

УДК 539.3+532.5

© 1999 г. Д.В. Георгиевский

**ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ ФУНКЦИИ УПРОЧНЕНИЯ**

Приводится постановка линеаризованной краевой задачи устойчивости процесса деформирования по отношению к малым возмущениям функции упрочнения (скалярного определяющего соотношения материала). Векторные определяющие соотношения среды принимаются линейными. Учитывается наличие жестких зон в области тела и изменение их границ в возмущенном движении. Подробно в качестве основного течения рассматриваются идеально жесткопластическое деформирование и течение ньютоновской жидкости. В последнем случае выводится уравнение асимптотической границы жесткой зоны, которая появляется при малом варьировании предела текучести и переходе к вязкопластическому материалу.

Анализ устойчивости процессов деформирования относительно возмущения материальных функций связан с исследованием решений дифференциальных уравнений при вариации коэффициентов [1]. Варьироваться могут не только постоянные коэффициенты, но и целые функции и функционалы, характеризующие материал, такие как функция упрочнения, функционалы ползучести и релаксации и т.д. Неустойчивость может интерпретироваться как смена типа краевой задачи [2], влекущая качественное изменение свойств решения. С этим также связаны многие классические парадоксы в механике и инженерных приложениях (предельные переходы, дестабилизация, ложные резонансы и др.) [3].

Ниже приводится постановка линеаризованной задачи устойчивости процесса деформирования для несжимаемого материала с линейными векторными соотношениями (задача первого приближения).

1. Постановка задачи устойчивости. Исследуем процесс деформирования несжимаемого тела со скалярным определяющим соотношением, взятым в достаточно общем виде

$$T = T(U) \quad (1.1)$$

где $T(x, t) = (s : s / 2)^{1/2}$ – максимальное касательное напряжение ($T = \sigma_{11} / \sqrt{2}$), $U(x, t) = (2v : v)^{1/2}$ – максимальная скорость скольжения ($U = \sqrt{2} v_{11}$) [4]. Функция упрочнения $T(U)$ материала непрерывна вместе с первыми двумя производными по своему аргументу при $U > 0$. Векторные (тензорные) соотношения принимаются линейными, поэтому связь девиатора напряжений s с тензором скоростей деформаций v при учете соотношения (1.1) имеет вид

$$s = 2T(U)v / U \quad (1.2)$$

Величины, входящие в соотношения (1.1), (1.2) и все последующие уравнения, приведены к безразмерному виду в базисе $\{\rho; V; h\}$, где ρ – постоянная плотность тела, V и h – характерные скорость и линейный размер соответственно.

Выпишем в ортогональных криволинейных координатах постановку задачи векторно-линейного течения с определяющими соотношениями (1.2) в области Ω эйле-

рова пространства. Область Ω состоит из зоны течения Ω_f и жесткой зоны Ω_r , граница Σ_r которой с Ω_f в каждый момент времени определяется из уравнения

$$\Sigma_r = \{x: T[U(x, t)] = \tau_s\} \quad (1.3)$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге, являющийся одной из механических констант материала.

В подобласти Ω_f имеем условие несжимаемости

$$\text{tr } v = 0 \quad (1.4)$$

и уравнения движения с массовыми силами F

$$-\text{grad } p + 2\text{Div}[T(U)v / U] + F = dv/dt \quad (1.5)$$

в которые надо подставить соотношения Стокса

$$v = \text{Def } v \quad (1.6)$$

для получения замкнутой системы четырех уравнений относительно одной векторной функции $v(x, t)$ и одной скалярной функции $p(x, t)$.

