

УДК 532.5

© 1999 г. В.А. Еремеев, Л.М. Зубов

**ТЕОРИЯ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ
МИКРОПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ**

Предлагается модель жидкой среды с моментными напряжениями, которая обобщает теорию вязкой микрополярной жидкости в той же степени, в какой определяющие соотношения простой вязкоупругой жидкости обобщают уравнения состояния ньютоновской жидкости. Обсуждается сходство и различие модели упругой микрополярной жидкости и модели среды, оснащенной полем директора и применяемой для описания нематических жидких кристаллов. Рассматриваются задачи о равновесии микрополярной жидкости, в том числе задача со свободной поверхностью. Вариационным методом выводятся условия равновесия фаз упругой микрополярной жидкости. Решаются задачи о течении вязкоупругой жидкости в круглой трубе и между соосными вращающимися цилиндрами. Полученные результаты могут быть полезными для механики суспензий, магнитных и биологических жидкостей, жидких кристаллов и других жидких сред сложной структуры.

Излагаемая ниже теория базируется на определяющих соотношениях континуума Коссера с памятью, т.е. неупругой среды с моментными напряжениями, каждая частица которой имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Механика упругих сред с моментными напряжениями освещена в [1–9], реологические уравнения вязкоупругих моментных тел содержатся в [10–12]. Модели жидких сред с микровращениями и моментными напряжениями, получивших название микрополярных жидкостей (МПЖ), ведут свое начало от работ [13, 14]. Обширный обзор литературы по механике МПЖ содержится в [15]. Там же даны применения теории моментных жидкостей в микрофильтрации и капиллярной дефектоскопии. Приложениям несимметричной гидромеханики к проблемам трибологии посвящена работа [16].

Особенность всех моделей МПЖ, описанных в [13–16], состоит в том, что в состоянии покоя они не отличаются от простых (изотропных) жидкостей, так как статические моментные напряжения в них равны нулю, а статический тензор силовых напряжений является шаровым. Представляемая ниже теория включает в себя модели [13–16] как частные случаи и существенно отличается от этих моделей тем, что в состоянии равновесия МПЖ, подобно жидкому кристаллу, обладает ориентационной упругостью и способна выдерживать как моментные напряжения, так и силовые касательные напряжения (см. ниже, разд. 2). Рассмотренная здесь модель вязкоупругой МПЖ является максимально общей моделью ориентированной жидкой среды, ориентация частиц которой характеризуется ортонормированной тройкой направляющих векторов. В общем случае вязкоупругая МПЖ может обладать разнообразными свойствами памяти по отношению к переменной текущей конфигурации.

1. Реологические соотношения микрополярной жидкости с памятью. Рассмотрим модель континуума Коссера [1–9], согласно которой каждая частица среды может быть представлена как абсолютно твердое тело. Ее положение в пространстве в момент времени t задается радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$, а ориентация определяется тройкой ортонормированных векторов $\mathbf{D}_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$). Наряду с текущим состоянием рассмотрим также некоторое начальное состояние среды, в котором положение и ориентация частицы задаются вектором $\mathbf{r}$ и ортонормированным триэдром $\mathbf{d}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Тройки векторов $\mathbf{D}_k$ и $\mathbf{d}_k$ порождают собственно ортогональный тензор $\mathbf{H} = \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{D}_k$, который называется тензором микроповорота [7–9].

Уравнения движения среды Коссера, выражающие баланс импульса и момента импульса для произвольной части тела, имеют вид [1–9]

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{m} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \text{Div } \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \boldsymbol{\mu} = \gamma \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Коши, Div – оператор дивергенции в эйлеровых координатах, ρ – плотность среды, $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\mu}$ – векторы массовой силы и массового момента, γ – скалярная мера вращательной инерции частиц континуума, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения триэдра $\mathbf{D}_k$: $d\mathbf{D}_k/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_k$, d/dt – материальная производная по времени, символ $\mathbf{T}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{T}$, определяемый соотношением

$$\mathbf{T}_\times = (T^{mn} \mathbf{R}_m \otimes \mathbf{R}_n)_\times = T^{mn} \mathbf{R}_m \times \mathbf{R}_n$$

Здесь $\mathbf{R}_k$ – некоторый векторный базис.

