

УДК 539.3+624.074

© 1999 г. В.Д. Потапов

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ
УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

Исследуется асимптотическая устойчивость почти наверное и в среднеквадратичном вязкоупругой системы, находящейся под действием нагрузки в виде случайного стационарного широкополосного эргодического процесса. Поведение такой системы описывается интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) со стохастическими параметрами. Устойчивость рассматривается по отношению к возмущению начальных условий. Определяющее соотношение принимается в интегральной форме с разностным ядром ползучести (или релаксации), удовлетворяющим условию ограниченной ползучести материала. На основе фундаментального решения соответствующего детерминированного ИДУ и его максимального показателя Ляпунова получено достаточное условие устойчивости нулевого решения исходного уравнения, или, что то же самое, положения равновесия вязкоупругой системы.

Интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) встречаются как в задачах вязкоупругости, так и в других областях науки, где необходимо учесть последствие или запаздывание (например, в теории управления, биологии, экологии, медицине и т.д. [1–7]). При описании поведения упругих систем внутреннее трение материала обычно учитывается с помощью модели Фойгта, хотя известно, что даже в системах конечным числом степеней свободы, большим единицы, она приводит к неверным результатам, поскольку для большинства материалов внутреннее трение фактически не зависит или, по крайней мере, слабо зависит от скорости колебаний в достаточно широком частотном диапазоне. В этом смысле более предпочтительна модель материала, обладающего наследственными свойствами [8, 9], что также приводит к ИДУ.

Была решена [10–12] задача об устойчивости вязкоупругого стержня, для материала которого ядро релаксации принимается в виде экспоненты или их суммы. Стержень находился под действием продольной силы в виде случайного стационарного процесса, представимого белым шумом. Получено условие асимптотической устойчивости по отношению к математическому ожиданию и в среднеквадратичном [11], а также достаточные условия устойчивости почти наверное [10, 12].

В случае действия нагрузок в форме произвольного стационарного процесса для распределенных вязкоупругих систем получены достаточные условия устойчивости почти наверное и в среднеквадратичном [13].

Однако ядра экспоненциального типа не позволяют адекватно описать внутреннее демпфирование материала [9], да и ползучесть многих материалов описывается более сложными по сравнению с экспоненциальными (или вырожденными) ядрами. В таком случае при исследовании устойчивости систем не удастся произвести замену ИДУ дифференциальными уравнениями. При решении задачи устойчивости вязкоупругих элементов конструкций, материал которых обладает свойством старения [1–3], внешние нагрузки считались белым шумом. В аналогичной задаче для неконсервативных систем получены достаточные условия устойчивости в среднеквадратичном [14]. Найдено [12] достаточное условие устойчивости почти наверное для вязкоупругой системы при действии произвольной стационарной нагрузки и произвольном ядре релаксации материала с помощью прямого метода Ляпунова.

Следует отметить, что применение прямого метода Ляпунова связано с выбором подходящего функционала Ляпунова, что в случае ИДУ связано с преодолением таких трудностей, что процедуру конструирования подобных функционалов можно сравнить с искусством [15].

Ниже рассматривается метод исследования устойчивости нулевого решения линейного ИДУ, основанного на использовании фундаментального решения вспомогательного детерминированного уравнения.

1. Постановка задачи. Будем считать, что соотношение между напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\epsilon(t)$ при одноосном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma = E(1 - R)\epsilon, \quad R\epsilon \equiv \int_0^t R(t - \tau)\epsilon(\tau)d\tau$$

где $E = \text{const}$ – модуль упругости материала, $R(t - \tau)$ – ядро релаксации материала, t – время.

В случае изотропного материала движение вязкоупругой системы, находящейся под действием параметрической нагрузки, описывается уравнением, которое в операторной форме можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + (1 - R)Bu - Cu = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u(x, t)$ – перемещение системы, x – вектор пространственных координат, t – время. При фиксированном времени t функцию u можно рассматривать как элемент гильбертова пространства H , а операторы B, C – линейные операторы из H в H .

Решение уравнения (1.1) должно удовлетворять начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x)$$

Слагаемые $2\epsilon \frac{\partial u}{\partial t}$, Bu , Cu учитывают внешнее демпфирование (ϵ – характеристика внешнего трения), жесткость упругой системы и действие параметрических нагрузок соответственно.

