(\lambda+1)\theta]$$

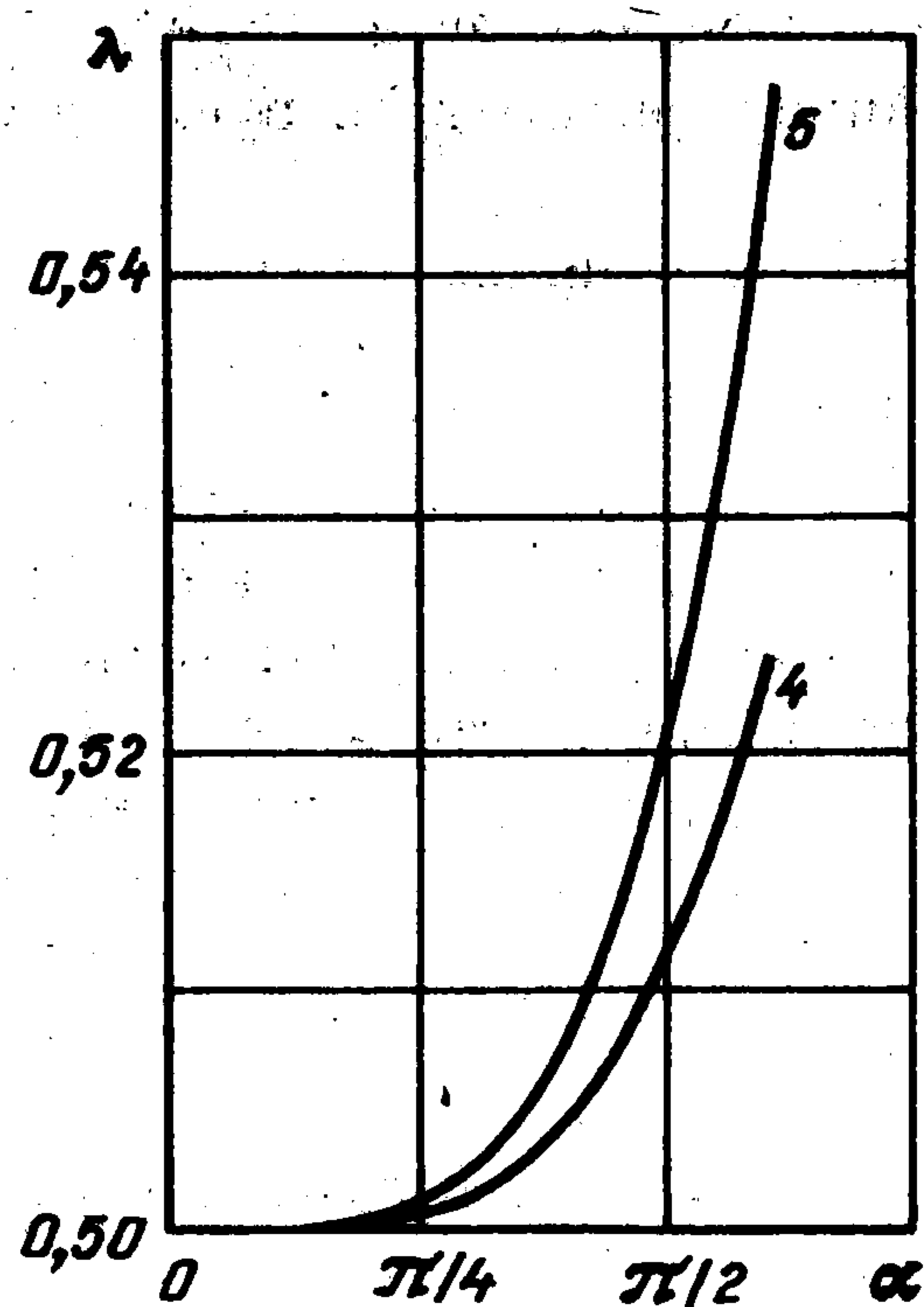
$$u_r^{(j)} = \frac{r^\lambda}{2\mu_j} [A_j(\kappa_j - \lambda)\cos(\lambda-1)\theta - B_j(\kappa_j - \lambda)\sin(\lambda-1)\theta - C_j\sin(\lambda+1)\theta + D_j\cos(\lambda+1)\theta]$$

Таким образом, задача сведена к определению неизвестных постоянных A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) и величины λ . Значения показателя λ ищутся в энергетическом классе решений $\lambda \geq 1/2$.

