

УДК 539.3

© 1999 г. Л.А. Алексеева, А.Н. Дадаева, Н.Б. Жанбырбаев

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Дается развитие метода граничных интегральных уравнений для решения нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости. В случае плоской деформации приводится алгоритм численной реализации метода и даются результаты расчетов термонапряженного состояния плоскости с отверстиями круговой (тестовая задача) и сводчатой форм при заданном нестационарном потоке тепла на границе.

В отличие от динамических задач теории упругости динамика термоупругих сред с концентраторами напряжений в виде полостей и включений различных форм мало изучена. Хорошо исследован класс частных решений уравнений термоупругости [1], в основном для областей с канонической формой границ, где с успехом применяются методы разделения переменных и интегральных преобразований. Использование этих методов в областях сложной геометрии весьма ограничено и зачастую невозможно. Одним из перспективных для решения таких задач является метод граничных интегральных уравнений, который разрабатывался [2–5] для решения статических и квазистатических задач термоупругости. Исследования на основе этого метода динамических задач с учетом инерционных членов в уравнениях движения единичны и в основном носят теоретический характер. Разработке этих вопросов посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим термоупругую среду S^- , ограниченную замкнутой гладкой ляпуновской поверхностью S , n – вектор, единичной внешней нормали к S . Для описания движения такой среды используется модель несвязанной термоупругости [1]

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij} + c_2^2 \Delta u_j + F_j = u_{j,n} \quad (1.1)$$

$$\Delta \theta(x, t) - k^{-1} \dot{\theta}(x, t) + g(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + (\lambda u_{k,k} - \gamma \theta) \delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$F_j = G_j - \gamma \theta_{,j}, \quad i, j, k = 1, 2; \quad \gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu)/\rho$$

Здесь λ, μ – постоянные Ламе, ρ – плотность, c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных волн, α – коэффициент линейного теплового расширения, $k = \kappa/(\rho c)$ – коэффициент температуропроводности, c – удельная теплоемкость, θ – относительное изменение абсолютной температуры; σ_{ij}, u_i – компоненты тензора напряжений и перемещений, связанные соотношениями Дюамеля – Неймана (1.4), G_j – компоненты объемной силы, δ_{ij} – символ Кронекера. Символом после запятой здесь и далее обозначены производные по соответствующим координатам: $u_{i,kj} = \partial^2 u_i / \partial x_k \partial x_j$, $\theta_{,j} = \partial \theta / \partial x_j$, а точкой – производная по времени. Всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

В начальный момент времени $t = 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in S^- + S; \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x \in S^- \quad (1.4)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad x \in S^- + S \quad (1.5)$$

На границе области известны действующие нагрузки и тепловой поток

$$\sigma_{ij}(x, t)n_j(x) = p_i(x, t), \quad \theta_{,j}n_j = q(x, t), \quad x \in S \quad (1.6)$$

В силу гиперболичности системы (1.1) для класса разрывных по производным решений должны выполняться следующие условия для скачков производных на волновых фронтах [6]:

$$[\dot{u}_i + v v_j u_{i,j}]_F = 0, \quad [\sigma_{ij} v_j + \rho v \dot{u}_i]_F = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $v = c_1, c_2$ – скорость распространения поверхностей разрыва, v – направляющие косинусы нормали к ней.

Требуется найти σ_{ij}, u_i, θ в среде при заданных граничных и начальных условиях (1.4)–(1.6) и условиях (1.7).