Рассмотрим родственную однородную задачу, описываемую уравнением

$$Bu = \omega^2 u$$

Ее собственные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ имеют смысл собственных форм колебаний соответствующей упругой системы. Собственные значения $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots$ равны квадратам собственных частот этой системы и связаны с собственными функциями соотношениями Релея

$$\omega_i^2 = (B\varphi_i, \varphi_i) / (\varphi_i, \varphi_i)$$

Формы собственных колебаний попарно ортогональны, так что справедливы равенства

$$(\varphi_i, \varphi_j) = (B\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

Если $\varphi_i(x)$ – ортонормированные функции, то $u(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье по этим функциям

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\varphi_i(x) \quad (1.2)$$

Далее допустим, что функции $\varphi_i(x)$ одновременно являются собственными для оператора C .

Подобная ситуация встречается достаточно часто [16], например при рассмотрении стержня постоянного поперечного сечения, шарнирно опертого по концам и находящегося под

действием продольной силы, приложенной на его концах; прямоугольной пластины постоянной толщины, шарнирно закрепленной вдоль всех кромок и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, действующей в ее плоскости и ортогональной к кромкам; круговой цилиндрической оболочки или цилиндрической панели, прямоугольной в плане, шарнирно опертых вдоль кромок и находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, действующей на уровне срединной поверхности оболочки и направленной вдоль образующей; и т.д.

Тогда из уравнения (1.1) получим уравнения для обобщенных перемещений $f_i(t)$

$$\ddot{f}_i + 2\epsilon \dot{f}_i + \omega_i^2(1 - R - \alpha_i)f_i = 0 \quad (1.3)$$

причем $\alpha_i(t)$ – безразмерная функция, характеризующая параметрическую нагрузку. В дальнейшем функция $\alpha_i(t)$ считается случайным стационарным эргодическим процессом. Точка означает производную по времени t .

Функции $f_i(t)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$f_i(0) = f_{i0}, \quad df_i(t)/dt|_{t=0} = v_{i0}$$

где

$$f_{i0} = \int_V u_0(x) \varphi_i(x) dV, \quad v_{i0} = \int_V v_0(x) \varphi_i(x) dV$$

V – объем системы.

2. Устойчивость вязкоупругой системы. Введем норму в пространстве функций $u(x, t)$

$$\|u(x, t)\|^2 = \int_V u^2(x, t) dV$$

Будем называть положение равновесия системы $u(x, t) \equiv 0$ устойчивым в средне-квадратичном по отношению к возмущению начальных условий, если для любого сколь угодно малого положительного числа Δ найдется такое положительное число $\delta(\Delta)$, что из условия $\langle \|u(0)\|^2 \rangle < \delta$, справедливого для начального момента времени $t = 0$, следует неравенство $\langle \|u(t)\|^2 \rangle < \Delta$, которое удовлетворяется в любой момент времени $t > 0$.

Здесь и далее угловыми скобками обозначается операция математического ожидания.

Положение равновесия системы называется асимптотически устойчивым в средне-квадратичном, если соблюдается предыдущее условие и, кроме того, найдется такое $\delta > 0$, что при $\langle \|u(0)\|^2 \rangle < \delta$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \|u(t)\|^2 \rangle = 0$$

Принимая во внимание разложение (1.2) и учитывая ортонормированность функций $\varphi_i(x)$, выражение для момента второго порядка нормы перемещений запишем следующим образом:

$$\langle \|u(t)\|^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i^2(t) \rangle \quad (2.1)$$

Поэтому для ответа на вопрос об устойчивости рассматриваемой вязкоупругой системы необходимо найти оценку второго момента обобщенных перемещений $f_i(t)$.

3. Решение интегро-дифференциального уравнения. Представим случайный стационарный процесс $\alpha_i(t)$ в виде суммы

$$\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_i^\circ(t), \quad \alpha_{i0} = \langle \alpha_i(t) \rangle = \text{const}$$

где $\alpha_i^\circ(t)$ – случайная флуктуация характеристик параметрической нагрузки, $\langle \alpha_i^\circ(t) \rangle \equiv 0$.