Учитывая принцип локального действия [17], определяющие соотношения континуума Коссера с памятью в случае конечных деформаций следует принять в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= A_1[\mathbf{C}'(s), \mathbf{H}'(s), \text{grad } \mathbf{H}'(s)] \\ \mathbf{M}(t) &= A_2[\mathbf{C}'(s), \mathbf{H}'(s), \text{grad } \mathbf{H}'(s)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{C}'(s) = \mathbf{C}(t-s), \quad \mathbf{H}'(s) = \mathbf{H}(t-s), \quad \mathbf{C}(t) = \text{grad } \mathbf{R}(t) \quad (s \geq 0)$$

В (1.2) A_1, A_2 – операторы отклика, зависящие от предыстории градиента деформации $\mathbf{C}'(s)$, тензора микроповорота $\mathbf{H}'(s)$ и его градиента, grad – оператор градиента в начальном состоянии, т.е. в отсчетной конфигурации.

Требование инвариантности определяющих соотношений (1.2) относительно трансляций системы отсчета наблюдателя выполняется автоматически, а требование инвариантности относительно вращений будет выполнено в том и только в том случае, если операторы A_1, A_2 удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} A_\alpha[\mathbf{C}'(s) \cdot \mathbf{Q}'(s), \mathbf{H}'(s) \cdot \mathbf{Q}'(s), \text{grad } \mathbf{H}'(s) \cdot \mathbf{Q}'(s)] = \\ = \mathbf{Q}^T(t) \cdot A_\alpha[\mathbf{C}'(s), \mathbf{H}'(s), \text{grad } \mathbf{H}'(s)] \cdot \mathbf{Q}(t) \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

для любого собственно ортогонального тензора $\mathbf{Q}'(s)$. Положив в (1.3) $\mathbf{Q}'(s) = \mathbf{H}^{t^T}(s)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot B_1[\mathbf{U}'(s), \mathbf{L}'(s)] \cdot \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{M}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot B_2[\mathbf{U}'(s), \mathbf{L}'(s)] \cdot \mathbf{H}(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{U}'(s)$ – предыстория первой меры деформации, $\mathbf{L}'(s)$ – предыстория тензора изгибной деформации. Указанные тензоры определяются формулами [7–9]

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} \times \mathbf{E} = -(\text{grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T \quad (1.5)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Видно, что представления (1.4) не только необходимы, но и достаточны для материальной независимости от системы отсчета.

Наряду с тензорами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$ введем также вторую меру деформации $\mathbf{u}$ и меру изгибной деформации $\mathbf{K}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{L} + \mathbf{b} \quad (1.6)$$

В (1.6) через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{B}$ обозначены тензоры кривизны микроструктуры соответственно в отсчетной и текущей конфигурациях

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{d}_k) \times \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k \quad (1.7)$$

где Grad – оператор градиента в эйлеровых координатах.

Заметим, что величины $\mathbf{b}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ являются не истинными, а аксиальными тензорами второго ранга (псевдотензорами). Это следует учитывать при формулировке свойства изотропности тензорных функций или операторов, в которых участвуют указанные тензоры [6].

Операторы B_1 , B_2 в определяющих соотношениях (1.4), вообще говоря, зависят от некоторых постоянных (т.е. не меняющихся в процессе деформации) тензоров, определяемых выбором отсчетной конфигурации материального тела. К таким тензорам, в частности, относится тензор кривизны начального состояния $\mathbf{b}$. Поэтому, учитывая (1.6), определяющие соотношения (1.4) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot D_1 [\mathbf{U}'(s), \mathbf{K}'(s)] \cdot \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{M}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot D_2 [\mathbf{U}'(s), \mathbf{K}'(s)] \cdot \mathbf{H}(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

