

УДК 539.3

© 1999 г.

А.А. Евтушенко, Ю.А. Пырьев

О ПРИМЕНИМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ИЗНОСА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЯДРОМ В ОДНОМЕРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ УЧЕТЕ ФРИКЦИОННОГО ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ

Получено аналитическое решение контактной задачи для жесткой теплоизолированной плиты и упругого теплопроводящего слоя в условиях его изнашивания и фрикционного разогрева при отсутствии сближения контактирующих тел. Прослежена эволюция контактного давления, температуры и износа. Установлены условия возникновения термоупругой неустойчивости. Получены условия применимости рассматриваемой модели износа.

1. Введение. В контактных задачах, как правило, используются модели износа, предполагающие конечную алгебраическую зависимость скорости изнашивания от давления P , скорости скольжения V и других параметров [1–3]. Однако при переменных условиях нагружения в трибосистеме могут также наблюдаться эффекты последействия [4]. При этом закон износа представляет собой в общем случае функционал наследственного типа, вид которого может быть найден экспериментальным путем. Наследственная модель учитывает релаксацию вклада в общий износ за время t всех предшествующих возмущений в моменты времени τ с помощью функции памяти $K(t - \tau)$. В частности, был использован [5] закон износа с экспоненциальным ядром

$$U^w(t) = K_U V \int_0^t P(\tau) K(t - \tau) d\tau, \quad K(t - \tau) = e^{-\gamma(t - \tau)} \quad (1.1)$$

описывающим, как отмечалось [6], процессы с ограниченной величиной износа. Для этого закона характерно, что не для всех значений параметра γ и коэффициента износа K_U скорость изнашивания

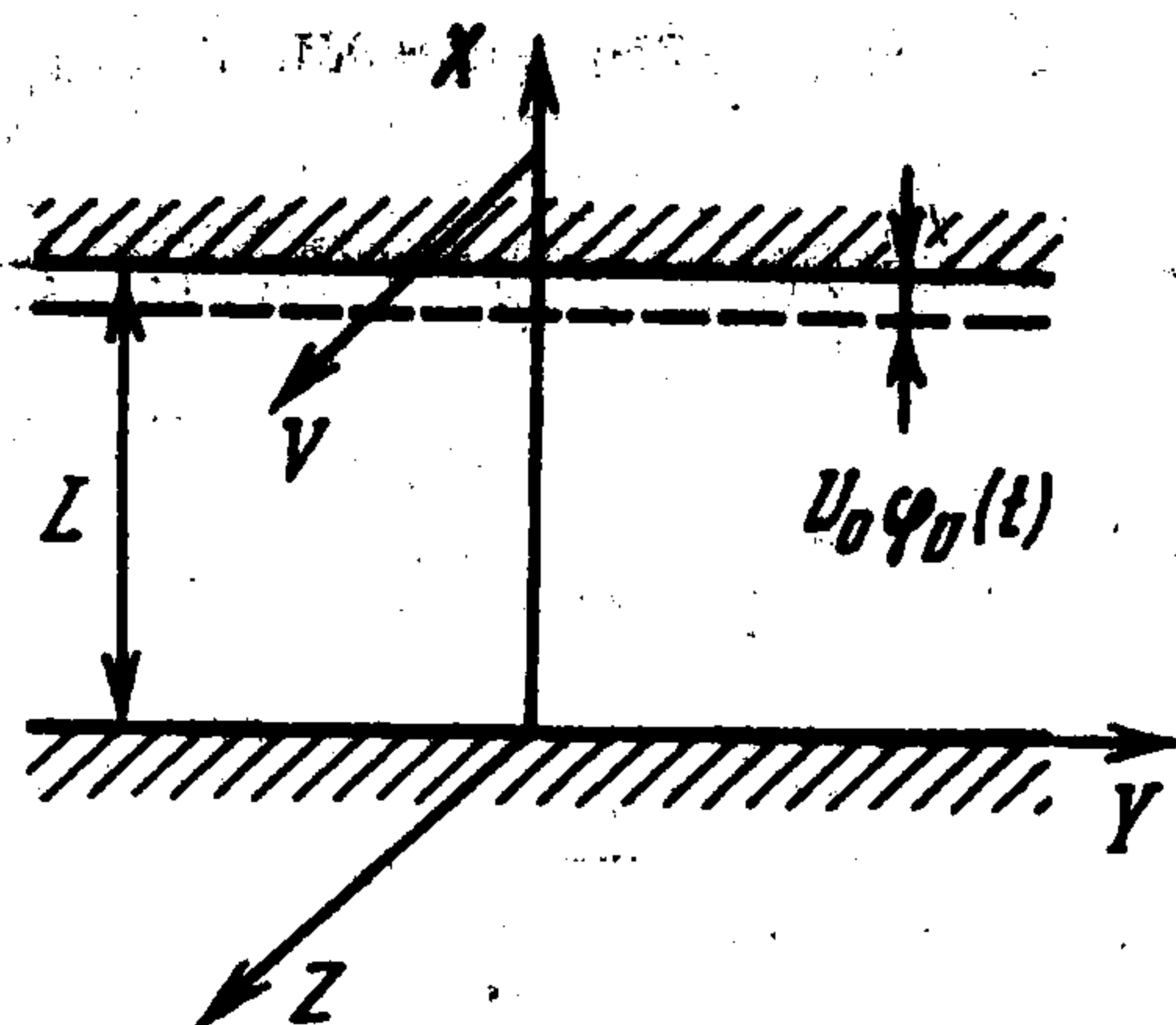
$$\partial U^w(t) / \partial t = -\gamma U^w(t) + K_U V P(t)$$