Перепишем уравнение (1.1) следующим образом:

$$\ddot{f}_i + 2\varepsilon \dot{f}_i + \omega_i^2(1 - R - \alpha_{i0})f_i = \omega_i^2 \alpha_i^\circ f_i \quad (3.1)$$

Сначала рассмотрим уравнение (3.1) с нулевой правой частью.

Воспользуемся для его решения преобразованием Лапласа [17]. Тогда изображение функции $f_i(t)$ определяется выражением

$$\Phi_i^*(s) = s\Phi_i(s)f_{i0} + \Phi_i(s)v_{i0} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\Phi_i(s) = \{s^2 + 2\varepsilon s + \omega_i^2[1 - \alpha_{i0} - \Gamma(s)]\}^{-1} \quad (3.3)$$

$\Gamma(s)$ – изображение ядра релаксаций $R(t-\tau)$, s – комплексная величина.

Обозначим оригинал изображения $\Phi_i(s)$ через $F_i(t)$. Известно [17], что оригинал функции $s\Phi_i(s)$ является производной функции $F_i(t)$ ($F_i(0) = 0$).

В результате ИДУ (3.1) можно заменить эквивалентным ему интегральным уравнением с ядром $F_i(t-\tau)$

$$f_i(t) = \dot{F}_i(t)f_{i0} + F_i(t)v_{i0} + \omega_i^2 \int_0^t F_i(t-\tau) \alpha_i^\circ(\tau) f_i(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Далее будем полагать, что параметры ε и α_{i0} таковы, что нулевое решение уравнения (3.1) с нулевой правой частью является асимптотически устойчивым. Это означает, что функции $F_i(t)$, $\dot{F}_i(t)$ ограничены при любом конечном значении времени и асимптотически стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Обозначим через $-\lambda_i$ ($\lambda_i > 0$) максимальный показатель Ляпунова (λ_i – характеристическое число [18]) решения уравнения (3.1) с нулевой правой частью и представим функции $F_i(t)$, $\dot{F}_i(t)$ в виде

$$F_i(t) = F_i^\circ(t)e^{-\lambda_i t}, \quad \dot{F}_i(t) = F_i^*(t)e^{-\lambda_i t}$$

причем функции $F_i^\circ(t)$, $F_i^*(t)$ – ограниченные на любом конечном отрезке времени, и максимальный показатель Ляпунова для них равен нулю.

Введем в уравнении (3.4) вместо функции $f_i(t)$ новую искомую переменную

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} f_i(t) \quad (3.5)$$

которая является решением уравнения, получающегося после подстановки (3.5) в уравнение (3.4)

$$y_i(t) = F_i^\circ(t)f_{i0} + F_i^*(t)v_{i0} + \omega_i^2 \int_0^t F_i^*(t-\tau) \alpha_i^\circ(\tau) y_i(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.6) следует неравенство

$$|y_i(t)| \leq G_i(t) + \omega_i^2 \int_0^t H_i(\tau) |y_i(\tau)| d\tau \quad (3.7)$$

$$G_i(t) = |F_i^\circ(t)f_{i0} + F_i^*(t)v_{i0}|, \quad H_i(\tau) = \eta_{i\max} \alpha_i^+(\tau) + \eta_{i\min} \alpha_i^-(\tau)$$

$$\eta_{i\max} = \sup_{\tau \in [0, t]} F_i^*(t-\tau), \quad \eta_{i\min} = \inf_{\tau \in [0, t]} F_i^*(t-\tau)$$

где $\alpha_i^+(\tau)$, $\alpha_i^-(\tau)$ — функция $\alpha_i^\circ(\tau)$, имеющая неотрицательные и неположительные значения соответственно.

