

УДК 539.3:534.1

© 1999 г. А.В. Капцов, С.В. Кузнецов

## НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕЛЕЕВСКИХ ВОЛН В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

На основе трехмерного комплексного формализма строится аналитическое решение задачи о распространении волн Релея в кубических кристаллах в плоскостях их упругой симметрии и в направлениях кристаллографических осей. С учетом кратности корней характеристических полиномов анализируется функция Релея, исследуются условия, при которых она стремится к нулю при двух значениях фазовой скорости. Получены соотношения между упругими постоянными кубических кристаллов, при выполнении которых релеевская волна в направлении кристаллографических осей распространяться не может.

Распространение волн Релея (ВР) на поверхности анизотропных кристаллов впервые исследовалось Стоунли [1] методом Релея [2]. При этом рассматривался случай поверхностных волн, распространяющихся в плоскостях упругой симметрии в направлении кристаллографических осей кубических кристаллов и по диагонали к ним. При определении корней характеристических полиномов, так же как и в изотропном случае [2] предполагалось, что они являются чисто мнимыми. Было показано [3–5], что корни полиномов для кубических кристаллов, вообще говоря комплексные. В дальнейшем аналитические методы Релея были распространены на гексагональные [6] и орторомбические кристаллы [7].

Известны другие варианты аналитического подхода к исследованию ВР в плоскостях упругой симметрии и высокосимметричных направлениях кубических кристаллов, а также вблизи этих направлений [8–11]. Был развит асимптотический метод, сводящий задачу о ВР в среде со слабой анизотропией, к задаче о ВР в упругом изотропном полупространстве [12–13].

Среди численных решений отметим исследования по определению скоростей ВР, распространяющихся в различных плоскостях кубических и гексагональных кристаллов [14–16].

Физические свойства и характеристики различных типов звуковых поверхностных волн систематически описаны в [17], где дана их классификация. Заметим, что начиная с работы Стоунли [1], во всех последующих публикациях [3–17] не рассматривался случай, когда среди корней характеристического полинома оказывались кратные корни, соответствующие одномерным спектральным пространствам. Это привело к потере одного важного класса решений.

В настоящей работе реализован классический подход, восходящий к Релею, при котором не учитывается возможное изменение структуры решения, отвечающего кратным корням.

**1. Основные уравнения.** Уравнения движения для анизотропной среды имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{C}$  – четырехвалентный тензор упругости;  $\rho$  – плотность среды;  $\mathbf{u}$  – поле перемещений. Решение для парциальных составляющих ВР разыскивается в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = m e^{i\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \omega t)} \quad (1.2)$$

где  $m$  – вектор амплитуды,  $\gamma$  – (комплексный) корень характеристического полинома уравнения Кристоффеля,  $\mathbf{v}$  – вектор единичной внешней нормали к плоскости, в которой распространяется поверхностная волна,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, определяю-

щий направление распространения волны,  $\kappa$  – волновое число,  $\omega$  – частота колебаний волны.

Подстановка (1.2) в (1.1) дает

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{T} = \gamma^2 \mathbf{A} + \gamma \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A} = \nu \cdot \mathbf{C} \cdot \nu, \mathbf{B} = \nu \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \nu, \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{I} \rho c^2, c = \omega / \kappa \quad (1.4)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Для того чтобы равенство (1.3) выполнялось при  $\mathbf{m} \neq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \mathbf{T} = 0 \quad (1.5)$$

Условие (1.5) сводится к полиномиальному уравнению шестого порядка относительно  $\gamma$ . Подставляя корни с отрицательной мнимой частью, которые обозначим  $\xi_k$ , в (1.3), найдем отвечающие этим корням собственные векторы  $\mathbf{m}^{(k)}$ . Вектор перемещений будем искать в общем случае в виде линейной комбинации трех собственных векторов (или трех волн)

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 X_k \mathbf{m}^{(k)} F(\xi_k), \quad F(\xi_k) = \exp(-i \xi_k \mathbf{x} \cdot \nu + i \kappa (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)) \quad (1.6)$$

где  $X_k$  – произвольные (комплексные) коэффициенты.

*Замечание.* В настоящей работе исследуется случай, когда уравнение (1.5) имеет три пары комплексно сопряженных корней, которым соответствуют три собственных вектора  $\mathbf{m}_k$ . Другие случаи рассмотрены ранее<sup>1</sup>.