Граничные условия

$$x \in \Sigma_v: v = u; \quad x \in \Sigma_\sigma: -pn + s \cdot n = P \quad (1.7)$$

задаются, вообще говоря, на движущихся поверхностях $F_j(x, t) \equiv 0$, уравнения которых имеют следующий вид:

$$d[F_j(x, t)]/dt = 0, \quad x \in \Sigma_j, \quad j = v, \sigma \quad (1.8)$$

Если движение среды нестационарно, необходимо задать и начальные условия

$$v(x, 0) = w(x) \quad (1.9)$$

Решение начально-краевой задачи векторно-линейного течения (1.4)–(1.9) с "входными данными" ($F; u; P; w$) возможно отыскать только в заранее неизвестной подобласти Ω_f тела. Поверхность же Σ_r , определяемая условием (1.3), находится в процессе решения задачи (1.4)–(1.9). Заметим, что, если последняя является статически определимой (например, для квазистатического плоского деформирования идеально пластического тела либо для чистого сдвига вязкопластического тела), то найденные распределения напряжений $\sigma(x, t)$ и $T(x, t)$ имеют место как в подобласти Ω_f , так и в жесткой зоне Ω_r . В этом случае из уравнения (1.3) можно сразу найти границу Σ_r , а затем разыскивать кинематику уже в известной подобласти Ω_f .

Предположим, что для некоторой фиксированной скалярной функции $T^0(U)$ решение задачи (1.4)–(1.9) с "входными данными" ($F; u; P; w$) известно. Известно также уравнение поверхности Σ_r^0 . Данное решение, помечаемое в дальнейшем верхним нулевым индексом, будем называть основным или невозмущенным.

Наряду с основной задачей рассмотрим задачу (1.4)–(1.9) с теми же "входными данными" ($F; u; P; w$), но для материала с другой скалярной функцией $T(U)$ (возмущенную задачу), причем

$$T(U) = T^0(U) + \delta T(U) \equiv T^0(U) + \alpha T^1(U) \quad (1.10)$$

$$\delta T(U) \in C^{(1)}[0; +\infty[, \quad \alpha = \sup_{U>0} |\delta T(U)|$$

так что $|T^1(U)| \leq 1$.

Считая α малым параметром ($\alpha \ll 1$), представим решение возмущенной задачи следующим образом:

$$p(x, t) = p^0(x, t) + \alpha p^1(x, t), \dots, s(x, t) = s^0(x, t) + \alpha s^1(x, t) \quad (1.11)$$

а уравнение поверхности Σ_r , отделяющей жесткую зону от зоны течения в возмущенном процессе, определяется из (1.3):

$$\Sigma_r = \{x : T[U(x, t)] = \tau_s^0 + \alpha \tau_s^1\} \quad (1.12)$$

Отметим, что

$$\tau_s^0 = \lim_{U \rightarrow 0} T^0(U), \quad \tau_s^1 = \lim_{U \rightarrow 0} T^1(U) \quad (1.13)$$

Подставим выражения (1.11) в (1.4)–(1.9) и примем во внимание тот факт, что величины с нулевым индексом – решения основной задачи. Приравнявая к нулю коэффициенты при α в каждом из уравнений, получим в Ω_f следующую пока незамкнутую начально-краевую задачу первого приближения:

$$\text{tr } v^1 = 0 \quad (1.14)$$

$$-\text{grad } p^1 + \text{Div } s^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t} + (v^0 \otimes \nabla) \cdot v^1 + (v^1 \otimes \nabla) \cdot v^0 \quad (1.15)$$

$$v^1 = \text{Def } v^1 \quad (1.16)$$

$$x \in \Sigma_v : v^1 = 0; \quad x \in \Sigma_\sigma : -p^1 n + s^1 \cdot n = 0 \quad (1.17)$$

$$v^1(x, 0) = 0 \quad (1.18)$$

Подставляя далее (1.11) в нелинейные определяющие соотношения (1.2), после некоторых преобразований выпишем связь тензоров s^1 и v^1 или аналог определяющих соотношений так называемой среды первого приближения

$$s^1 = \frac{2}{U^0} [T^0(U^0)v^1 + T^1(U^0)v^0] + 2 \left[T^{0'}(U^0) - \frac{T^0(U^0)}{U^0} \right] V^0 : v^1 \quad (1.19)$$

$$V^0 = \frac{2v^0 \otimes v^0}{U^{02}} \equiv \frac{v^0 \otimes v^0}{v^0 : v^0}$$

Тензор четвертого ранга V^0 определяется кинематикой основного течения [5].