2. Постановка задачи в пространстве преобразования Лапласа. Для решения задачи используется преобразование Лапласа по t

$$\bar{u}_i(x, p) = \int_0^{+\infty} u_i(x, t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p \geq p_0 > 0$$

При этом задачу можно разбить на две краевые. Вначале решается

Краевая задача для определения температурного поля. Уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$\Delta \bar{\theta}(x, p) - k^{-1} p \bar{\theta}(x, p) + \bar{g}(x, p) = 0 \quad (2.1)$$

Начальное условие (1.5) трансформируется в асимптотическое

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{\theta}(x, p) = 0, \quad x \in S^- + S$$

Граничное условие имеет аналогичный вид

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n} = \bar{q}(x, p), \quad x \in S \quad (2.2)$$

После определения температурного поля решается

Краевая задача для определения термоупругих перемещений $\bar{u}_i$. Уравнения движения

$$(c_1^2 - c_2^2) \bar{u}_{i,ij} + c_2^2 \Delta \bar{u}_j - \gamma \bar{\theta}_{,j} + \bar{G}_j = p^2 \bar{u}_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.3)$$

содержат градиент теперь уже известной температуры.

Начальные условия (1.4) преобразуются в асимптотические

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{u}(x, p) = 0, \quad x \in S^- + S; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \bar{u}(x, p) = 0, \quad x \in S^-$$

Граничные условия (1.6) имеют вид

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, p)n_j(x) = \bar{p}_i(x, p), \quad x \in S$$

Для решения обеих задач используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ).

3. Граничные интегральные уравнения нестационарной задачи несвязанной термоупругости. Для определения температурного поля используется аппарат теории обоб-

щенных функций по методике, изложенной ранее в [6]. Уравнение температурного поля (2.1) в пространстве обобщенных функций (ПОФ) имеют вид

$$\Delta \hat{\theta}(\mathbf{x}, p) - pk^{-1} \hat{\theta}(\mathbf{x}, p) = -n_j(\mathbf{x}) \partial_j \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) \delta_S(\mathbf{x}) - \partial_j (n_j(\mathbf{x}) \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) \delta_S(\mathbf{x})) - \bar{g}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}, p) = \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}), \quad H_S^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in S^- \\ 1/2, & \mathbf{x} \in S \\ 0, & \mathbf{x} \in S^+ \end{cases}$$

где $f(\mathbf{x}) \delta_S(\mathbf{x})$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на множестве S , с плотностью $f(\mathbf{x})$ [7], $H_S^-(\mathbf{x})$ – характеристическая функция множества S^- .

Сверткой правой части (3.1) с функцией Грина $\bar{\theta}^*(\mathbf{x}, p)$ с учетом (2.2) получаем аналог формулы Грина в ПОФ

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}, p) = \bar{\theta}^*(\mathbf{x}, p) * \bar{q}(\mathbf{x}, p) \delta_S(\mathbf{x}) + \partial_j \bar{\theta}^*(\mathbf{x}, p) * n_j(\mathbf{x}) \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) \delta_S(\mathbf{x}) + \bar{\theta}^*(\mathbf{x}, p) * \bar{g}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

где

$$\bar{\theta}^*(\mathbf{x}, p) = (2\pi)^{-1} K_0(\|\mathbf{x}\| \sqrt{p/k}) \quad (3.3)$$

Интегральное представление трансформант температурного поля (3.2) при учете (3.3) запишем в виде

$$2\pi \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) = \int_{S^-} K_0(r \sqrt{p/k}) \bar{g}(\mathbf{y}, p) dV(\mathbf{y}) + \int_S K_0(r \sqrt{p/k}) \bar{q}(\mathbf{y}, p) dS(\mathbf{y}) - \sqrt{p/k} \int_S K_1(r \sqrt{p/k}) r_j n_j(\mathbf{y}) \bar{\theta}(\mathbf{y}, p) dS, \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (3.4)$$

где $K_n(pr/c_2)$ – функции Макдональда. Для $\mathbf{x} \in S$ третий интеграл справа берется в смысле главного значения.

Соотношение (3.4) для $\mathbf{x} \in S$ является сингулярным ГИУ, которое позволяет найти трансформанту температуры $\bar{\theta}(\mathbf{x}, p)$ на S , если известен тепловой поток $\bar{q}(\mathbf{x}, p)$. Для решения этих уравнений при произвольном контуре S использовались численные методы. После решения ГИУ по формуле (3.4) восстанавливается $\bar{\theta}(\mathbf{x}, p)$ для $\mathbf{x} \in S^-$.