На поверхности среды должны выполняться граничные условия, соответствующие свободной от напряжений поверхности

$$\nu \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.7)$$

Подстановка выражения (1.6) в (1.7) приводит к матричному уравнению относительно неизвестных коэффициентов  $X_k$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{H}$  – комплексно-значимая матрица  $3 \times 3$ . Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений уравнения (1.8) является следующее условие:

$$\det \mathbf{H} = 0 \quad (1.9)$$

из которого можно найти скорость ВР  $c_R$ .

Предполагается что тензор упругости  $\mathbf{C}$  положительно определен

$$\forall \mathbf{A} \in \text{sym}(R^3 \otimes R^3), \quad \mathbf{A} \neq 0$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \equiv \sum_{i,j,m,n} A_{ij} C^{ijmn} A_{mn} > 0 \quad (1.10)$$

Кроме того, на тензор упругости накладывается условие *дополнительной положительной определенности* (ДПО). Для того, чтобы ввести это условие, рассмотрим

<sup>1</sup> Капцов А.В., Кузнецов С.В. Релеевские волны в анизотропных средах. Основы теории: Препринт № 621. Москва: ИПМ РАН, 1998, 29 с.

рим свертку

$$(C ** A)^{in} = \sum_{j,m} C^{ijmn} A_{jm} \quad (1.11)$$

где  $A$  — симметричный положительно определенный тензор второго ранга. В терминах свертки (1.11) условие ДПО имеет вид

$$\forall A \in \text{sym}(R^3 \otimes R^3), \quad A \neq 0$$

$$(A ** C ** A) \equiv \sum_{i,n,j,m} A_{in} C^{ijmn} A_{jm} > 0 \quad (1.12)$$

Анализ условий (1.10), (1.12) показывает, что в общем случае анизотропии ни одно из них не следует из другого.

По-видимому, все реальные анизотропные материалы удовлетворяют условию (1.12). Анализ кристаллов различных сингоний [18] не обнаружил нарушения условия ДПО.

**2. Решение Стоунли.** Для кубических кристаллов имеется три независимых упругих модуля

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = C_{11}, \quad C_{1122} = C_{1133} = C_{2233} = C_{12}$$

$$C_{1212} = C_{1313} = C_{2323} = C_{44}$$

Перед тем как перейти к дальнейшему анализу, выпишем условие положительной определенности тензора упругости  $C$

$$C_{11} > 0, \quad C_{44} > 0, \quad -C_{11}/2 < C_{12} < C_{11} \quad (2.1)$$

Условие ДПО имеет вид

$$C_{11} - C_{44} > 0, \quad C_{12} + C_{44} > 0, \quad C_{11} + 2C_{44} > 0$$

Уравнение (1.5) для кубического кристалла соответствует двум уравнениям

$$C_{44} + C_{44} \gamma^2 - \rho c^2 = 0, \quad a\gamma^4 + b\gamma^2 + r = 0 \quad (2.2)$$

Параметры  $a, b, r$  связаны с упругими постоянными и фазовой скоростью соотношениями

$$a = C_{11}C_{44}, \quad b = C_{11}^2 - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{44} - (C_{11} + C_{44})\rho c^2$$

$$r = C_{12}C_{44} - (C_{11} + C_{44})\rho c^2 + \rho^2 c^4 \quad (2.3)$$

Одна пара корней уравнения определяется из первого уравнения (2.2); для того чтобы она была комплексной, необходимо и достаточно, чтобы

$$c < \sqrt{C_{44}/\rho} \equiv c_3 \quad (2.4)$$

где  $c_3$  — скорость медленной поперечной волны. Другие корни находятся из второго уравнения (2.2).

Подставляя корни с отрицательной мнимой частью ( $\xi_2$  из первого уравнения (2.2) и  $\xi_1, \xi_3$  из второго) в (1.3), можно найти отвечающие этим корням собственные векторы. Следуя описанной выше процедуре (формулы (1.6)–(1.9)), детали которой можно найти в работе Стоунли [1] (см. также [6]) получим, что обращение в нуль определителя граничных условий (2.10) сводится к следующим соотношениям:

$$X_2 = 0 \quad (2.5)$$

$$\det \mathbf{H} = \frac{C_{44}(\xi_1 - \xi_3)}{(C_{11} + C_{44})^2 \xi_1 \xi_3} G(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \alpha = C_{11} - \rho c^2$$