В случае упругого материала тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ не зависят от предыстории деформации, и определяющие соотношения (1.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot f_1 [\mathbf{U}(t), \mathbf{K}(t)] \cdot \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{M}(t) &= \mathbf{H}^T(t) \cdot f_2 [\mathbf{U}(t), \mathbf{K}(t)] \cdot \mathbf{H}(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где f_1 , f_2 – тензорные функции. С использованием законов термодинамики уравнения состояния (1.9) упругого континуума Коссера могут быть представлены при помощи удельной потенциальной энергии деформации $W_0(\mathbf{U}, \mathbf{K})$, совпадающей с удельной свободной энергией в изотермическом процессе и удельной внутренней энергией в адиабатическом процессе, следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \rho \mathbf{C}^T \cdot (\partial W / \partial \mathbf{U}) \cdot \mathbf{H}, \quad W = \rho_0^{-1} W_0 \\ \mathbf{M} &= \rho \mathbf{C}^T \cdot (\partial W / \partial \mathbf{K}) \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь W – массовая плотность потенциальной энергии деформации, ρ_0 – плотность материала в отсчетной конфигурации.

В дальнейшем будем рассматривать класс изотропных материалов, для которых тензорные операторы отклика D_1 , D_2 в (1.8) изотропные, т.е. удовлетворяют соотношениям ($\eta = \det \mathbf{Q}$)

$$\begin{aligned} D_1[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}'(s) \cdot \mathbf{Q}^T, \eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}'(s) \cdot \mathbf{Q}^T] &= \mathbf{Q} \cdot D_1[\mathbf{U}'(s), \mathbf{K}'(s)] \cdot \mathbf{Q}^T \\ \eta D_2[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}'(s) \cdot \mathbf{Q}^T, \eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}'(s) \cdot \mathbf{Q}^T] &= \mathbf{Q} \cdot D_2[\mathbf{U}'(s), \mathbf{K}'(s)] \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (1.11)$$

для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$. Согласно (1.5), (1.8), (1.11) тензоры $\mathbf{T}(t)$ и $\mathbf{M}(t)$ не меняются при заменах

$$\mathbf{C}'(s) \rightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}'(s), \quad \mathbf{H}'(s) \rightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}'(s), \quad \forall \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T} \quad (1.12)$$

Это означает, что изотропные материалы нечувствительны к любым изменениям отсчетной конфигурации, описываемым ортогональными преобразованиями.

В механике простых материалов с памятью используется [17, 18] понятие относительного градиента деформации $\mathbf{C}_r(\tau) = \mathbf{C}^{-1}(t) \cdot \mathbf{C}(\tau)$, при определении которого текущая конфигурация рассматривается в качестве отсчетной, а конфигурация, соответствующая моменту времени τ , играет роль текущей. Аналогичным образом введем понятие относительного микроповорота

$$\mathbf{H}_r(\tau) = \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{D}_k(\tau) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathbf{H}(\tau) \quad (1.13)$$

а также относительные меры деформации

$$U_i(\tau) = C_i(\tau) \cdot H_i^T(\tau), \quad K_i(\tau) = L_i(\tau) + B(t) \quad (1.14)$$

$$L_i(\tau) \times E = -[\text{Grad } H_i(\tau)] \cdot H_i^T(\tau)$$

Предыстории тензоров (1.13), (1.14) обозначаются следующим образом:

$$C_i(t-s) \equiv C_i^t(s), \quad H_i(t-s) \equiv H_i^t(s) \text{ и т.д.}$$

Из (1.13), (1.14) вытекают формулы

$$U^t(s) = U(t) \cdot H(t) \cdot U_i^t(s) \cdot H^T(t)$$

$$K^t(s) = U(t) \cdot H(t) \cdot K_i^t(s) \cdot H^T(t) \quad (1.15)$$

$$U_i^t(0) = E, \quad K_i^t(0) = B(t), \quad L_i^t(0) = 0$$

$$K_i^t(s) = L_i^t(s) + B(t) \quad (1.16)$$

Теорема 1. Определяющие соотношения любой изотропной среды Коссера с памятью могут быть представлены в форме

$$T(t) = F_1[u(t), U_i^t(s), K_i^t(s)], \quad M(t) = F_2[u(t), U_i^t(s), K_i^t(s)] \quad (1.17)$$

где F_1, F_2 – изотропные операторы.