априорно будет положительной.

Ниже исследуются поля температуры, контактного давления и величины износа упругого теплопроводящего слоя, сжимаемого жесткой, равномерно скользящей, теплоизолированной плитой в условиях фрикционного нагрева. Установлено, при каких соотношениях между входными параметрами задачи возможно применение наследственной модели износа вида (1.1). Также найдены условия возникновения фрикционной термоупругой неустойчивости (ФТУН) системы. Под последней будем понимать неограниченное возрастание контактных характеристик (температура, давление, износ) при незначительном изменении входных параметров.

Термоупругая неустойчивость исследовалась в конструкциях типа торцевых и радиальных уплотнителей при наличии осесимметричных возмущений [7]. Условия возникновения теплового взрыва (неограниченной контактной температуры) и термосиловой устойчивости

(убывание со временем давления и температуры на контакте) в предположении линейной зависимости коэффициентов трения и износостойкости от температуры рассмотрены в задаче контактного взаимодействия упругого слоя с жестким штампом [8] и в случае неидеального теплового контакта двух сжимаемых равномерно скользящих слоев [9]; процесс теплопроводности в слоях считался квазистационарным. Рассматривался также вопрос об устойчивости квазистационарного решения термоупругой задачи износа [10].



Фиг. 1

2. Постановка и решение задачи. Пусть упругий теплопроводящий слой (ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, λ , k , α – соответственно коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и линейного температурного расширения) толщины L , жестко зашпелен по основанию, а на верхней грани сжимается жесткой теплоизолированной бесконечной плитой на величину $U = U_0 \varphi_U(t)$ (фиг. 1). Плита скользит в направлении оси Z с постоянной скоростью V . В области контакта плиты со слоем за счет сил трения одновременно происходит тепловыделение и изнашивание, а между основанием слоя и окружающей средой – теплообмен по закону Ньютона.

Требуется определить поле приращения температуры $T(X, t)$, термоупругих перемещений $U(X, t)$, $W(X, t)$ по осям X и Z соответственно и величину износа слоя $U^w(t)$.

Задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений Ламе – Неймана квазистатической несвязанной термоупругости [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X^2} U(X, t) &= \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial X} T(X, t), \quad \frac{\partial^2}{\partial X^2} W(X, t) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} T(X, t) &= k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} T(X, t), \quad 0 < X < L, \quad 0 < t < t_c \end{aligned} \quad (2.1)$$

при механических

$$\begin{aligned} U(0, t) &= W(0, t) = 0, \quad \sigma_{XZ}(L, t) = fP(t) \\ U(L, t) &= -U_0 \varphi_U(t) + U^w(t), \quad 0 < t < t_c \end{aligned} \quad (2.2)$$

тепловых

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial X} T(0, t) &= hT(0, t) \\ \lambda \frac{\partial}{\partial X} T(L, t) &= fVP(t), \quad 0 < t < t_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

и начальном

$$T(X, 0) = 0, \quad 0 < X < L \quad (2.4)$$

условиях.

Здесь f – коэффициент трения, h – коэффициент теплообмена, а время контакта t_c определяется как время при котором контактное давление $P(t) = -\sigma_{XX}(L, t)$ неотрицательно ($P(t) \geq 0$ при $t \in (0, t_c]$).