$$G(\xi_1, \xi_3) = \{-C_{12}C_{11}C_{44}\xi_1^2\xi_3^2 + \alpha C_{11}C_{44}(\xi_1^2 + \xi_3^2) -$$

$$- \xi_1, \xi_3(C_{12} + C_{44})(C_{12}^2 - \alpha C_{11}) - \alpha[C_{12}(C_{12} + C_{44}) - C_{11}\alpha]\}$$

$$(2.6)$$

Из (2.5) следует, что в поверхностной волне отсутствует парциальная составляющая, отвечающая волне, поляризованной перпендикулярно сагиттальной плоскости (плоскости образованной векторами  $\nu$  и  $n$ ). Если корни  $\xi_1, \xi_3$  различны (как предполагалось в [1]), то равенство нулю определителя граничных условий соответствует равенству

$$G(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad (2.7)$$

Поскольку для биквадратного уравнения две пары комплексно-сопряженных корней различаются между собой знаком, то

$$\xi_1^2 \xi_3^2 = r/a, \quad \xi_1^2 + \xi_3^2 = -b/a \quad (2.8)$$

и из условий (2.3), (2.7) и (2.8) вытекает условие [1], из которого можно найти скорость ВР  $c_R$ :

$$R^2(1-R) = \left[ 1 - \left( \frac{C_{12}}{C_{11}} \right)^2 - R \right]^2 \left( 1 - \frac{C_{11}}{C_{44}} R \right), \quad R = \frac{\rho c_R^2}{C_{11}} \quad (2.9)$$

Можно получить выражение [6]

$$x = \frac{X_3}{X_1} = - \frac{\xi_3(C_{12}\xi_1^2 - C_{11} + \rho c_R^2)}{\xi_1(C_{12}\xi_3^2 - C_{11} + \rho c_R^2)} \quad (2.10)$$

из которого следует, что если  $\xi_1 \rightarrow \xi_3$ , то  $x \rightarrow -1$ . Также легко показать, что при  $\xi_1 \rightarrow \xi_3$  компоненты собственных векторов  $m^{(1)}$  и  $m^{(3)}$  стремятся друг к другу (поскольку они представляются одинаковыми выражениями, зависящими от корней  $\xi_1, \xi_3$  соответственно).

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего предложения: если  $\xi_1 \rightarrow \xi_3$ , то отношение амплитуд двух собственных векторов, составляющих ВР стремится к  $-1$  и  $m^{(1)} \rightarrow m^{(3)}$ .

*Следствие.* В условиях этого предложения  $X_1 m^{(1)} + X_3 m^{(3)} \rightarrow 0$ .

**3. Кратные корни.** Рассмотрим теперь случай, когда второе из уравнений (2.2) имеет кратный корень. Это возможно, если его дискриминант обращается в нуль, что приводит к условию

$$b^2 - 4ar = 0 \quad (3.1)$$

Отрицательному значению дискриминанта (3.1) соответствует случай обобщенной ВР, а положительному случай обычной ВР [9].

Уравнение (3.1) можно записать в виде биквадратного уравнения

$$\rho^2 a_1 c^4 + \rho b_1 c^2 + r = 0 \quad (3.2)$$

$$a_1 = (C_{11} - C_{44})^2, \quad b_1 = 2(C_{11} + C_{44})B, \quad B = (C_{12} + 2C_{44} - C_{11})(C_{11} + C_{12})$$