С учетом ограниченности функций $F_i^\circ(t)$, $F_i^*(t)$ имеем

$$G_i(t) \leq C_i, \quad C_i = \text{const}$$

и на основании леммы Гронуолла — Беллмана [19] из неравенства (3.7) найдем оценку функции $|y_i(t)|$, а с ее помощью и оценку абсолютного значения обобщенного перемещения $|f_i(t)|$

$$|f_i(t)| \leq C_i \exp\{-\lambda_i t + \omega_i^2 \int_0^t H_i(\tau) d\tau\} \quad (3.8)$$

Поскольку случайный стационарный процесс $\alpha_i^\circ(\tau)$ является центрированным и эргодическим, то

$$\langle \alpha_i^\circ(\tau) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\circ(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\int_0^t \alpha_i^+(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha_i^-(\tau) d\tau \right] = 0$$

Отсюда следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^+(\tau) d\tau = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^-(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\alpha_i^\circ(\tau)| d\tau = \frac{1}{2} \langle |\alpha_i^\circ| \rangle$$

В результате при $t \rightarrow \infty$ из неравенства (3.8) получим

$$|f_i(t)| \leq C_i \exp\{[-\lambda_i + \omega_i^2 (\eta_{i\max} - \eta_{i\min}) \langle |\alpha_i^\circ| \rangle / 2] t\} \quad (3.9)$$

Очевидно, что оценка математического ожидания $\langle f_i^2(t) \rangle$ совпадает с оценкой $f_i^2(t)$.

Таким образом, можно утверждать, что рассматриваемая вязкоупругая система будет асимптотически устойчивой в среднеквадратичном, если для каждого номера i будет выполняться неравенство

$$\langle |\alpha_i^\circ| \rangle < 2\lambda_i / [\omega_i^2 (\eta_{i\max} - \eta_{i\min})] \quad (3.10)$$

Из неравенства (3.9) видно, что полученное условие одновременно является условием асимптотической устойчивости положения равновесия вязкоупругой системы почти наверное [13].

4. Устойчивость вязкоупругого стержня. Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, шарнирно опертый по концам и находящийся под действием продольной силы $P(t)$. Уравнение (1.1) в этом случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{EI}{m} (1 - R) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{P}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Здесь u — прогиб стержня, x — координата, отсчитываемая вдоль оси стержня от одного из его концов, EI — изгибная жесткость стержня, m — его погонная масса.

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ (l — длина стержня) имеют вид $u = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$.

Функции $\varphi_i(x)$, собственные частоты ω_i , величины α_{i0} и функции $\alpha_i^\circ(t)$ определяются выражениями

$$\varphi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad \omega_i^2 = \frac{i^4 \pi^4 EI}{ml^4}, \quad \alpha_i = \frac{Pl^2}{i^2 \pi^2 EI}, \quad \alpha_{i0} = \frac{\alpha_{i0}}{i^2}, \quad \alpha_i^\circ(t) = \frac{\alpha_i^\circ(t)}{i^2}$$

Экспоненциальное ядро релаксации. Допустим, что

$$R(t - \tau) = \chi L e^{-\chi(t-\tau)}, \quad \chi = \text{const}, \quad L = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \text{const}$$

Величина L характеризует меру релаксации материала.

Изображение $\Phi_i(s)$ фундаментального решения $F_i(t)$ уравнения (3.2) в этом случае имеет вид

$$\Phi_i(s) = \{s^2 + 2\epsilon s + \omega_i^2 [1 - \alpha_{i0} - \chi L / (s + \chi)]\}^{-1}$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль в точках, соответствующих корням кубического многочлена. Полагая величины ϵ, χ ($\epsilon, \chi \ll \omega_i$), характеризующие внешнее демпфирование и время релаксации, малыми по сравнению с единицей (точнее с разностью $(1 - \alpha_{i0})$, которая считается положительной), корни кубического уравнения в первом приближении можно принять такими [13]:

$$s_1 \approx -\chi(1 - \alpha_{i0} - L) / (1 - \alpha_{i0}), \quad s_{2,3} = -a \pm \sqrt{-1} \omega_i b$$

$$a \approx \epsilon + \frac{\chi L}{2(1 - \alpha_{i0})}, \quad b \approx \sqrt{1 - \alpha_{i0} - \epsilon^2} + \frac{\epsilon \chi L}{2(1 - \alpha_{i0}) \sqrt{1 - \alpha_{i0} - \epsilon^2}} \approx \sqrt{1 - \alpha_{i0}}$$