Нормальные и касательные напряжения для слоя находятся согласно соотношений Дюгамеля – Неймана [11]

$$\sigma_{XX} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial U}{\partial X} - \alpha T \right], \quad \sigma_{XZ} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial W}{\partial X} \quad (2.5)$$

С учетом соотношений (2.5) и граничных условий (2.2) из уравнений (2.1) находим

$$P(t) = \frac{E_1}{L} \left[U_0 \varphi_U(t) - U^w(t) + \alpha_1 \int_0^L T(\xi, t) d\xi \right]$$

$$W(X, t) = \frac{1+\nu}{E} fP(t)X \quad (2.6)$$

$$E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_1 = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{X}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \tau_c = \frac{t_c}{t_*}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad v = \frac{Vf\Omega}{V_*}, \quad u^w = \frac{U^w}{U_0}$$

$$\theta = \frac{T}{T_*}, \quad p = \frac{P}{P_*}, \quad \Omega = \frac{E\alpha k}{\lambda(1-2\nu)}, \quad \xi = \frac{E_1 K_U}{f\Omega}, \quad \gamma = \gamma' t_*, \quad \text{Bi} = \frac{hL}{\lambda}$$

и характерные параметры

$$t_* = \frac{L^2}{k}, \quad V_* = \frac{k}{L}, \quad T_* = \frac{U_0}{\alpha_1 L}, \quad P_* = \frac{E_1 U_0}{L}$$

Тогда получим краевую задачу теплопроводности

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(x, \tau), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \tau < \tau_c$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(0, \tau) = \text{Bi} \theta(0, \tau) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(1, \tau) = v p(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_c$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

где безразмерные давление и износ соответственно равны

$$p(\tau) = \varphi_U(\tau) - u^w(\tau) + \int_0^1 \theta(\xi, \tau) d\xi \quad (2.8)$$

$$u^w(\tau) = \xi v \int_0^\tau p(\eta) K(\tau - \eta) d\eta$$

Решение краевой задачи (2.7), (2.8) получим при помощи интегрального преобразования Лапласа по времени τ , причем для перехода в область оригиналов воспользуемся теоремами разложения и умножения изображений [12]. В результате получим решение в виде

$$\theta(x, \tau) = v \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} g(x, \tau)$$

$$p(\tau) = \varphi_U(\tau) + v \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} G(\tau) \quad (2.9)$$

$$u^w(\tau) = v \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} I(\tau)$$

где

$$g(x, \tau) = g_1(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(x, s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} e^{s_m \tau}$$

$$G(\tau) = G_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_4(s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} e^{s_m \tau}, \quad I(\tau) = I_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi \Delta_1(s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} e^{s_m \tau} \quad (2.10)$$

$$g_1(x) = \frac{G_0 \text{Bi}_x \xi_c}{\xi_c - \xi}, \quad G_0 = \frac{1}{v_1 - v}, \quad I_1 = \frac{\xi}{\xi_c - \xi} G_0, \quad \xi_c = \frac{\gamma}{v_0}$$

$$v_1 = \frac{v_0 \xi_c}{\xi_c - \xi}, \quad v_0 = \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}/2}, \quad \text{Bi}_x = \frac{1 + x \text{Bi}}{1 + \text{Bi}/2}$$

$$\Delta_1(s_m) = \text{Bi} C_m + s_m S_m, \quad \Delta_2(s_m) = S_m - \text{Bi} C_m^0$$

$$\Delta_3(x, s_m) = (s_m + \gamma)(\text{Bi} S_m^x + C_m^x), \quad C_m^0 = -(C_m - 1)/s_m$$

$$\Delta_4(s_m) = (s_m + \gamma)\Delta_2(s_m) - \xi \Delta_1(s_m)$$

$$\Delta'(s_m) = \frac{1}{2} \{ (s_m + \gamma)[(\text{Bi} + 1)S_m + C_m - v s_m^{-1} [C_m - S_m + \text{Bi}(S_m + 2C_m^0)]] +$$

$$+ 2[\Delta_1(s_m) - v \Delta_2(s_m)] + \xi v [(1 + \text{Bi})S_m + C_m] \}$$

$$S_m = D_m^{-1} \text{sh } D_m, \quad S_m^x = D_m^{-1} \text{sh}(D_m x), \quad C_m = \text{ch } D_m, \quad C_m^x = \text{ch}(D_m x), \quad D_m = \sqrt{s_m}$$