$$r_1 = (C_{12}^2 - C_{11}^2) [(C_{12} + 2C_{44})^2 - C_{11}^2]$$

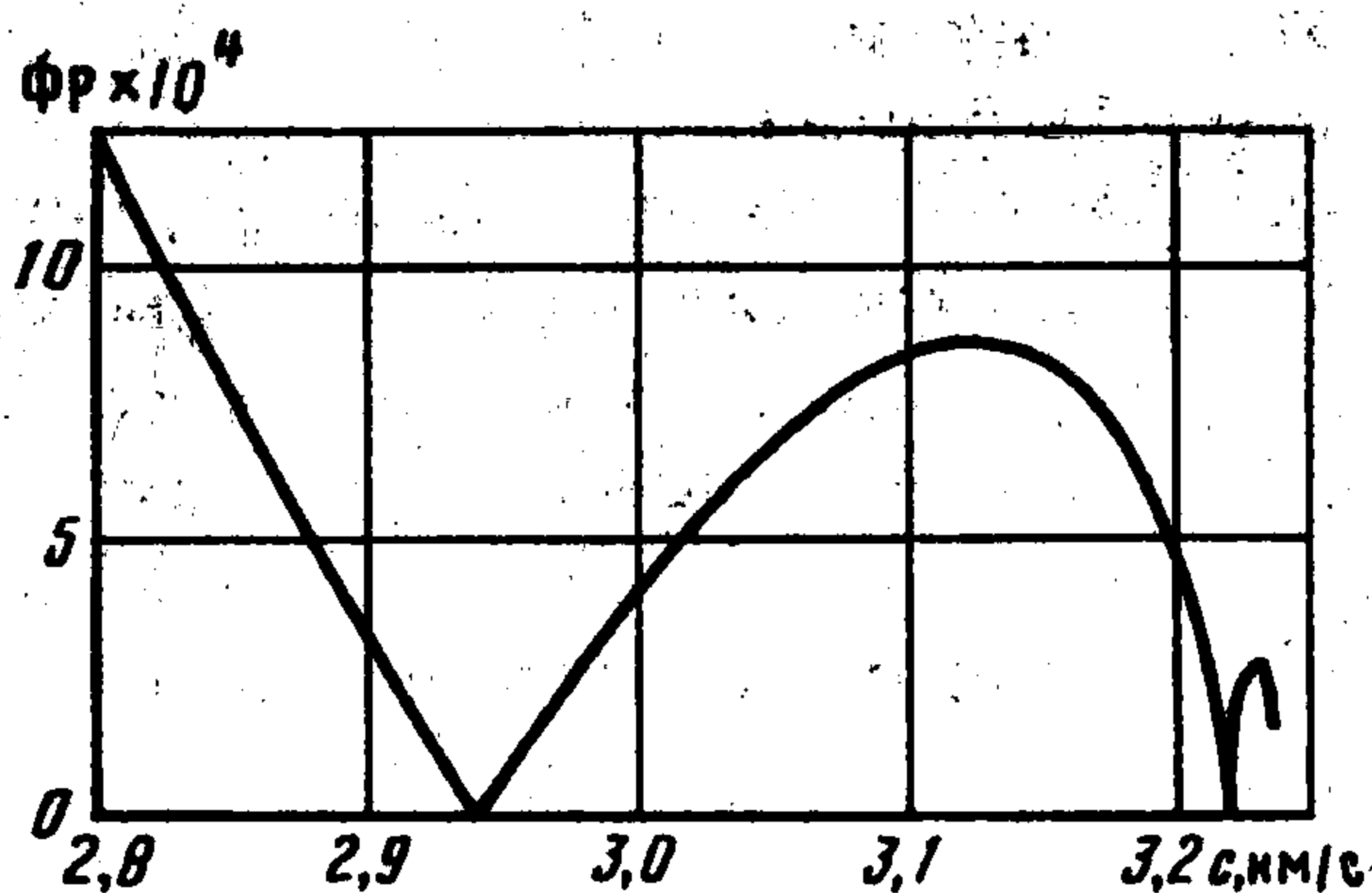
из которого можно найти значение скорости, при котором корни становятся кратными. Если дискриминант уравнения (3.2) положителен и  $r_1 < 0$ , что эквивалентно неравенству