Доказательство. На основании (1.15) определяющее соотношение (1.8) для тензора напряжений можно представить в виде

$$T(t) = H^T(t) \cdot G_1[U(t), H(t) \cdot U_i^t(s) \cdot H^T(t), H(t) \cdot K_i^t(s) \cdot H^T(t)] \cdot H(t) \quad (1.18)$$

Положим в (1.12) $Q = H^T(t)$. Тогда тензор $U(t)$ согласно (1.6) заменится тензором $u^{-1}(t)$, а тензор $H(t)$ заменится единичным тензором E , что на основании (1.18) дает

$$T(t) = G_1[u^{-1}(t), U_i^t(s), K_i^t(s)]$$

Аналогично преобразуется определяющее соотношение для тензора моментных напряжений $M(t)$, что приводит к выражениям (1.17). Изотропность операторов F_1, F_2 вытекает из свойства изотропности операторов D_1, D_2 .

Вязкоупругой микрополярной жидкостью (ВУМПЖ) будем называть такую среду Коссера с памятью, которая нечувствительна к любым изменениям отсчетной конфигурации, сохраняющим плотность среды. Очевидно, что жидкость относится к классу изотропных материалов. Поскольку тензоры $U_i^t(s)$ и $K_i^t(s)$ в (1.17) не зависят от выбора отсчетной конфигурации, изотропная среда будет жидкостью тогда и только тогда, когда зависимость от тензора $u(t)$ в определяющих соотношениях сводится к зависимости от $\det u(t)$ или, что эквивалентно, к зависимости от плотности $\rho(t)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Общее представление определяющих уравнений ВУМПЖ имеет вид

$$T(t) = H_1[\rho(t), B(t), U_i^t(s), L_i^t(s)] \quad (1.19)$$

$$M(t) = H_2[\rho(t), B(t), U_i^t(s), L_i^t(s)]$$

где H_1, H_2 – изотропные операторы.

В (1.19) учтено соотношение (1.16).

Теорема 2 является обобщением теоремы Нолла [17] о простых жидкостях на случай МПЖ.

Для покоящейся жидкости имеем $L_i^t(s) = 0$, $U_i^t(s) = E$, и определяющие соотно-

нения (1.19) принимают вид уравнений состояния упругой микрополярной жидкости (УМПЖ)

$$\mathbf{T} = \varphi(\rho, \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = \psi(\rho, \mathbf{B}) \quad (1.20)$$

где φ, ψ – изотропные тензорные функции.

Модель УМПЖ можно получить иначе, а именно как частный случай упругой изотропной среды Коссера, для которой функции f_1, f_2 в (1.9) изотропны. Полагая в условии изотропности $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T$, из (1.9) приходим к такому представлению уравнений состояния изотропного упругого материала

$$\mathbf{T} = f_1(\mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{B}) \quad (1.21)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{B}) = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{B})$$

В соотношениях (1.21) только первый тензорный аргумент изотропных функций φ и ψ зависит от выбора отсчетной конфигурации. Свойство нечувствительности материала к любым изменениям отсчетной конфигурации при условии сохранения объема выполняется в том и только в том случае, если зависимость от $\mathbf{u}$ в (1.21) сводится к зависимости от $\det \mathbf{u}$. Это приводит к определяющим соотношениям (1.20).