Здесь было учтено, что из соотношения

$$\begin{aligned} U^0 + \alpha U^1 = U &= \sqrt{2(\tilde{v}^0 + \alpha v^1) : (v^0 + \alpha v^1)} = \\ &= \sqrt{2v^0 : v^0} \sqrt{1 + \frac{2\alpha v^0 : v^1}{v^0 : v^0} + O(\alpha^2)} = U^0 \left(1 + \frac{2\alpha v^0 : v^1}{U^{02}} \right) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

имеем

$$U^1 = \frac{2v^0 : v^1}{U^0} \quad (1.20)$$

Как следует из (1.20), величина U^1 не есть максимальная скорость скольжения, построенная на тензоре v^1 , и может принимать даже отрицательные значения.

Так как v^0 , U^0 известны из основного движения, среда первого приближения линейна не только векторно, но и скалярно. Эта среда с начальными напряжениями

$2T^1(U^0)v^0/U^0$, которые после подстановки (1.19) в (1.15) можно считать фиктивными массовыми силами. В области Ω_f система уравнений относительно переменных с индексом единица становится замкнутой. Заметим, что в (1.15) войдут вторые производные от T^0 по U и первые производные от T^1 по U . Непрерывность этих функций в Ω_f оговорена ранее классами гладкости, которым принадлежат $T^0(U)$ и $T^1(U)$.

Представление (1.11) с последующим исследованием начально-краевой задачи первого приближения (1.14)–(1.19) и нахождением асимптотических границ жестких зон из (1.12) является возмущением известного решения относительно материальной функции (в данном случае функции упрочнения материала). Близость в том или ином смысле при $t > 0$ возмущенного и основного решений позволяет судить об устойчивости или чувствительности течения к вариации материальных функций. К понятиям такого рода можно подойти, обобщая классический метод Ляпунова – Мовчана устойчивости по двум метрикам [6, 7].

Дадим определение устойчивости процесса деформирования относительно начальных возмущений и вариации скалярной функции [5].

Определение. Невозмущенный процесс деформирования называется устойчивым по парам мер $\{(\rho_1^0, \rho_1(t)), (\rho_2^0, \rho_2(t)), \dots, (\rho_k^0, \rho_k(t))\}$ и по мере γ , если для любого набора положительных чисел $\bar{\epsilon} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ существуют числа $\delta_1(\bar{\epsilon}), \dots, \delta_{k+1}(\bar{\epsilon})$ такие, что для любого возмущенного процесса, удовлетворяющего неравенствам

$$\|\delta v(x, 0)\|_{\rho_1^0} < \delta_1, \quad \|\delta \sigma(x, 0)\|_{\rho_2^0} < \delta_2, \quad \dots, \quad \|\delta F_\alpha(x, 0)\|_{\rho_k^0} < \delta_k, \quad \|\delta T(U(x, 0))\|_\gamma < \delta_{k+1} \quad (1.21)$$

при $t = 0$, имеют место неравенства

$$\|\delta v(x, t)\|_{\rho_1} < \epsilon_1, \quad \|\delta \sigma(x, t)\|_{\rho_2} < \epsilon_2, \quad \dots, \quad \|\delta F_\alpha(x, t)\|_{\rho_k} < \epsilon_k \quad (1.22)$$

при $t > 0$.

Первые k неравенств в (1.21) и все неравенства в (1.22) ограничивают начальные и текущие возмущения всех кинематических и динамических параметров движения (их всего k), включая уравнения поверхностей тела. Последнее неравенство в (1.21) ограничивает начальное возмущение скалярной функции материала. В силу (1.10) в качестве меры отклонения γ этого возмущения надо выбрать расстояние в пространстве функций из $C^{(1)}[0; +\infty[$.