$$C_{44} > (C_{11} - C_{12})/2 \quad (3.3)$$

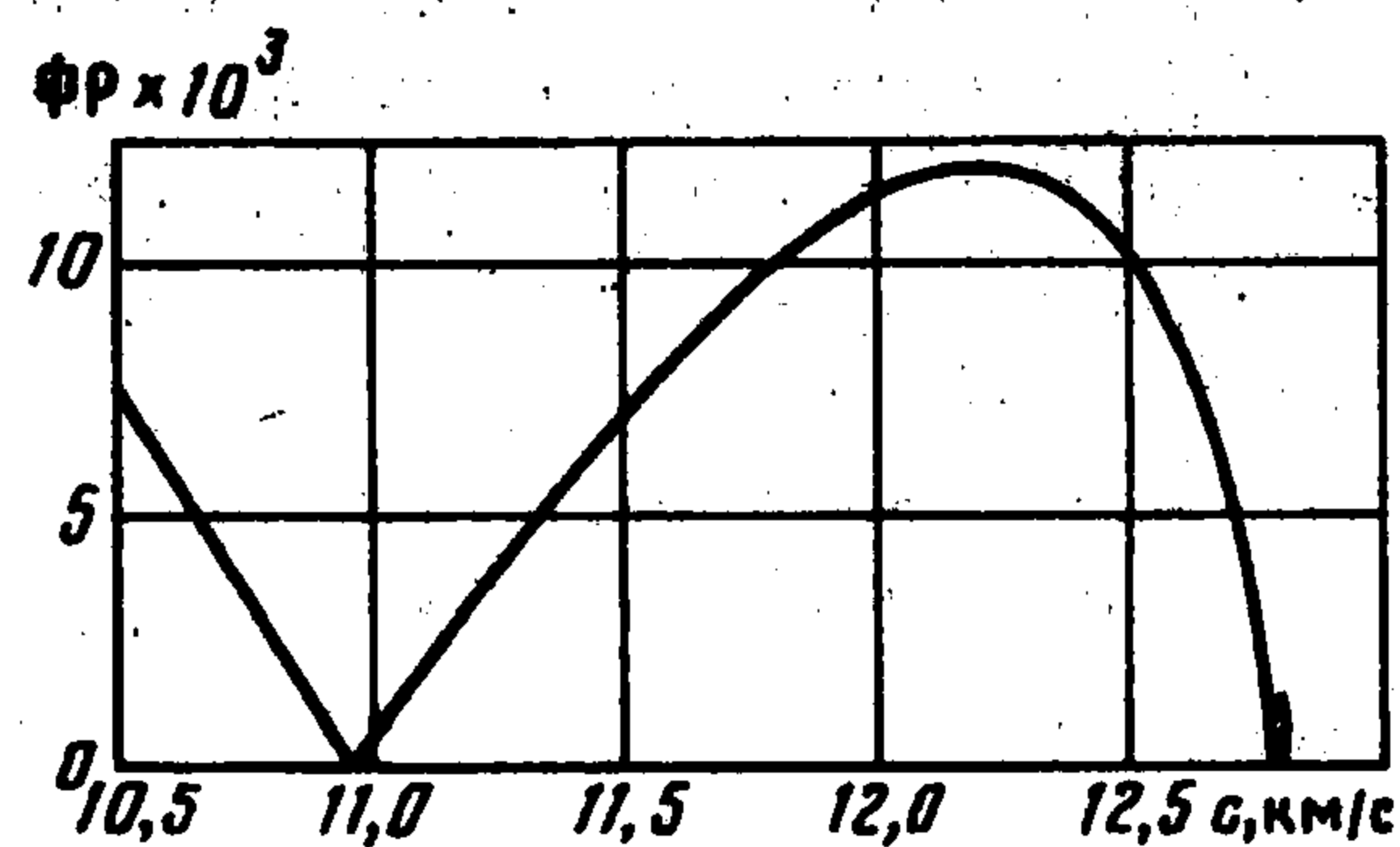
то существует положительный корень уравнения (3.2), который выражается формулой

$$c_a = \frac{(-(C_{11} + C_{44})X + 22|C_{12} + C_{44}|\sqrt{C_{11}C_{44}B})^{1/2}}{\sqrt{\rho|C_{11} - C_{44}|}} \quad (3.4)$$