4. Определение поля перемещений и напряжений. Если известно температурное поле $\bar{\theta}(\mathbf{x}, p)$, можно перейти к решению второй краевой задачи, поскольку в (2.3) температурное поле входит теперь уже в виде известной "массовой силы". Далее полагаем $\bar{G}_j = 0$. Искомое решение представляется в виде

$$\bar{u}(\mathbf{x}, p) = \bar{u}^0(\mathbf{x}, p) + \bar{u}^r(\mathbf{x}, p), \quad \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, p) = \bar{\sigma}_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij}^r \quad (4.1)$$

где $\bar{u}^0(\mathbf{x}, p)$ – решение однородного уравнения, назовем его "упругим решением" (соответствующее (1.3) $\bar{F}_j = 0$), а $\bar{u}^r(\mathbf{x}, p)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.3) (условно названное "температурным"). При построении ГИУ для определения перемещений $\bar{u}^0(\mathbf{x}, p)$ здесь используется метод потенциала, ранее развитый авторами для решения краевых задач эластодинамики [6].

Функция $\bar{u}^0(\mathbf{x}, p)$ отыскивается в виде потенциала простого слоя

$$\bar{u}_i^0(\mathbf{x}, p) = \int_S \bar{U}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \bar{\varphi}_j(\mathbf{y}, p) dS(\mathbf{y})$$

где $\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, p)$ – тензор Грина уравнений эластодинамики [6, 8], а плотность $\Phi_j(\mathbf{y}, p)$ – решение ГИУ вида

$$0,5\bar{\Phi}_i(\mathbf{x}, p) = \int_S \bar{\Gamma}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \bar{\Phi}_k(\mathbf{y}, p) dS(\mathbf{y}) = \bar{f}_i(\mathbf{x}, p), \quad \mathbf{x} \in S$$

Здесь

$$\bar{f}_i(\mathbf{x}, p) = \bar{p}_i(\mathbf{x}, p) - \bar{\sigma}_{ij}^r(\mathbf{x}, p) n_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (4.2)$$

Частное решение уравнений (2.3) имеет вид свертки "массовой силы", порождаемой температурным полем, с тензором Грина $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, p)$, которое (при $\hat{G}_j = 0$) приводится к виду

$$\bar{u}_i^r(\mathbf{x}, p) = \gamma p (2\pi c_1^3)^{-1} \int_{S^-} \bar{\theta}(\mathbf{y}, p) K_1(pr/c_1) r_{,i} dv(\mathbf{y}) \quad (4.3)$$

Порождаемые этими перемещениями температурные напряжения определяются формулой

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^r(\mathbf{x}, p) &= \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, p) * \bar{G}_k(\mathbf{x}, p) - \gamma \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) \delta_{ij} - \\ &- \gamma \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, p) * \partial_k \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) + \gamma \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, p) * \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) n_k \delta_S(\mathbf{x}) \\ \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, p) &= \lambda \bar{U}_{m,m}^k \delta_{ij} + \mu (\bar{U}_{i,j}^k + \bar{U}_{j,i}^k) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, p)$ – тензор фундаментальных напряжений, порождаемый $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, p)$.

Соотношение (4.4) запишем в интегральном виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^r(\mathbf{x}, p) &= -\gamma \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) \delta_{ij} - \gamma \int_{S^-} \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \frac{\partial \bar{\theta}(\mathbf{y}, p)}{\partial y_k} dv(\mathbf{y}) \\ &+ \gamma \int_S \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \bar{\theta}(\mathbf{y}, p) n_k(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