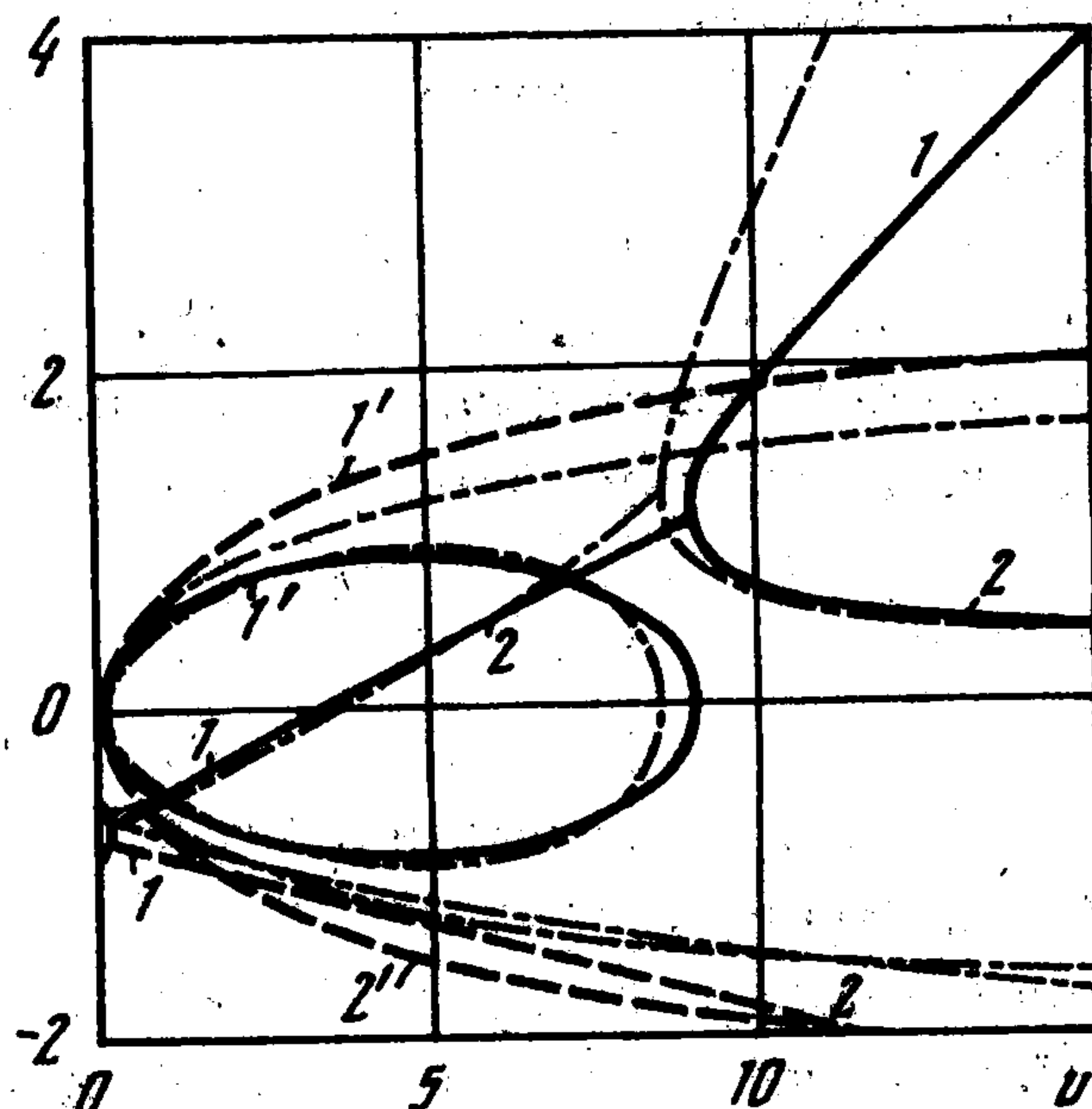
Звездочка означает свертку функций по времени, s_m – корни характеристического уравнения $\Delta(s) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$).

Проведем анализ этих корней. $\text{Im } s_m = 0$, $\text{Re } s_m < 0$ при $m = 3, 4, \dots$, а при $m = 1, 2$ корни, в зависимости от входных параметров задачи, расположены в правой или левой половине комплексной плоскости s . При $v = v_{2,3}$ корни s_1 и s_2 совпадают, при $v = v_b$ действительная часть комплексно-сопряженных корней s_1 и s_2 равна нулю. При $v = v_1$ один из корней равен нулю.

Случай $\gamma < \gamma_*$. При $\xi < \xi_*$ где

$$\gamma_* = \frac{v_0}{\text{Bi}_2}, \quad \text{Bi}_2 = \frac{1 + 5\text{Bi}/6 + 5\text{Bi}^2/24}{(1 + \text{Bi}/2)^2}, \quad \xi_* = \xi_c \frac{\gamma}{\gamma_*}$$

причем $v < v_2$ и $v_3 < v < v_1$, корни отрицательны, при $v_2 < v < v_3$ – комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью, при $v_1 < v$ корень s_1 – положительный, s_2 – отрицательный. При $\xi_* < \xi < \xi_c$, $v < v_b$ корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью, при $v_b < v < v_3$ – комплексно-сопряженные с положительной действительной частью, при $v > v_3$ – положительны, причем если дополнительно $v > v_1$, то корень s_2 становится отрицательным. При $\xi_c < \xi < \xi_1$, $v < v_b$ корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью, при $v_b < v < v_3$ – комплексно-сопряженные с положительной действительной частью, при $v_3 < v$ – положительны. При $\xi_b < \xi$ и $\max(v_2,$



Фиг. 2

$\max(u_2, 0) < v < v_3$, если $v_3 > 0$ или $\max(u_2, 0) < v < \infty$, если $v_3 < 0$, корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью, при $0 < v_3 < v$ — отрицательные.