В итоге

$$F_i(t) = A_i e^{s_1 t} + B_i e^{-at} \cos \omega_i b t + \frac{C_i - a B_i}{\omega_i b} e^{-at} \sin \omega_i b t$$

$$A_i = \frac{\chi L}{(1 - \alpha_{i0}) g} = -B_i, \quad C_i = 1 - (2a + s_1) A_i, \quad g = (2a + s_1) s_1 + a^2 + \omega_i^2 b^2$$

Принимая во внимание малость величин ϵ, χ , можно положить

$$g \approx \omega_i^2 b^2 = \omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})$$

$$F_i(t) \approx \frac{\chi L}{\omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})^2} (e^{s_1 t} - e^{-at} \cos \omega_i b t) + \frac{1}{\omega_i b} e^{-at} \sin \omega_i b t$$

Далее следует выбрать наибольшую из величин s_1 и $-a$, которая и будет максимальным показателем Ляпунова.

Предположим, что $|s_1| < a$, тогда $\lambda_i = s_1$. В этом случае

$$F_i^*(t - \tau) \approx \frac{\chi L}{\omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})^2} [1 - e^{(-s_1 - a)(t-\tau)} \cos \omega_i \sqrt{1 - \alpha_{i0}} t] + \\ + \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \alpha_{i0}}} e^{(-s_1 - a)(t-\tau)} \sin \omega_i \sqrt{1 - \alpha_{i0}} t$$

Для отыскания экстремальных значений $F_i^*(t)$ можно взять производную и из условия равенства ее нулю найти $\eta_{i\max}$ и $\eta_{i\min}$. Однако, учитывая малость отношения χ/ω_i по сравнению с единицей, можно без большой погрешности принять

$$\begin{cases} \eta_{i\max} \\ \eta_{i\min} \end{cases} \approx \pm \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \alpha_{i0}}} + \frac{\chi L}{\omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})^2} \quad (4.1)$$

В результате, из неравенства (3.11) следует

$$\langle |\alpha_i^0| \rangle < \frac{\chi}{\omega_i} \frac{1 - \alpha_{i0} - L}{\sqrt{1 - \alpha_{i0}}} \quad (4.2)$$

Если максимальный показатель Ляпунова равен действительной части комплексно-сопряженных корней s_2, s_3 , то

$$F_i^*(t - \tau) = \frac{\chi L}{\omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})^2} [e^{(s_1 + a)t} - \cos \omega_i b t] + \frac{1}{\omega_i b} \sin \omega_i b t$$

И в этом случае величины $\eta_{\max}, \eta_{\min}$ можно принять в виде (4.1). Тогда для оценки величины $\langle \alpha_{i0}^\circ \rangle$ имеем соотношение

$$\langle \alpha_i^\circ \rangle < [\varepsilon + \frac{\chi L}{2(1 - \alpha_{i0})}] \frac{\sqrt{1 - \alpha_{i0}}}{\omega_i} \quad (4.3)$$

Сравним этот результат с тем, который получается при использовании прямого метода Ляпунова, с предварительной заменой ИДУ для обобщенного перемещения $f_i(t)$ системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [13]

$$\langle \alpha_i^\circ \rangle < \begin{cases} \sqrt{2} \frac{\chi}{\omega_i} \frac{1 - \alpha_{i0} - L}{\sqrt{1 - \alpha_{i0}}} \\ \sqrt{2} [\varepsilon + \frac{\chi L}{2(1 - \alpha_{i0})}] \frac{\sqrt{1 - \alpha_{i0}}}{\omega_i} \end{cases} \quad (4.4)$$

Таким образом, оценка величины $\langle \alpha_i^\circ \rangle$ в виде (4.2) и (4.3) оказывается более жесткой, нежели оценки (4.4). Такого результата следовало ожидать, поскольку в предлагаемом методе никак не учитывается специфика экспоненциального ядра релаксации материала.

Уточнение значений величин $\eta_{\max}, \eta_{\min}$ не вносит существенных изменений в результаты, что подтверждается данными табл. 1, где представлены значения оценки $\langle \alpha_i^\circ \rangle_*$, найденные численно из соотношений (3.10) и аналогичные значения $\langle \alpha_i^\circ \rangle^*$, полученные из выражений (4.4).