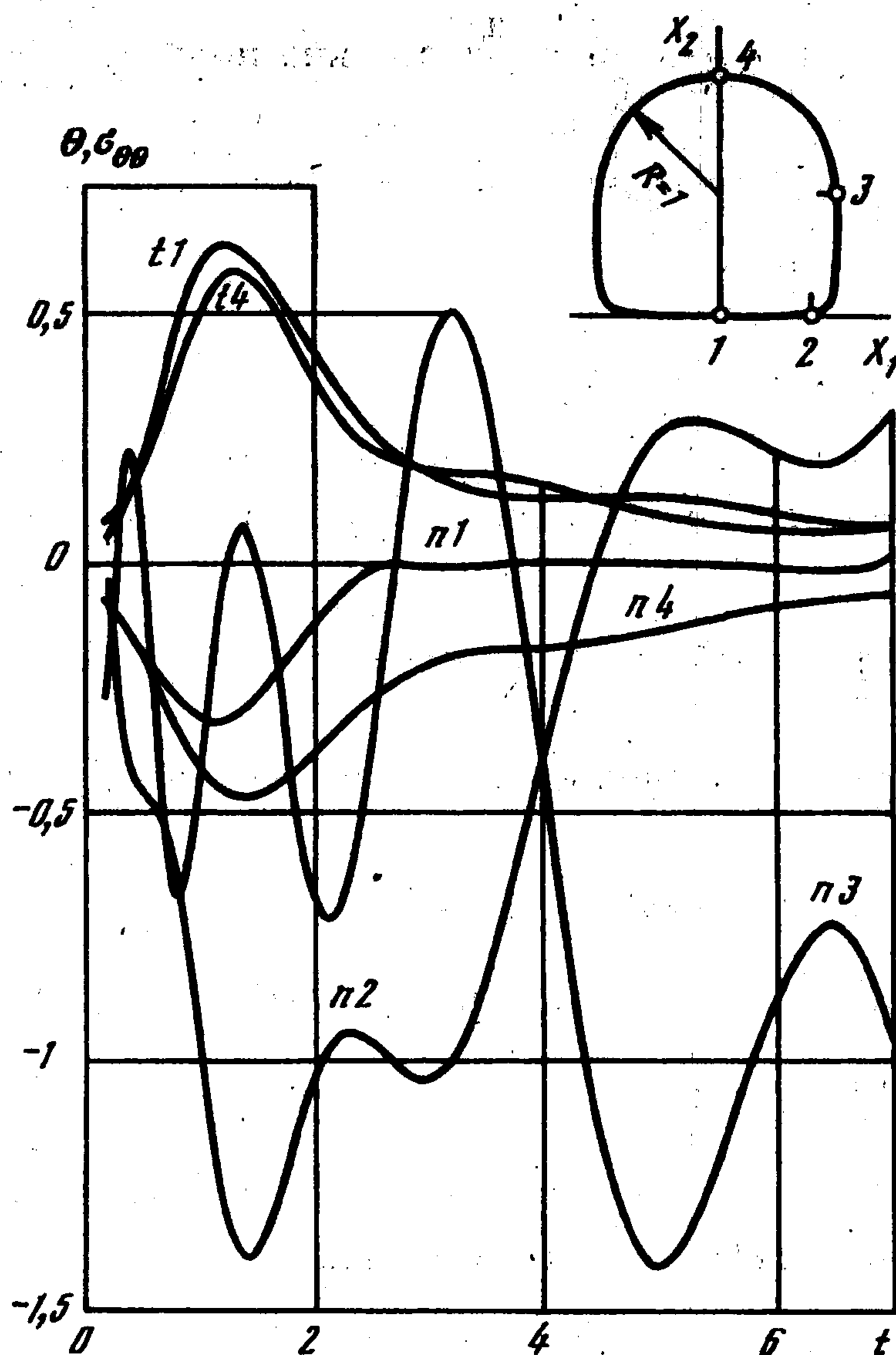
Для $\mathbf{x} \in S^-$ все интегралы существуют, однако при $\mathbf{x} \in S$ последний интеграл в (4.5) имеет сильную особенность, поскольку

$$K_1(r\sqrt{p/k}) \sim (r\sqrt{p/k})^{-1} \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

Формула (4.5) содержит производные от температуры и неудобна для численных расчетов. Преобразуем ее к виду, не содержащему $\bar{\theta}_{,k}$.