Приведем далее примеры задач первого приближения для некоторых стандартных типов скалярных функций (1.1) и возмущений (1.10).

2. Устойчивость ньютоновских течений относительно возмущений предела текучести. В данном случае (фиг. 1)

$$T^0(U) = \frac{U}{\text{Re}}, \quad T(U) = \tau_s + \frac{U}{\text{Re}}, \quad \delta T(U) \equiv \tau_s \quad (2.1)$$

$$T^1(U) \equiv 1, \quad \tau_s^0 = 0, \quad \tau_s^1 = 1, \quad \alpha = \tau_s \ll 1$$

где Re – число Рейнольдса. Определяющие соотношения (1.19) среды первого приближения примут вид

$$s^1 = 2 \left(\frac{v^0}{U^0} + \frac{v^1}{\text{Re}} \right) \quad (2.2)$$

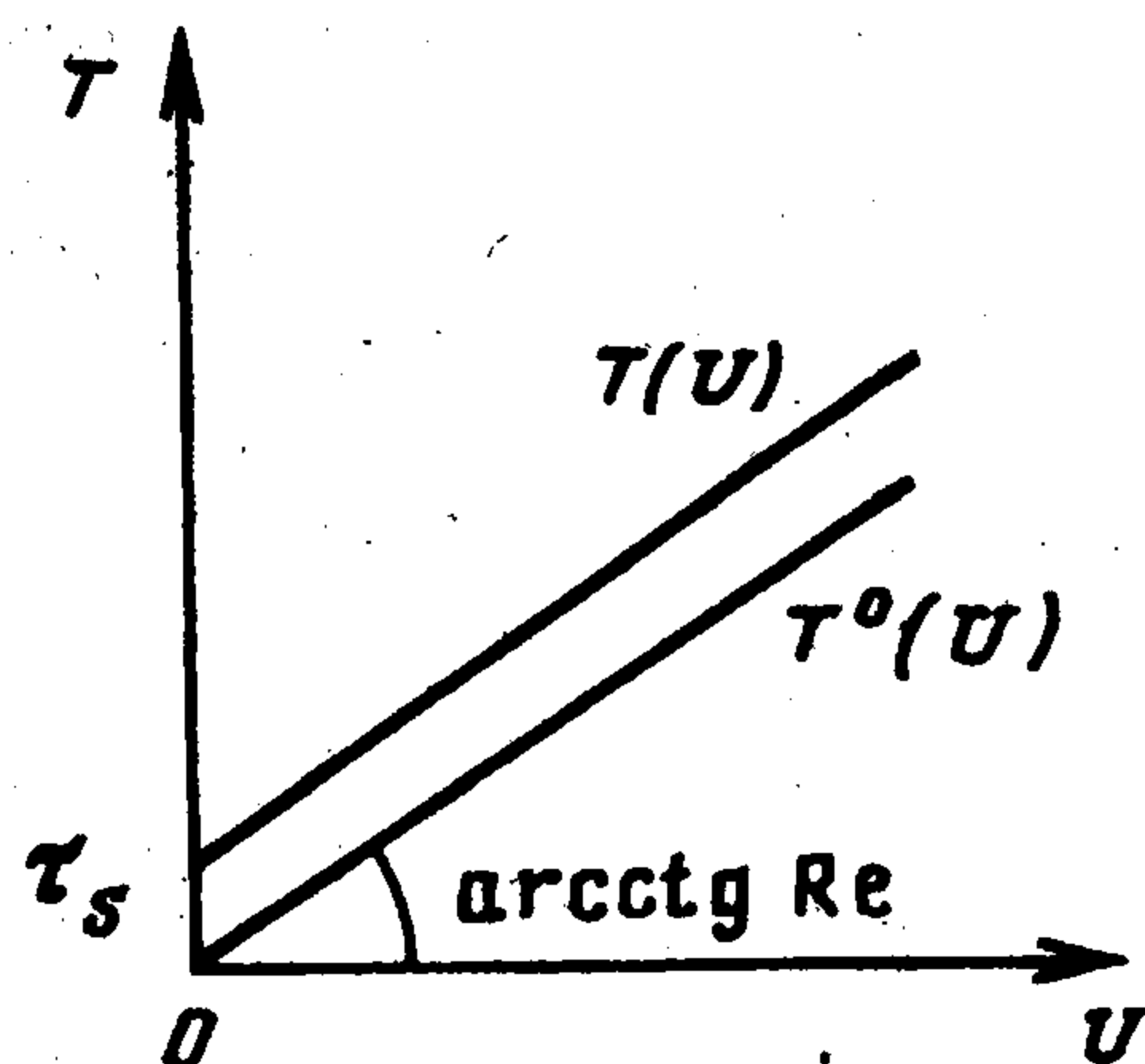
т.е. эта среда соответствует линейной ньютоновской модели с начальными напряжениями, которые известны из основного течения. Для формулировки краевой задачи