Для значений $\gamma = 0,5$, $Bi = 1,43$ на фиг. 2 представлено изменение действительной и мнимой части корней s_1 и s_2 в зависимости от безразмерной скорости v . Корни 1 и 1' (2 и 2') соответствуют действительной и мнимой части корня s_1 (s_2). Сплошные и штриховые линии относятся к значениям $\xi = 0,7$ и $\xi = 1,4$ соответственно.

Случай $\gamma > \gamma_$.* При $\xi < \xi_c$, если $v < v_1$, то корни отрицательны, если $v > v_1$, то корень s_1 положительный, s_2 — отрицательный. При $\xi_c < \xi$ корни отрицательны для произвольной скорости v .

В окрестности нуля корни s_1 и s_2 могут быть записаны в явном виде

$$s_{1,2} = -\tilde{\alpha} \pm \tilde{\omega} \quad (2.11)$$

$$\tilde{\alpha} = b/(2a), \quad \tilde{\omega} = |\tilde{\alpha}| \sqrt{1 - 4ac/b^2}$$

$$a = a_2(v_a - v), \quad b = b_2(v_b - v), \quad c = c_2(v_1 - v), \quad a_2 = (\xi_a - \xi)Bi_4$$

$$b_2 = \xi_b - \xi, \quad c_2 = (\xi_c - \xi)v_0, \quad \xi_b = 1 + \gamma Bi_4, \quad \xi_a = 1 + \gamma Bi_3/Bi_4$$

$$v_a = \frac{\xi_b}{a_2}, \quad v_b = \frac{\gamma + v_0}{b_2}, \quad Bi_3 = \frac{1 + Bi/6}{120(1 + Bi/2)}, \quad Bi_4 = \frac{1 + Bi/4}{6(1 + Bi/2)}$$

Изменение действительной и мнимой части приближения по формулам (2.11) корней s_1 и s_2 в зависимости от безразмерной скорости v представлены на фиг. 2 штрихпунктирными кривыми для $\xi = 0,7$ и $\xi = 1,4$.

Соотношения (2.11) позволяют написать приближенные выражения для значений v_m , $m = 2, 3$, и ξ_1 .

3. Теоретический анализ результатов. В качестве примера в дальнейшем изучим характеристики термоупругого контакта в процессе изнашивания при постоянной по времени величине сжатия слоя, т.е. $\varphi_U(\tau) = H(\tau)$, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда.

На основе аналитического исследования свойств решений (2.9) получены следующие асимптотики температуры, давления и износа для малых значений времени:

$$\theta(1, \tau) = 2v \sqrt{\tau/\pi} + O(\tau^{3/2}), \quad p(\tau) = 1 + v(1 - \xi)\tau + O(\tau^2) \quad (3.1)$$

$$u''(\tau) = v \xi \tau + O(\tau^2); \quad \xi = \lambda K_U(1 - v)/[f\alpha k(1 + v)]$$

Соотношения (2.11)–(3.1) и графики на фиг. 2 позволяют прогнозировать поведение характеристик термоупругого контакта слоя в условиях фрикционного нагрева и износа.

Параметр ξ характеризует взаимовлияние износа и теплового расширения.

В отсутствие износа ($\xi = 0$ или $\gamma = \infty$) при скоростях скольжения, меньших критического значения v_0 , с течением времени контактное давление и температура выходят на стационарные значения

$$p_c = \frac{v_0}{v_0 - v}, \quad \theta_c(x) = \frac{x Bi + 1}{Bi} p_c v$$

так как за счет теплоотдачи приток и отток тепла в системе взаимно компенсируются. При стремлении скорости v к своему критическому значению v_0 время выхода на стационарный режим увеличивается.

При скоростях выше критической ($v > v_0$) температура и контактное давление возрастают по экспоненциальному закону, т.е. имеет место фрикционная термоупругая неустойчивость (ФТУН).

В случае абразивного износа ($\gamma = 0$) при $0 < \xi < 1$ (когда величина температурного

расширения преобладает над величиной износа) для $v \leq v_2$ время контакта $\tau_c = \infty$, и характеристики контакта со временем стремятся к своим стационарным значениям $p_c = 0$, $\theta_c(x) = 0$, $u_c^w = 1$. Время достижения системой установившегося состояния увеличивается при $v \rightarrow v_2$. Если $v_2 < v < v_3$, то время контакта ограничено. Минимальное время контакта будет при скоростях $v \approx (v_2 + v_3)/2$, т.е. когда максимального значения достигает величина $\text{Im} s_1$. При приближении v к v_3 максимальные значения давления, температуры и износа увеличиваются. При скорости $v > v_3$ возникает ФТУН.