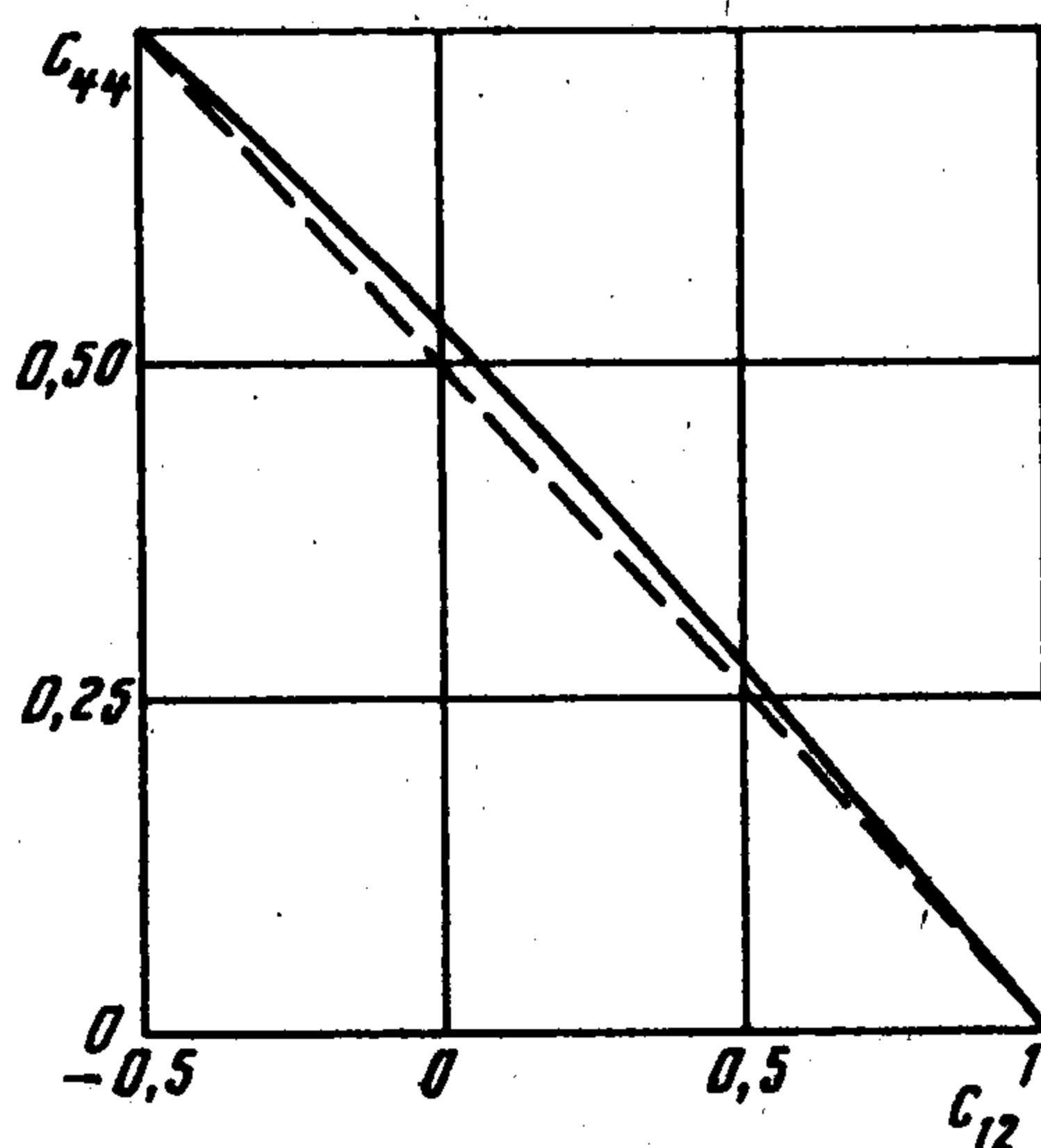
Таким образом, можно сформулировать следующие предложения:



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

1) если  $c_a < c_3$ ,  $c_R \neq c_a$  то определитель граничных условий (2.6) стремится к нулю при  $c \rightarrow c_a$ ;

2) волна, отвечающая фазовой скорости, при которой возникает кратный корень, не существует, поскольку для парциальных волн при  $c \rightarrow c_a$  имеет место  $X_1 m^{(1)} F(\xi_1) + X_3 m^{(3)} F(\xi_3) \rightarrow 0$ .

Последнее вытекает из следствия к предложению, приведенному в конце разд. 2.

**4. Результаты расчетов. Функции Релея для некоторых кубических кристаллов.** В качестве примера рассмотрим кристаллический алюминий. Были взяты следующие значения упругих модулей:  $C_{11} = 0,10730 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{12} = 0,609 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{44} = 0,28304 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 2,6996 \times 10^9$  кг/м<sup>3</sup>.

На фиг. 1 приведена зависимость функции Релея (ФР) (так будем ниже называть величину модуля определителя граничных условий (2.6)) от фазовой скорости  $c$ . Видно, что ФР стремится к нулю при двух значениях скорости:  $c_R = 2941$  м/с (это и есть скорость поверхностной волны) и  $c_a = 3219$  м/с. Первое значение скорости совпадает с известным результатом [14]. Второе отвечает возникновению кратных корней. Заметим, что скорость поперечной волны для алюминия равна 3238 м/с.