Значения s_1 и $-a$, приведенные в табл. 1, найдены путем численного решения кубического уравнения

$$\{s^2 + [2\varepsilon s + \omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})]\}(s + \chi) - \omega_i^2 \chi L = 0$$

Можно убедиться, что при малых значениях ε, χ, L они практически совпадают с аналогичными значениями, полученными из первого приближения для s_1 и a , записанными выше.

Результаты, приведенные в табл. 1, иллюстрируют влияние различных параметров на значение оценки $\langle \alpha_i^\circ \rangle$. С одной стороны, как и следовало ожидать, с увеличением величины математического ожидания продольной силы происходит уменьшение оценки $\langle \alpha_i^\circ \rangle_*$. С другой стороны, обращает на себя внимание тот факт, что увеличение меры релаксации при фиксированных значениях параметров ε и χ не приводит к заметному изменению той же оценки, по крайней мере при малых значениях α_0 . Интересно также отметить, что изменение отдельно каждого из параметров ε, χ при неизменных других параметрах, хотя и приводит к изменению величины $\langle \alpha_i^\circ \rangle_*$, но это изменение (при малых α_0) не очень существенное. Вместе с тем одновременное изменение тех же параметров вновь при неизменных других параметрах приводит к значительному изменению оценки $\langle \alpha_i^\circ \rangle_*$.

Таблица 1

ε	χ	L	α_0	$-s_1 \times 10^5$	$a \times 10^5$	$\langle \alpha^\circ \rangle_* \times 10^5$	$\langle \alpha^\circ \rangle^* \times 10^5$
0,01	0,04	0,1	0	3600	1200	1075	1697
			0,25	3467	1266	970	1551
			0,50	3201	1400	861	1400
			0,75	2401	1800	786	1273
			0,90	0	3000	0	0
0,04	0,01	0,1	0	900	4050	993	1273
			0,25	867	4067	843	1061
			0,50	800	4100	655	800
			0,75	599	4200	374	424
			0,90	0	4500	0	0
0,04	0,04	0,1	0	3600	4200	3680	5091
			0,25	3466	4267	3103	4246
			0,50	3198	4401	2406	3200
			0,75	2391	4804	1417	1697
			0,90	0	6000	0	0
0,04	0,04	0,01	0	3960	4020	3548	5600
			0,25	3947	4027	3016	4834
			0,50	3920	4040	2407	3920
			0,75	3839	4048	1607	2885
			0,90	3594	4203	937	1610
0,04	0,04	0,05	0	3800	4100	3642	5734
			0,25	3733	4133	3127	4572
			0,50	3599	4201	2548	3600
			0,75	3195	4402	1740	2263
			0,90	1976	5012	872	894
0,04	0,04	0,005	0	3980	4010	3537	5629
			0,25	3974	4013	3002	4866
			0,50	3960	4020	2389	3960
			0,75	3920	4040	1581	2772
			0,90	3797	4101	889	1699
0,02	0,02	0,00707	0	1986	2007	1888	2808
			0,25	1981	2009	1621	2426
			0,50	1972	2014	1303	1972
			0,75	1944	2028	902	1374
			0,90	1858	2071	546	831

Высказанные замечания свидетельствуют о довольно сложной зависимости между параметрами внешнего демпфирования и вязкости материала и критическим значением величины $\langle |\alpha_i^\circ| \rangle_*$.

Из соотношений (4.2) и (4.3) следует, что, если они выполняются при $i = 1$, то тем более они соблюдаются при $i > 1$. На основании этого можно утверждать, что стержень будет асимптотически устойчив в среднеквадратичном (и почти наверное) при произвольной форме возмущений начальных условий, если он будет асимптотически устойчив при возмущениях, имеющих форму одной полуволны синусоиды.

Ядро релаксации со слабой особенностью. Рассмотрим ядро релаксации материала

$$R(t - \tau) = \frac{B}{\Gamma(\nu)} \frac{e^{-a(t-\tau)}}{(t - \tau)^\nu}$$

где B , a , ν – постоянные, $0 < \nu \leq 1$, и ограничимся анализом устойчивости стержня при

возмущении начальных условий в форме одной полуволны синусоиды и потому в дальнейших выкладках индекс i будем опускать.