первого приближения соотношения (2.2) необходимо подставить в (1.15), (1.17).

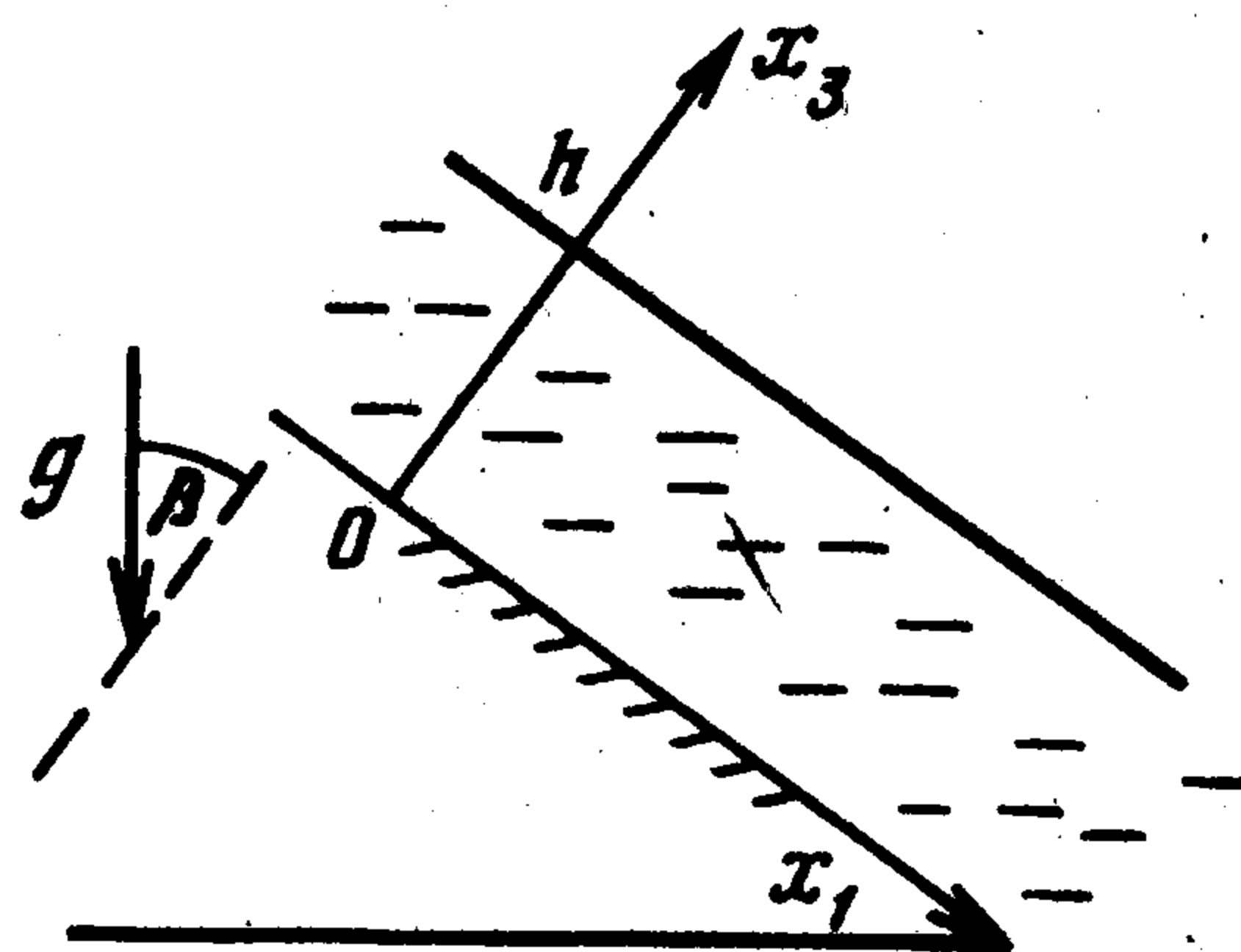
После нахождения из этой задачи тензора ν^1 уравнение (1.12) асимптотической границы Σ_r с учетом (2.1) запишем так:

$$\Sigma_r = \{x : 2\alpha \nu^0 : \nu^1 = -U^{02}\} \quad (2.3)$$

Вопросы предельного перехода вязкопластических течений к вязким подробно исследованы с точки зрения вариационных неравенств [8]. В качестве нерешенной была сформулирована следующая математическая проблема: "... можно ли доказать



Фиг. 1



Фиг. 2

(из соображений механики это очевидно...), что области, где скорости деформации равны нулю, увеличиваются с ростом предела текучести?" ([8], с. 289).

Частичный ответ на этот вопрос (при малых пределах текучести) следует из уравнения (2.3). Действительно, жесткие зоны, отсутствующие в ньютоновских течениях, начинают образовываться вокруг тех точек $x \in \bar{\Omega}$, в которых U^0 и T^0 равны нулю. Обозначим множество таких точек в каждый момент времени $\gamma^0(t)$: $\gamma^0(t) = \{x \in \bar{\Omega} : U^0(x, t) = 0\}$. Множеству $\gamma^0(t)$ могут принадлежать и бесконечно удаленные точки тела. Тогда жесткие зоны в любой момент представляют собой некоторые окрестности бесконечности.

Асимптотическое увеличение областей Ω_r с ростом τ_s представляет интерес и в практических задачах о вязкопластическом течении там, где точное решение при любом τ_s затруднительно. В то же время решения соответствующих вязких задач хорошо известны. К числу таких примеров отнесем задачу Гамеля о радиальном течении вязкой жидкости в плоском конфузоре и задачу Кармана (в ней при возмущении предела текучести, по-видимому, будет отсутствовать известное в ньютоновском случае "подсасывание" среды из бесконечности, поскольку, начиная с некоторой высоты, ось вращения будет принадлежать жесткой зоне [9]).

Приведем ниже пример, носящий чисто иллюстративный характер, где в качестве основного течения взят плоскопараллельный сдвиг тяжелого вязкого слоя на наклонной плоскости (фиг. 2). В декартовых координатах (Ox_1x_3) известное стационарное решение невозмущенной задачи имеет вид

$$\nu_1^0(x_3) = \frac{Re}{2} x_3(2 - x_3) \sin \beta, \quad \nu_3^0 \equiv 0, \quad \nu_{\alpha\alpha}^0 \equiv 0$$

$$\nu_{13}^0(x_3) = \frac{U^0}{2} = \frac{Re}{2} (1 - x_3) \sin \beta$$

$$p_0(x_3) = (1 - x_3) \cos \beta, \quad s_{\alpha\alpha}^0 \equiv 0, \quad s_{13}^0(x_3) = T^0 = (1 - x_3) \sin \beta$$

Характерная скорость V принята равной $\sqrt{gh}$.