При $\xi \geq 1$ (когда величина износа преобладает над величиной температурного расширения) для $v \leq v_2$ характеристики контакта со временем стремятся к стационарным значениям $p_c = 0$, $\theta_c(x) = 0$, $u_c^w = 1$. При $v \geq v_2$ время контакта τ_c ограничено, хотя формально стационарное решение существует. "Формально" здесь и в дальнейшем означает, что при выходе на стационарное решение функция, характеризующая давление или интенсивность износа, меняет знак. С возрастанием скорости скольжения время контакта уменьшается.

В общем случае при $\gamma < \gamma_*$, $\xi < \xi_*$ и при $v < v_1$ время контакта $\tau_c = \infty$, и характеристики контакта со временем стремятся к своим стационарным значениям

$$p_c = \frac{v_1}{v_1 - v}, \quad \theta_c(x) = \frac{x \text{Bi} + 1}{\text{Bi}} p_c v, \quad u_c^w = \xi v p_c \quad (3.2)$$

Время выхода на стационарный режим увеличивается при стремлении v к v_1 . Когда $v > v_1$, то имеет место ФТУН. При $\xi_* < \xi < \xi_c$, $v < v_b$ формально существует стационарное решение (3.2) (при выходе на него скорость изнашивания меняет знак); при $v_b < v < v_3$ время контакта ограничено, а скорость изнашивания также меняет знак. При $v > v_3$ имеет место ФТУН. При $\xi_c < \xi < \xi_1$, $v < v_3$ время контакта ограничено, причем скорость изнашивания отрицательна. При $v > v_3$ наблюдается ФТУН. При $\xi_b < \xi$, для всех v формально существует стационарное решение (3.2) (скорость изнашивания также меняет знак).

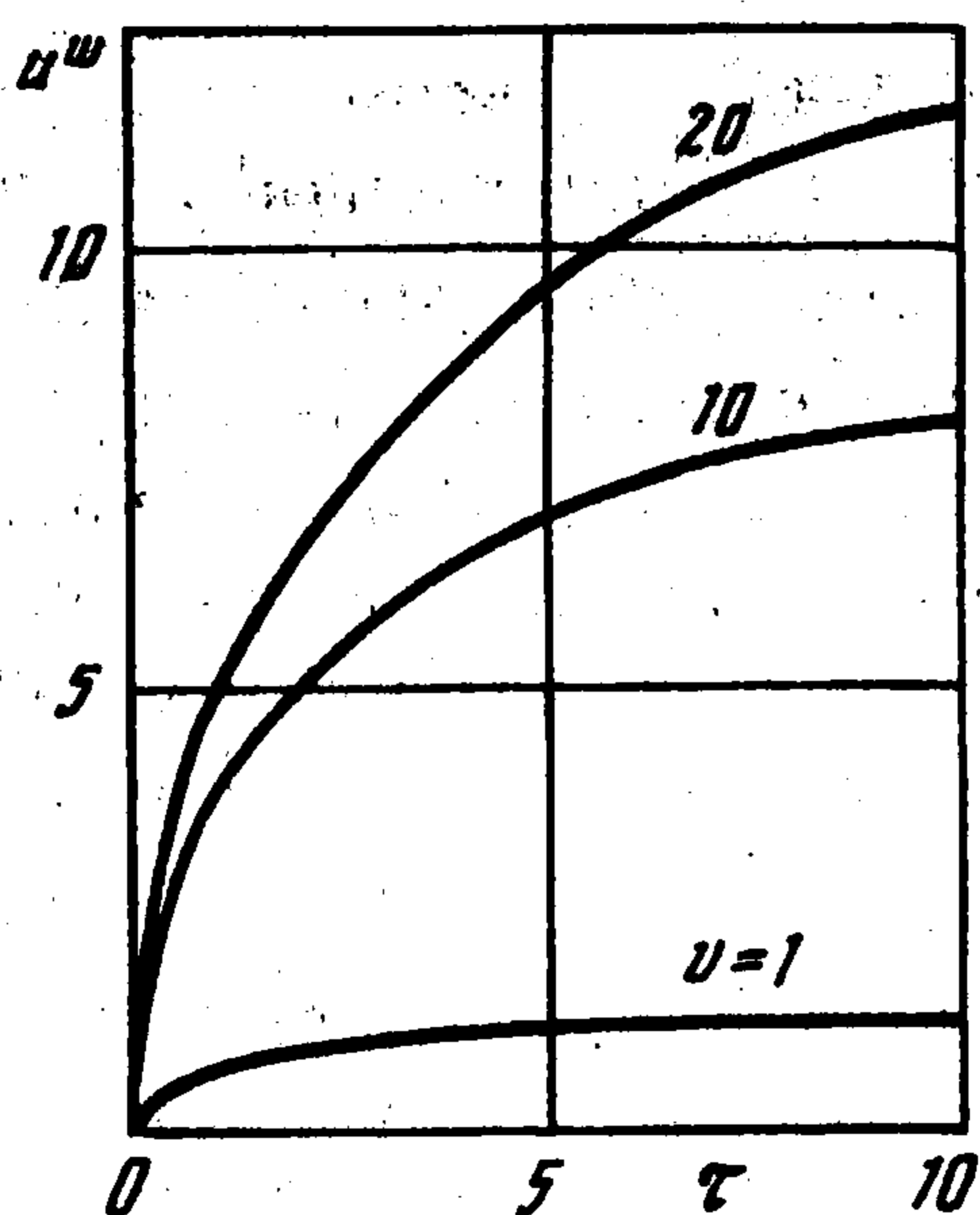
Таким образом, когда система не находится в условиях ФТУН, и при $0 < \gamma < \gamma_*$, $\xi_* < \xi$ функция износа не является монотонно-возрастающей и применение наследственной модели (1.1) неправомерно.