Мера релаксации при таком ядре равна

$$L = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{B}{a^v}$$

Изображение функции $R(t)$ имеет вид

$$\Gamma(s) = B/(s + a)^v$$

Изображение функции $F(t)$ записывается следующим образом:

$$\Phi(s) = [(s + a)^2 + 2(\varepsilon - a)(s + a) + D - B\omega^2 / (s + a)^v]^{-1}$$

$$D = \omega^2(1 - \alpha_0) + a(a - 2\varepsilon)$$

из чего следует, что

$$F(t) = e^{-at}\psi(t) \quad (4.5)$$

В свою очередь, изображение функции $\psi(t)$ равно

$$\Psi^*(s) = [s^2 + 2(\varepsilon - a)s + D - B\omega^2 / s^v]^{-1} \quad (4.6)$$

Если v – рациональная дробь, то изображение $\Psi(s)$ можно представить в виде рациональной дроби, которая в свою очередь может быть записана в виде суммы простых дробей.

Далее для примера рассмотрим частный случай $v = 1/2$, $\omega = 1$.

Можно убедиться, что изображению (4.6) отвечает оригинал [17]

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}^{3/2}} \int_0^{\infty} \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \phi(\tau) d\tau$$

В свою очередь, функция $\phi(\tau)$ – оригинал изображения

$$\Phi^*(s) = s/[s^5 + 2(\varepsilon - a)s^3 + Ds - B] \quad (4.7)$$

Допустим, что корнями уравнения

$$s^5 + 2(\varepsilon - a)s^3 + Ds - B = 0 \quad (4.8)$$

являются один действительный корень s_1 и две пары комплексно-сопряженных

$$s_{2,3} = \lambda_1 \pm i\theta_1, \quad s_{4,5} = \lambda_2 \pm i\theta_2, \quad i = \sqrt{-1}$$

Тогда

$$\phi(t) = A_1 e^{-s_1 t} + e^{-\lambda_1 t} (A_2 \cos \theta_1 t + A_3 \sin \theta_1 t) + e^{-\lambda_2 t} (A_4 \cos \theta_2 t + A_5 \sin \theta_2 t)$$

Здесь $A_1, \dots, A_5$ – постоянные.

В результате фундаментальное решение $F(t)$ представляется в виде суммы функций

$$F_1(t) = A_1 e^{-at} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi t}} - s_1 e^{s_1^2 t} \operatorname{erfc}(s_1 \sqrt{t}) \right]$$

$$F_{2j}(t) = A_{2j} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at} - K_j^+(t) \right], \quad F_{2j+1}(t) = i A_{2j+1} K_j^-(t)$$

где

$$K_j^{\pm}(t) = \frac{1}{2} e^{(-a \pm \lambda_j^2 \mp \theta_j^2)t} \left\{ (\lambda_j - i\theta_j) e^{\mp i 2\lambda_j \theta_j t} \operatorname{erfc}[(\lambda_j - i\theta_j)\sqrt{t}] \pm \right. \\ \left. \pm (\lambda_j + i\theta_j) e^{\pm i 2\lambda_j \theta_j t} \operatorname{erfc}[(\lambda_j + i\theta_j)\sqrt{t}] \right\}$$

Таблица 2

$\varepsilon=a$	L	B	α_0	$-a_1 \times 10^5$	$-a_2 \times 10^5$	$-a_3 \times 10^5$	$\langle \alpha_0 \rangle \times 10^5$
0,04	0,05	0,01	0	3990	4353	3645	3720
			0,25	3982	4438	3559	3157
			0,50	3960	4594	3401	2504
			0,75	3838	4995	2985	1643
0,04	0,005	0,001	0	4000	4035	3965	3982
			0,25	4000	4044	3956	3432
			0,50	4000	4060	3940	2795
			0,75	3998	4100	3899	1965
0,02	0,00707	0,001	0	1995	2250	1750	1773
			0,25	1991	2310	1689	1488
			0,50	1980	2419	1578	1149
			0,75	1920	2703	1287	688

Максимальный показатель Ляпунова функции $F(t)$ будет равен наибольшему из выражений

$$a_1 = -a + s_1^2, \quad a_2 = -a + \lambda_j^2 - \theta_j^2, \quad a_3 = -a - \lambda_j^2 + \theta_j^2$$

Далее нетрудно получить выражение функции $F^*(t)$.