На фиг. 2 приведена зависимость ФР от фазовой скорости  $c$  вблизи предельного значения, соответствующего скорости распространения поперечной волны для кристалла алмаза. Были взяты следующие характеристики материала [14]  $C_{11} = 0,10760 \cdot 10^{13}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{12} = 0,12500 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup>,  $C_{44} = 0,57535 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 3,5095 \times 10^9$  кг/м<sup>3</sup>. Видно, что и в этом случае наблюдаются два значения  $c$ , при которых ФР стремится к нулю. Эти значения равны 10973 и 12780 м/с. Скорость поперечной волны равна 12804 м/с.

Для сопоставления с результатами работы [14] был исследован также целый ряд других кристаллов. Однако подобное поведение ФР отмечено лишь у двух указанных материалов. Это связано с тем, что эти материалы слабо анизотропные и скорость, при которой корни становятся кратными, оказывается меньше скорости распространения поперечной волны в

данном направлении. Эти результаты остались незамеченными в [14], что связано, видимо, с недостаточной точностью использованного численного алгоритма.

**Функция Релея модельных материалов.** Исследуем случай, когда скорость релеевской волны  $c_R$  совпадает со скоростью  $c_a$ , при которой образуются кратные корни. Для этого подставим выражение (3.4) в (2.9). Полученное равенство выполняется при некоторых соотношениях между упругими модулями  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ . Это соотношение в виде зависимости  $C_{44}$  от  $C_{12}$  при  $C_{11} = 1$  приведено на фиг. 3 сплошной линией. Для сравнения здесь же приведены значения  $C_{44}$ , при которых упругая среда становится изотропной (штриховая линия). Видно, что область упругих модулей, для которых ВР запрещена, отвечает слабоанизотропным кристаллам.

Полученные результаты можно сформулировать в следующем виде: релеевская поверхностная волна не может распространяться в том случае, когда векторы составляющих ее волн становятся антипараллельными; необходимым условием этого является совпадение скорости ВР со скоростью, при которой корни характеристического полинома становятся кратными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal // Proc. Roy. Soc. Ser A. 1955. V. 232. No. 1191. p. 447–458.
2. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On wave propagating along the plane surface of an elastic solid. // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. No. 253. P. 4–11.
3. Synge J.L. Elastic waves in anisotropic media // J. Math. and Phys. 1957. V. 35. No. 4. P. 323–334.
4. Buchwald V.T. Rayleigh waves in transversely isotropic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1961. V. 14. No. 3. P. 293–317.
5. Buchwald V.T. Rayleigh waves in anisotropic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1961. V. 14. No. 4. P. 461–469.
6. Dieulesaint E., Royer D. Elastic waves in solids. Chichester et al.: Wiley, 1980. 511 p.
7. Royer D., Dieulesaint E. Rayleigh wave velocity and displacement in orthorhombic, tetragonal, hexagonal and cubic crystals // J. Acoust. Soc. America. 1985. V. 76. No. 5. P. 1438–1444.
8. Турсунов Д.А. Обобщенные поверхностные волны в кубических кристаллах // Акуст. журн. 1967. Т. 13. Вып. 1. С. 100–105.
9. Gazis D.C., Herman R., Wallis R.F. Surface elastic waves in cubic crystals // Phys. Rev. 1960. V. 119. No. 2. P. 533–544.
10. Любимов В.Н., Санников Д.Г. Поверхностные квазиобъемные и релеевские упругие волны в кристаллах // Физика твердого тела. 1973. № 6. С. 1851–1855.
11. Любимов В.Н., Санников Д.Г. Поверхностные квазиобъемные упругие волны в окрестности избранных направлений и поверхностей в кристаллах // Физика твердого тела. 1975. Т. 17. № 2. С. 478–483.
12. Макеев В.М., Россихин Ю.А. Построение равномерно пригодного решения для волны Релея в слабоанизотропной упругой среде. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 75–82.
13. Макеев В.М., Россихин Ю.А. Использование слабоанизотропных моделей для описания динамического поведения монокристаллов // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 76–80.
14. Farnell G.W. Properties of elastic surface waves // Physical. Acoustics. 1970. V. 6. P. 109–166.
15. Lim T.C., Farnell G.W. Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals. // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. No. 9. P. 4319–4325.
16. Lim T.C., Farnell G.W. Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // J. Acoust. Soc. America. 1969. V. 45. No. 4. P. 845–851.
17. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
18. Huntington H.B. The elastic constants of crystals. // Solid state physics // N.Y.: Acad. Press, 1958. V. 7. P. 213–351.