В общем случае при $\gamma > \gamma_*$, $\xi < \xi_c$, $v < v_1$ характеристики контакта со временем стремятся к стационарному решению задачи (3.2). При $v > v_1$ имеет место ФТУН. При $\xi_c < \xi$ для всех v с течением времени контактное давление и температура выходят на стационарный режим; при этом контактное давление не превышает начального значения.

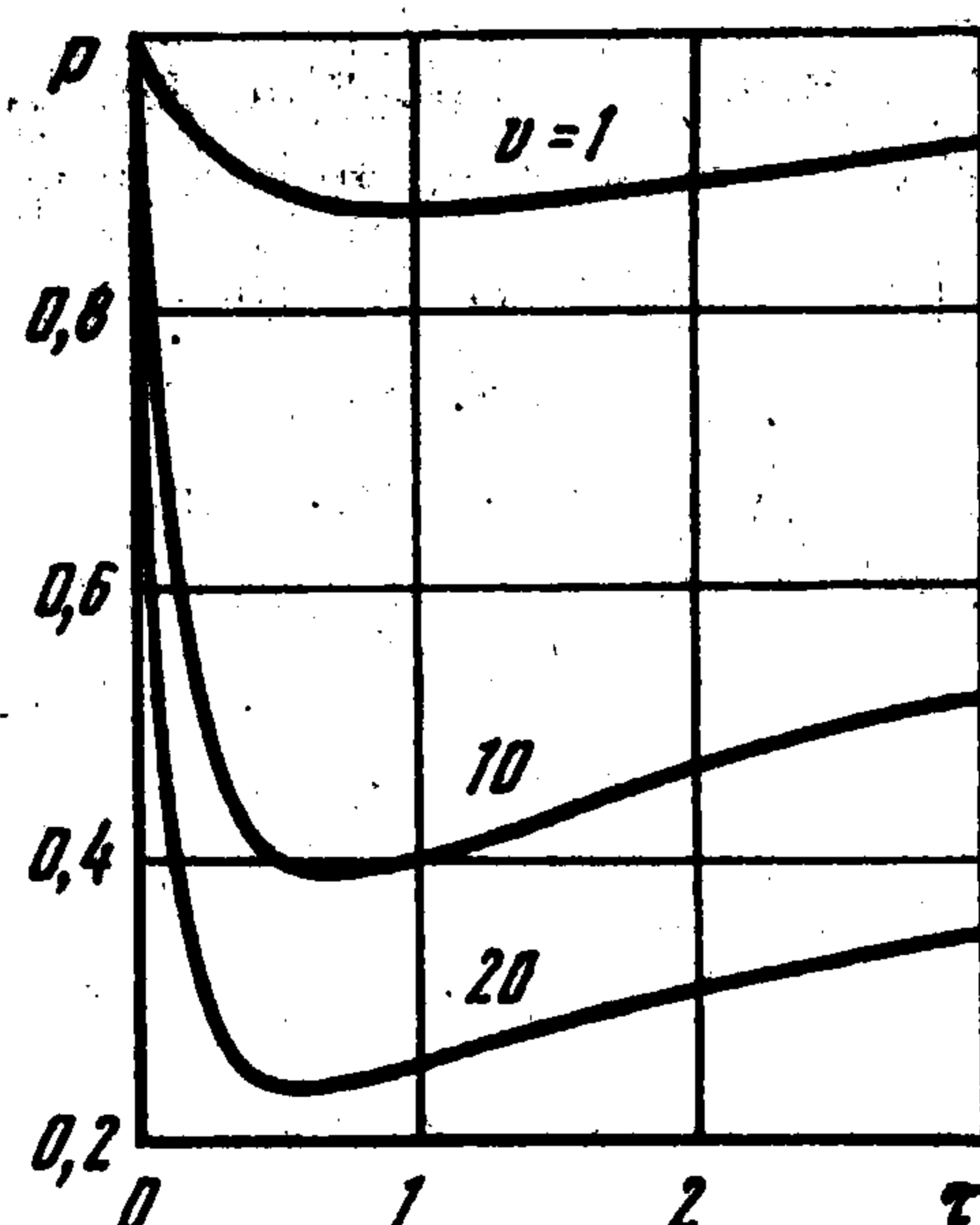
Контактное давление при $\xi \geq 1$ с течением времени всегда монотонно стремится к нулю (в отличие от случая $0 < \xi < 1$, когда оно имеет максимум).