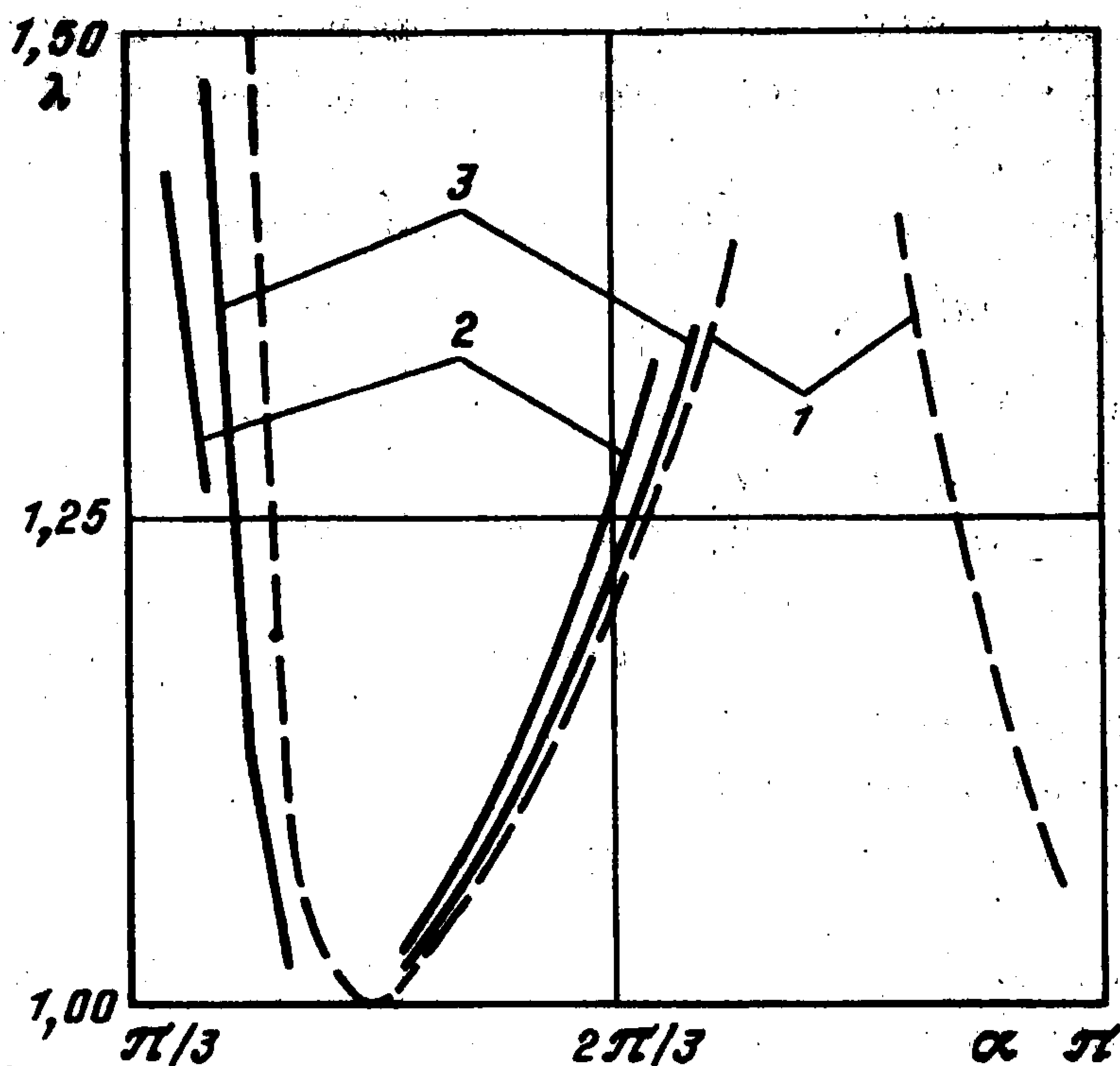
Подстановка явных выражений для напряжений и смещений в области 1 и их аналогов в области 2 в граничные условия (1.1)–(1.3) приводит к системе однородных по $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ уравнений, которые решались численно, согласно следующему алгоритму: численный расчет корней характеристического уравнения методом секущих; расчет неизвестных постоянных (решение системы методом Гаусса); расчет поля напряжений и смещений; численный анализ результатов.

Следует отметить, что решение характеристического уравнения представляет собой набор значений показателя λ : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. В качестве показателя сингулярности решения выбиралось минимальное значение λ , удовлетворяющее ограничению $\lambda \geq 1/2$, а полученные при этом распределения напряжений и смещений удовлетворяли системе неравенств (1.4), определяющих решения именно для трещины с зоной контакта ее поверхностей.

Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи точки излома трещины с областью контакта проводился по следующему алгоритму. Прежде всего, в соответствии с условиями (1.4), в зоне контакта областей 1 и 2 следует предполагать сжатие вдоль оси θ . Следовательно, каждому значению угла излома α можно поставить в соответствие вполне определенный знак постоянной, с точностью до которой определяется величина $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$. Это, в свою очередь, позволяет определить относительную ве-



Фиг. 2



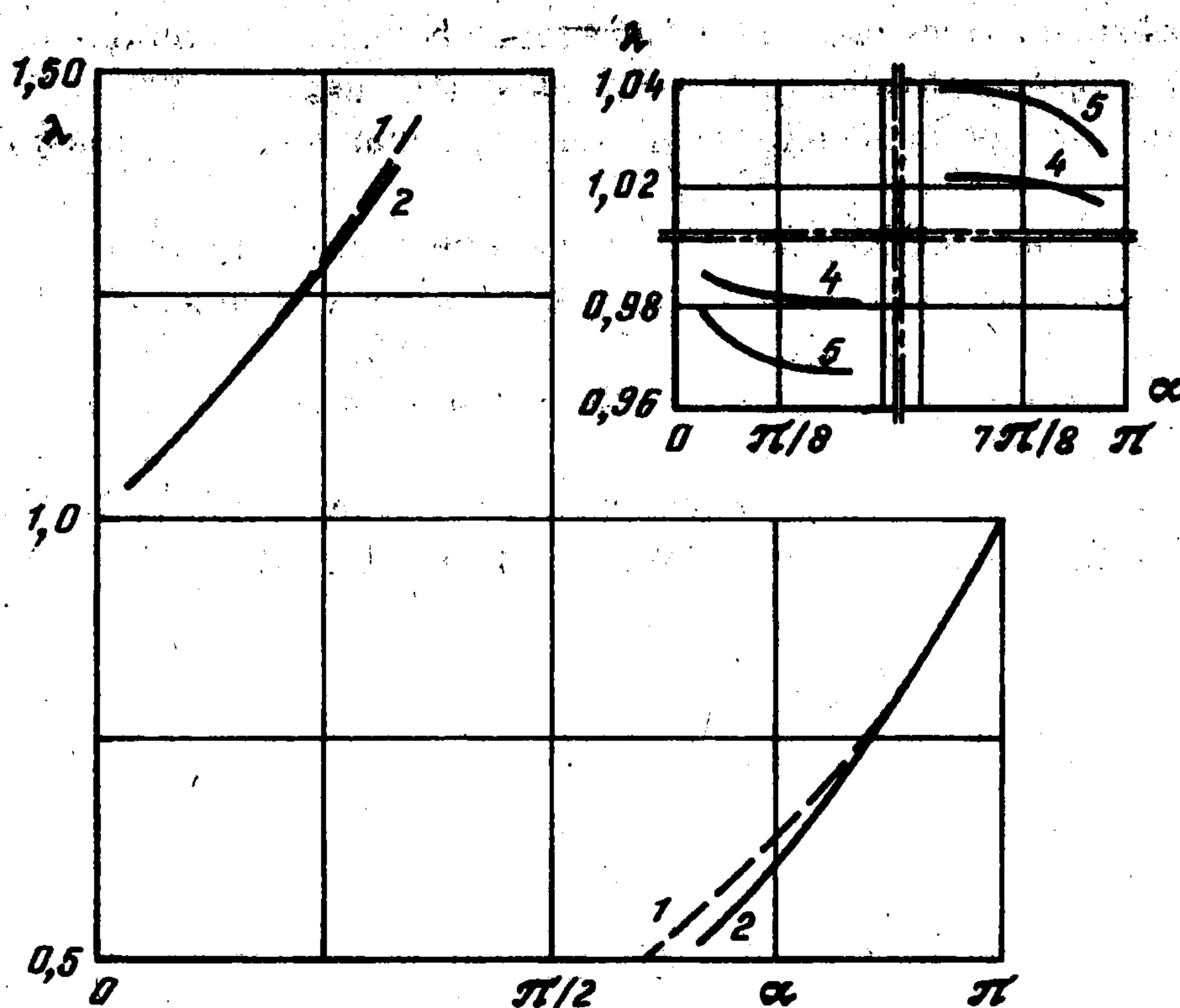
Фиг. 3

личину и направление смещений $u_{\theta}^{(1)}$ и $u_{\theta}^{(2)}$ при $\theta = \alpha$, т.е. на свободной по постановке задачи поверхности и проверить удовлетворение второму неравенству (1.4). Кроме того, отметим, что при наличии трения между контактирующими поверхностями расчет асимптотики проводился как для положительной, так и для отрицательной разности между касательными смещениями поверхностей трещины (первое уравнение (1.3)), а для построенного на ее основе напряженно-деформированного состояния проводилась проверка на соответствие выбранному знаку. Это позволяет подобрать наименьший показатель λ , соответствующий решению контактной задачи.