Рассмотрим соотношение (4.5) для случая $\mathbf{x} \in S^-$. Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса и регуляризируя возникающие при этом объемные интегралы, получим формулу для вычисления температурных напряжений при $\mathbf{x} \in S^-$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^r(\mathbf{x}, p) &= \gamma \left[\int_{S^-} [\bar{\theta}(\mathbf{y}, 0) - \bar{\theta}(\mathbf{x}, p)] \bar{\Phi}_{ij}^1(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) dv(\mathbf{y}) + \right. \\ &\left. + \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) \int_S \bar{S}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) n_k(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right] - \gamma \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) H_S^-(\mathbf{x}) \delta_{ij} \\ \bar{\Phi}_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) &= \frac{\partial \bar{S}_{ij}^k}{\partial y_k} = \frac{\rho p^2}{2\pi c_1^2} \left(\left((2c^2 - 1) K_0\left(\frac{pr}{c_1}\right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2c^2 \frac{c_1}{pr} K_1\left(\frac{pr}{c_1}\right) \right) \delta_{ij} - 2c^2 \left(K_0\left(\frac{pr}{c_1}\right) + 2 \frac{c_1}{pr} K_1\left(\frac{pr}{c_1}\right) \right) r_{,i} r_{,j} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 1

Соотношение (4.6) не содержит производных от температуры и более удобно для численных расчетов.

При $x \in S$ формулой (4.6) пользоваться нельзя, так как второй интеграл справа не существует. Для определения $\bar{\sigma}_{ij}^r(x, p)$ на границе использовался предельный переход в (4.6) по $x \rightarrow x^*$ ($x \in S^-, x^* \in S$) и формула, полученная ранее ([6], с. 144).

В результате для температурных напряжений при $x \in S$ имеем¹

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^r(x, p) = & \gamma \left[\int_{S^-} [\bar{\theta}(y, p) - \bar{\theta}(x, p)] \bar{\Phi}_{ij}^1(x, y, p) dv(y) + \right. \\ & \left. + V \cdot p \cdot \int_S \bar{S}_{ij}^k(x, y, p) \bar{\theta}(x, p) n_k(y) ds(y) + c^2 \bar{\theta}(x, p) n_i n_j - \bar{\theta}(x, p) (\frac{1}{2} + c^2 \delta_{ij}) \right], \quad c = c_2 / c_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Формула (4.7) позволяет найти правую часть ГИУ (4.2). После решения этих уравнений определяем перемещения и напряжения в среде с помощью соотношений (4.1).

5. Алгоритм численного решения краевой задачи термоупругости. Предлагаемый алгоритм состоит из нескольких этапов: интерполяция граничного контура кубическими сплайнами; построение дискретных аналогов ГИУ (ДАГИУ) путем кусочно-постоянной аппроксимации температуры, линейной аппроксимации $\phi(x, p)$ на каждом граничном элементе, использования квадратурных формул Гаусса для вычисления поверхностных и объемных интегралов; решение ДАГИУ для температуры при

¹Дадаева А.Н. Метод граничных интегральных уравнений в нестационарной краевой задаче термоупругости: Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук по спец. 01.02.04. Алматы, 1995. 22 с.

заданной последовательности значений параметра преобразования Лапласа $\{p_k\}$; вычисление трансформант "температурных" смещений и напряжений; решение ДАГИУ для плотности $\Phi(x, p)$ при заданной последовательности $\{p_k\}$; вычисление оригиналов результирующих смещений и напряжений на основе численного обращения преобразования Лапласа.

Получены дискретные аналоги ГИУ в виде системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых определяется числом граничных элементов N (см. работу, цитированную в сноске).

Определенную трудность представляет вычисление объемных интегралов (4.3) и (4.7). Расчеты проводились для плоскости с отверстием произвольной формы (внешние задачи). Для этого область S^- разбивалась на зоны, вблизи границы соизмеримые с размером граничных элементов. При интегрировании внутри криволинейных элементов использовались кубические функции формы плоского элемента.