Очевидны формы записи функции $F(t)$ и для других комбинаций корней уравнения (4.8).

Для примера будем считать величины ε , a , B достаточно малыми. Тогда корни уравнения (4.8) в первом приближении оказываются такими (при $\varepsilon = a$):

$$s_1 \approx B/D = B/(1 - \alpha_0 - a^2)$$

$$s_{2,3} \approx \lambda_1 \pm i\theta, \quad s_{4,5} \approx \lambda_2 \pm i\theta$$

$$\lambda_1 = \sqrt{D}/2 - s_1/4, \quad \lambda_2 = -\sqrt{D}/2 - s_1/4, \quad \theta = \sqrt{\sqrt{D}/2}$$

Максимальное и минимальное значение функции $F^*(t)$ проще найти численно и таким образом получить оценку величины $\langle |\alpha^\circ| \rangle$.

Результаты вычислений величины $\langle |\alpha^\circ| \rangle$ для некоторых значений параметров $\varepsilon = a$, B , α_0 приведены в табл. 2.

Сравнение данных табл. 2 с аналогичными данными табл. 1 показывает, что при одинаковых значениях параметров L , ε , χ и a значения оценки $\langle |\alpha_i^\circ| \rangle$ табл. 2 практически совпадают с аналогичными значениями $\langle |\alpha_i^\circ| \rangle_*$ при всех значениях параметра α_0 табл. 1. Разница увеличивается по мере увеличения математического ожидания продольной силы. Это говорит о том, что с точки зрения устойчивости системы учет слабой сингулярности в ядре релаксации материала может не оказывать существенного влияния на значения критического параметра, в то время как наличие указанной сингулярности значительно усложняет решение задачи.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что предлагаемый метод является эффективным средством исследования устойчивости нулевого решения линейных стохастических интегро-дифференциальных уравнений (положения равновесия вязкоупругих систем), позволяющим получить оценку критического значения величины $\langle |\alpha_0| \rangle$ при достаточно произвольных ядрах релаксации материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00290 и 99-01-00096).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздов А.Д., Колмановский В.Б. Устойчивость вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке // ПМТФ. 1991. № 5. С. 124–131.
2. Drozdov A. Stability of a class of stochastic integro-differential equations // Stoch. Anal. Appl. 1995. V. 13. № 5. P. 517–530.
3. Drozdov A.D. Almost sure stability of viscoelastic structural members driven by random loads // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 197. № 3. P. 293–307.
4. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Устойчивость стохастических систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1993. № 7. С. 66–85.
5. Ladde G.S. Stochastic stability analysis of model ecosystems with timedelay // Differential Equations and Applications in Biology, Epidemics and Population Problems / Eds S.N. Busenberg and K. Cook. N.Y. et al.: Acad. Press, 1981. P. 215–228.
6. Ladde G.S., Sathananthan S. Stochastic integro-differential equations with random parameters. II // Dynamic Systems and Applications. 1994. V. 3. № 4. P. 563–582.
7. Mizel V.J., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integ. Equat. 1984. V. 7. № 1. P. 1–72.
8. Сорокин Е.С., Муравский Г.Б. Об учете упругих несовершенств материалов методами наследственной упругости // Строит. механика и расчет сооружений. 1975. № 4. С. 41–46.
9. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
10. Tylikowski A. Stability and bounds on motion of viscoelastic columns with imperfections and time-dependent forces // Creep in Structures / Ed. M. Życzkowski. Berlin: Springer, 1991. P. 653–658.
11. Потанов В.Д. Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 105–110.
12. Потанов В.Д. Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 137–145.
13. Потанов В.Д. Устойчивость решения некоторых интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику вязкоупругих систем, при случайном возмущении их параметров // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1518–1524.
14. Drozdov A. Explicit stability conditions for stochastic integro-differential equations with non-selfadjoint operator coefficients // Stoch. Anal. Appl. 1999. V. 17. № 1. С. 23–41.
15. Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 71–81.
16. Потанов В.Д. Анализ устойчивости вязкоупругих стохастических систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 297–304.
17. Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. München, Wien, R. Oldenburg, 1967. = Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
18. Четаев Г.Н. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.
19. Beckenbach E.F., Bellman R. Inequalities. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961. = Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.