Краевая задача первого приближения формулируется следующим образом;

$$v_{i,i}^1 = 0$$

$$-p_i^1 + s_{ij,j}^1 = \frac{\partial v_i^1}{\partial t} + \text{Re } x_3(1-x_3)v_3^1 \delta_{1i} \sin \beta + \frac{\text{Re}}{2} x_3(2-x_3)v_{i,1}^1 \sin \beta$$

$$s_{\alpha\alpha}^1 = \frac{2}{\text{Re}} v_{\alpha\alpha}^1, \quad s_{13}^1 = 1 + \frac{1}{\text{Re}} (v_{1,3}^1 + v_{3,1}^1)$$

$$x_3 = 0: v_i^1 = 0, \quad x_3 = 1: p^1 = s_{13}^1 = 0$$

Разыскивая ее решение в Ω в классе плоскопараллельных полей ($v_1^1 = v_1^1(x_3)$, $v_3^1 \equiv 0$), получим

$$v_1^1(x_3) = -\text{Re } x_3, \quad v_{\alpha\alpha}^1 \equiv 0, \quad v_{13}^1 \equiv -\frac{\text{Re}}{2}, \quad p^1 \equiv 0, \quad s_{ij}^1 \equiv 0$$

Множество $\gamma^0(t)$ состоит из прямой $x_3 = 1$, а асимптотическая граница жесткой зоны определяется из (2.3):

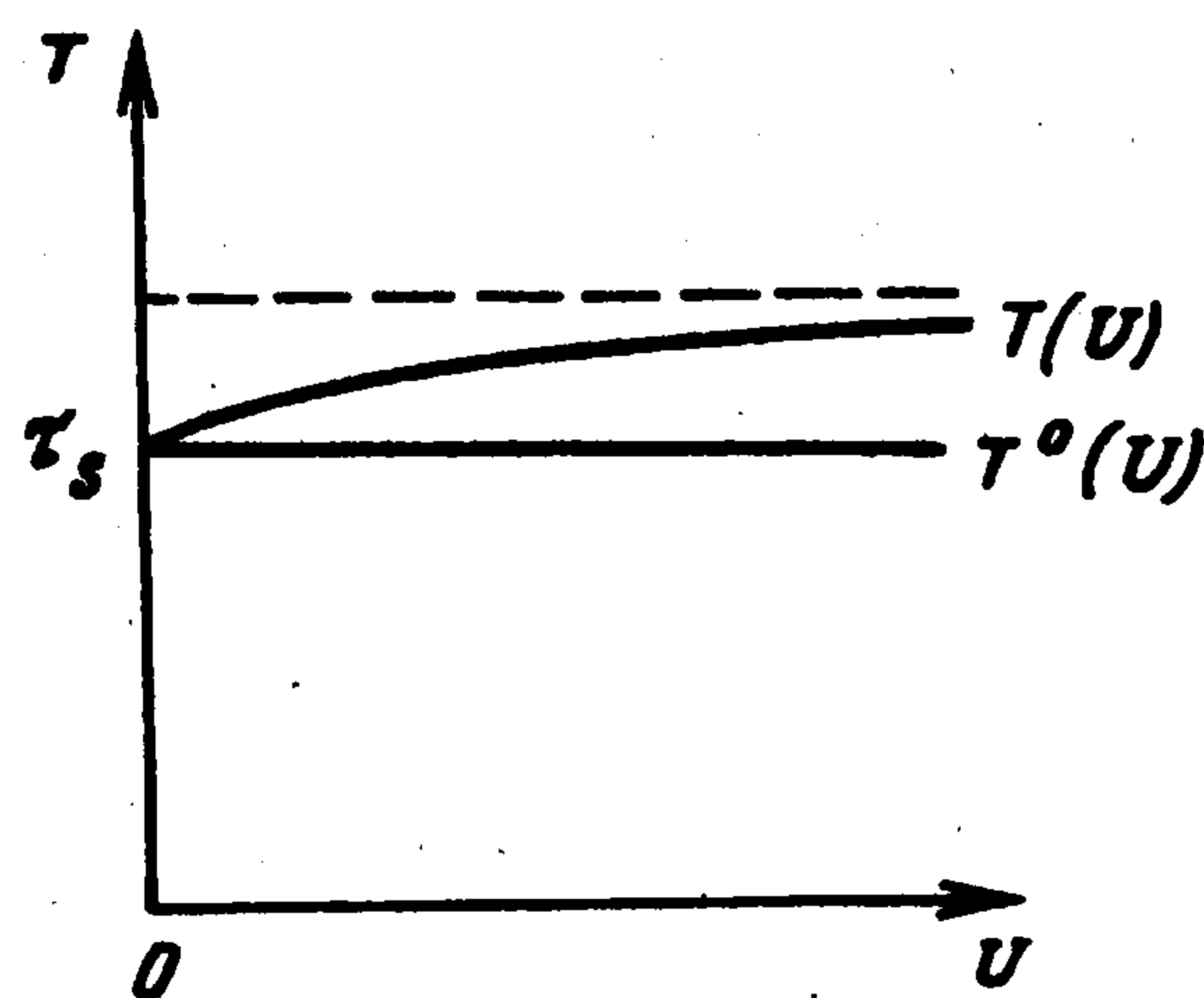
$$x_3 = 1 - \alpha/\sin \beta \quad (2.4)$$