Для численного обращения трансформант решений использовались две схемы обращения: Папулиса [9], для которой требуется знание трансформант решений на действительной оси, и дискретного преобразования Лапласа [10] для комплексных значений p .

Для тестирования алгоритма использовано аналитическое решение задачи о термонапряженном состоянии плоскости, ослабленной круговым отверстием (см. работу, цитированную в сноске), с граничными условиями при $R = \|x\| = 1$:

$$q(x, t) = H(t), \quad \sigma_{ij}(x, t)n_j(x) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (5.1)$$

($H(t)$ – функция Хевисайда). В расчетах приняты следующие значения безразмерных параметров: $\nu = 0,25$, $\rho = 1$, $c_1 = 1$, $\gamma = 1$, $k = 1$.

Расчеты трансформанты температуры $\theta(x, p)$ показали, что при увеличении числа граничных элементов N относительная погрешность ϵ уменьшается. Так, при $p = 0,1$, $R = 1$ увеличение N от 12 до 60 приводит к уменьшению ϵ от 0,015 до 0,003, а при $p = 0,1$, $R \geq 1,5$ – к уменьшению ϵ от 0,0014 до 0,0002; при $p = 2$, $R = 1$ – к уменьшению ϵ от 0,057 до 0,011, а при $p = 2$, $R \geq 1,5$ – к уменьшению ϵ от 0,017 до 0,003. То же наблюдается для значений $\sigma_{\theta\theta}$, вычисленных при $R = 1$ (на границе контура).

Значения температуры и тангенциальных напряжений, вычисленных по схеме Папулиса и по схеме дискретного преобразования Лапласа, практически совпадают: относительная погрешность в пределах 0,01.

Для иллюстрации возможностей разработанного алгоритма решены задачи об определении термонапряженного состояния плоскости, ослабленной сводчатым отверстием (фигура), при действии постоянного теплового потока вида (5.1) (см. цитированную в сноске работу) и импульсном тепловом потоке

$$q(x, t) = tH(t)H(1-t) - (t-2)H(t-1)H(2-t) \quad (5.2)$$

Здесь обращение трансформант проводилось по схеме Папулиса.

На фигуре представлены результаты расчетов в характерных точках свода в случае (5.2). Кривые $t1-t4$ соответствуют значениям температуры $\theta(x, t)$ в четырех точках свода: $(0, 0)$, $(0, 9, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ (кривые $t2$ и $t3$ проходят между $t1$ и $t4$ и на фигуре не показаны), а $n1-n4$ – значениям нормальных напряжений на тангенциальных площадках в этих точках. Температура и напряжения в точках свода, где кривизна непрерывна, имеют импульсный характер, подобный (5.2). В точках 2 и 3, где кривизна терпит скачок, возникает колебательный процесс. Отметим, что при больших временах проявляется неустойчивость схемы численного восстановления оригиналов, что не позволяет проследить асимптотику решений с течением времени. Однако при малых временах, характерных для переходных процессов, алгоритм расчета на основе метода ГИУ достаточно устойчив.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
2. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
3. *Sladek J., Sladek V.* BIE method in thermoelasticity. Part. 3. Uncoupled thermoelasticity // ZAMM. 1990. Bd. 70. H. P. 141–144.
4. *Durgush G.F., Banerjee P.K.* Development of a boundary element method time-dependente planer thermoelasticity // Intern. J. Solid and Struct. 1989. V. 25. № 9. P. 999–1021.
5. *Smith D.W., Booker J.R.* Boundary integral analysis of transient thermoelasticity // Intern. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech 1989. V. 13. № 3. P. 283–302.
6. *Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б.* Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: Галым, 1992. 227 с.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
8. *Cruse T., Rizzo F.J.* A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 22. № 1. P. 244–259.
9. *Papoulis A.* A new method of an inversion of the Laplace transform // Qart. Appl. Math. 1957. V. 14. № 4. P. 405–414.
10. *Wilcox D.J., Gibson I.S.* Numerical Laplace transformation and inversion in the analysis of physical systems // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1984. V. 20. № 8. P. 1507–1519.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
20.X.1998