4. Численные результаты. Для иллюстрации проведенного теоретического анализа поведения контактных характеристик получено численное решение задачи для стального слоя ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K = 21 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $k = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $v = 0,3$, $E = 190 \cdot 10^9 \text{ Па}$) при $L = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $\text{Bi} = 1,43$, $U_0 = 10^{-6} \text{ м}$, $f = 10^{-2}$ для значений безразмерной скорости скольжения u . Тогда значения параметров обезразмеривания следующие: $t_* = 153 \text{ с}$, $V_* = 1,97 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, $P_* = 8,53 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $T_* = 1,28 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Величине $\text{Bi} = 1,43$ соответствует критическое значение параметра $\gamma_* = 0,936$. Значение параметра $\gamma = 1,2$ взято из условия правомерности применения наследственной модели износа (1.1). Тогда $\xi_c = 1,44$. Рассмотрен случай преобладания величины износа над температурным расширением ($\xi = 1,5$).

На фиг. 3, 4 показаны зависимости безразмерной величины износа u^w и безразмерного контактного давления p от безразмерного времени τ при разных значениях безразмерной скорости. Видно, что на начальном этапе происходит интенсивное изнашивание, что



Фиг. 3



Фиг. 4

приводит к резкому падению контактного давления. Со временем интенсивность изнашивания вследствие приработки падает, давление начинает возрастать и выходит вместе с величиной износа на стационарные значения (3.2).

5. Выводы. Получено аналитическое решение контактной задачи для жесткой теплоизолированной плиты и упругого теплопроводящего слоя в условиях его износа и фрикционного разогрева при отсутствии сближения контактирующих тел. Прослежена эволюция контактного давления, температуры и износа.

Установленные аналитические значения для характерных значений скорости u_m , $m = 1, 2, 3$, параметров γ_* , ξ_c , ξ_* , ξ_1 позволяют прогнозировать поведение во времени характеристик фрикционного контакта.

Для рассматриваемой модели фрикционного контакта установлены условия возникновения ФТУН

$$\gamma \in [0; \gamma_*], \quad \xi \in [0; \xi_*], \quad \nu \in [\nu_1; \infty)$$

$$\gamma \in [0; \gamma_*], \quad \xi \in [\xi_*; \xi_1), \quad \nu \in [\nu_3; \infty)$$

$$\gamma \in [\gamma_*; \infty), \quad \xi \in [0; \xi_c), \quad \nu \in [\nu_1; \infty)$$

В случае абразивного износа ($\gamma = 0$) критическое значение скорости ν_3 , при котором возникает ФТУН, увеличивается и при $\xi \geq 1$ (когда износ преобладает над термоупругим расширением) ФТУН вовсе исчезает. Таким образом, абразивный износ выступает стабилизирующим фактором.

В случае наследственной модели износа получены условия применимости рассматриваемой модели.

Общепринятое мнение, что неустойчивость возникает при условии расположения нулей характеристического уравнения в правой половине комплексной плоскости параметра преобразования Лапласа, для данной модели фрикционного контакта требует уточнения. Эти корни должны иметь нулевую мнимую часть. Наличие мнимой части приводит к ограниченности времени контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1998. 253 с.
2. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 576 с.
3. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей //

- Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М.: Наука, 1971. С. 130–140.
4. Блюмен А.В. К вопросу о кинетике процессов трения и изнашивания и методах ее аналитического описания // Расчетно-экспериментальные методы оценки трения и износа. М.: Наука, 1980. С. 27–33.
 5. Кузьменко А.Г. Контактные задачи с учетом износа для цилиндрических опор скольжения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 3. С. 502–512.
 6. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.
 7. Мороз В.А. Анализ термоупругой неустойчивости в трибосистемах типа подвижных уплотнителей при осесимметричном возмущении // Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата. Якутск: Изд-во ЯФ СО АН СССР, 1985. С. 21–33.
 8. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 1. С. 24–28.
 9. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
 10. Александров В.М., Коваленко Е.В. Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей // ПМТФ. 1985. № 3. С. 129–131.
 11. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
 12. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Львов

Поступила в редакцию
7.X.1996