Таким образом, при малом возмущении предела текучести вблизи свободной границы слоя образуется жесткая корка толщины $\alpha/\sin \beta$. Заметим, что получающееся после подстановки в (1.11) решение задачи вязкопластического течения по наклонной плоскости в поле силы тяжести, так же как и формула (2.4) справедливы не только при малом, но и при любом конечном α . Так, если $\alpha \geq \sin \beta$, то сдвиговых усилий для деформирования недостаточно, и весь слой покоится.

3. Устойчивость идеальнотекуче-пластических течений (течений Сен-Венана) относительно возмущений вязкости. Положим (фиг. 3)

$$T^0(U) \equiv \tau_s, \quad T^1(U) > 0, \quad \tau_s^1 = 0, \quad U > 0 \quad (3.1)$$

что соответствует добавлению малой нелинейной вязкости (упрочнения) в идеально



Фиг. 3

жесткопластическую модель Сен-Венана. Из (1.9) будем иметь

$$s^1 = \frac{2T^1(U^0)}{U^0} v^0 + \frac{2\tau_s}{U^0} (\Delta - V^0): v^1 \quad (3.2)$$

где Δ — единичный тензор четвертого ранга. Решив линейризованную начально-краевую задачу первого приближения (1.14)–(1.18), (3.2), можно найти кинематику v и тензор v^1 . Однако в выражение (1.12) для асимптотической границы Σ , компоненты этого тензора входить не будут. Действительно, подставляя соотношения (3.1) в урав-

нение (1.12), имеем

$$\Sigma_r = \{x: T^1(U^0) = 0\} = \{x: U^0 = 0\} \quad (3.3)$$

т.е. при переходе от невозмущенного движения (течения Сен-Венана) к возмущенному уравнения границ жестких зон остаются теми же.

Так же, как и в разд. 2, задача первого приближения представляет интерес в случаях известных классических решений для идеально жесткопластической среды. К числу последних отнесем решения многих квазистатических задач, собранные в монографии [10]. Эти течения моделируют процессы обработки материалов давлением, движения по поверхностям, в тонких слоях и т.д. [11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01233) и Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки" (№ 426).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. N.-Y.: Wiley, 1981. = *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
2. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
3. *Пановко Я.Г.* Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука, 1985. 288 с.
4. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичных тел // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
5. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во "УРСС", 1998. 176 с.
6. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
8. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les Inéquations en Mécanique et Physique. Paris: Dunod, 1972. = *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
10. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
11. *Кийко И.А.* Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 75 с.

Москва

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

web site: <http://www.math.msu.su/~georgiev>

Поступила в редакцию

6.I.1998