Аналогичным образом было получено решение краевой задачи (1.5) при дополнительных условиях (1.6).

3. Результаты расчета. На фиг. 2 и 3 приведены результаты расчета показателя асимптотики, полученные в рамках решения краевой задачи (1.1)–(1.3), при выполнении условий (1.4), т.е. для задачи контакт ($\theta = 0$) – раскрытие ($\theta = \alpha$). Фиг. 2 показывает зависимость $\lambda = \lambda(\alpha)$ для различных величин коэффициента трения. Кривая 4 построена при $\rho = 0,1$ ($\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$), а кривая 5 при $\rho = 0,2$. Как видно, решение вида контакт – раскрытие не реализуется для больших значений угла излома ($\alpha > 110^\circ$). Фиг. 3 показывает зависимость значений асимптотики от угла излома α для различных соотношений между упругими характеристиками материалов в областях 1 и 2 (при $\rho = 0$). Кривая 1 соответствует одинаковым материалам в областях 1 и 2, кривая 2 построена при $\mu_1/\mu_2 = 5$ ($\nu_1 = \nu_2$), кривая 3 – при $\mu_1/\mu_2 = 2$. Для больших значений углов ($\alpha > 150^\circ$) величины асимптотики для разномодульных и одномодульных материалов различаются весьма слабо, в пределах 5%.

Отметим, что изменение отношения коэффициентов Пуассона в пределах $1 < \nu_1/\nu_2 < 2$ не оказывает существенного влияния на характер и величину асимптотики. Напротив, изменение отношения модулей сдвига материалов оказывает существенное влияние как на характер, так и на величину показателя асимптотики. Так, разномодульность приводит к появлению определенного диапазона углов излома (вблизи $\alpha = 90^\circ$), в котором решение вида контакт – раскрытие не реализуется. Кроме того, увеличение отношения μ_1/μ_2 приводит к расширению этого диапазона. Сравнение кривой 1 на фиг. 3 и кривых 4, 5 на фиг. 2 позволяет сделать вывод о том, что возникновение трения между контактирующими поверхностями трещины оказывает существенное влияние на величину асимптотики, а именно, приводит к сингулярности напряжений вблизи угла ее излома, чего не происходит при гладком контакте.



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены результаты расчета для краевой задачи (1.5), при условиях (1.6), т.е. для задачи контакт ($\theta = 0$) – контакт ($\theta = \alpha$). Кривые 4 и 5 показывают зависимости $\lambda = \lambda(\alpha)$ для различных величин коэффициента трения, кривые 1 и 2 – зависимости $\lambda = \lambda(\alpha)$ для различных соотношений между упругими характеристиками материалов. Параметры расчета аналогичны вышеуказанным, сохранена также нумерация кривых. Значения величины показателя асимптотики при наличии трения между контактирующими поверхностями близки к единице (фиг. 4, кривые 4 и 5), однако для малых величин угла излома ($\alpha < 40^\circ$) напряжения вблизи точки излома сингулярны, а при больших ($\alpha > 140^\circ$) – ограничены. Напротив, при отсутствии трения (фиг. 4, кривые 1 и 2), сингулярные напряжения возникают при больших значениях ($\alpha > 110^\circ$) угла излома, при малых же значениях ($\alpha < 65^\circ$) напряжения ограничены. Разномодульность материалов ($1 < \nu_1/\nu_2 < 2$, $1 < \mu_1/\mu_2 < 5$) оказывает незначительное влияние на характер изменения и величину показателя асимптотики; следует отметить лишь расширение диапазона нереализуемости решения вида контакт – контакт при увеличении отношения μ_1/μ_2 (фиг. 4, кривая 2, $\mu_1/\mu_2 = 5$).

Результаты решения задачи (1.1)–(1.3), при условиях (1.4), т.е. контакт – раскрытие, и задачи (1.5), при условиях (1.6), т.е. контакт – контакт, совместно с решениями, полученными ранее [3, 4], т.е. раскрытие – раскрытие, позволяют определить для различных параметров задачи диапазоны углов, при которых возможна реализация того или иного напряженно-деформированного состояния, и величину соответствующего показателя асимптотики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96251) и Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы" (А0083).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826–834.
2. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Численно-аналитический метод решения пространственных смешанных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. I // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 75–85.

3. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. of Appl. Mech.*, 1952. V. 19. No 4. P. 526–528.
4. *Каландия А.И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // *ПММ*. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
5. *Аветисян А.Г., Чобанян К.С.* Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости // *Изв. АН АрмССР. Механика*. 1972. Т. 25. № 6. С. 13–23.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении склеенных тел // *ПММ*. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
8. *Comninou M.* The interface crack // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1977. V. 44. No 4. P. 631–636.

Москва

Поступила в редакцию
4.П.1999