Соотношения (1.19) содержат в себе модель МПЖ дифференциального типа. Как известно [8], тензоры скоростей деформации и изгибной деформации определяются формулами

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{C}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{U} \right) \cdot \mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.22)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{C}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{K} \right) \cdot \mathbf{H} = \text{Grad } \boldsymbol{\omega}$$

Введем индифферентные тензоры скоростей более высокого порядка рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_n + (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\mathbf{B}_{n+1} = \frac{d}{dt} \mathbf{B}_n + (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_n \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\kappa}$$

Учитывая формальные разложения

$$\mathbf{U}_t^i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} s^n \mathbf{A}_n(t), \quad \mathbf{L}_t^i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} s^n \mathbf{B}_n(t) \quad (1.23)$$

назовем жидкостью дифференциального типа сложности (m, n) МПЖ с такими уравнениями состояния (f_1, f_2 – изотропные функции):

$$\mathbf{T} = f_1(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n) \quad (1.24)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n)$$

Частным случаем (1.24) является модель вязкой МПЖ [13, 14], уравнения состояния которой имеют вид

$$\mathbf{T} = f_1(\rho, \boldsymbol{\epsilon}), \quad \mathbf{M} = f_2(\rho, \boldsymbol{\kappa})$$

2. Уравнения упругой микрополярной жидкости. Для упругой жидкости в изотермическом процессе массовая плотность свободной энергии W – изотропная

функция тензора кривизны $\mathbf{B}$ и плотности ρ . Учитывая вытекающее из (1.7), (1.22) соотношение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.1)$$

вычислим скорость изменения функции W в фиксированной частице среды

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \frac{d\mathbf{B}^T}{dt} \right) + \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\kappa}^T \right) - \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^T + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \mathbf{E} \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^T \right] + \\ + \operatorname{tr} \left[\left(\mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^T \right) \times \boldsymbol{\omega} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

С другой стороны, на основании (1.10), (1.22) имеем

$$\frac{dW}{dt} = \rho^{-1} \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^T + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa}^T) \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.2), (2.3) и учитывая, что тензоры $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$ при движении среды могут принимать произвольные значения, получим

$$\mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{E} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad p = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \quad (2.4)$$

Из произвольности вектора $\boldsymbol{\omega}$ и (2.2)–(2.4) вытекает соотношение

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M})_\times \quad (2.5)$$

Можно показать, что уравнения состояния (2.4) упругой жидкости справедливы для любых термодинамических процессов, при этом свободную энергию W следует считать зависящей также и от температуры.

Модель УМПЖ близка модели нематического жидкого кристалла [19–23], но отличается от нее тем, что ориентация частицы МПЖ задается ортонормированной тройкой векторов, в то время как в континуальной теории нематиков ориентация характеризуется одним единичным вектором – директором $\mathbf{n}$. Свободная энергия W в теории нематиков является [19–21] изотропной функцией двух аргументов: векторного $\mathbf{n}$ и тензорного $\operatorname{Grad} \mathbf{n}$, в то время как в МПЖ W зависит от одного тензорного аргумента $\mathbf{B}$. Разумеется, в обоих случаях присутствуют также скалярные аргументы: плотность и температура.

Заметим, что свойство изотропности функции $W(\rho, \mathbf{B})$ не означает, что УМПЖ является изотропной жидкостью. Последний термин эквивалентен понятию простой упругой жидкости и соответствует случаю, когда $W = W(\rho)$. Точно так же свойство изотропности функции свободной энергии нематика $W(\rho, \mathbf{n}, \operatorname{Grad} \mathbf{n})$ не мешает называть его [24] анизотропной жидкостью.

Уравнения состояния УМПЖ (2.4) могут быть использованы при моделировании поведения сложных микроструктурных жидкостей, подобных жидким кристаллам. Анизотропия свойств и ориентационная упругость нематиков объясняется существованием предпочтительной ориентации вытянутых молекул или образованных ими комплексов, при этом микроструктуру жидкого кристалла можно представить плавающими длинными стержнями или нитями. По аналогии с этим представлением микроструктуру УМПЖ (2.4) можно считать образованной упорядоченным набором плавающих эллипсоидов с разными полуосями.

Полная система уравнений движения УМПЖ в эйлеровых координатах содержит в качестве неизвестных функций плотность ρ , поле скоростей $\mathbf{v}$, поле угловых ско-

ростей ω , тензорное поле кривизны $\mathbf{B}$ и согласно (1.1), (1.22), (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} -\text{Grad } p - \text{Div}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T) + \rho \mathbf{m} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \mathbf{v} \right) \\ \text{Div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times + \rho \boldsymbol{\mu} &= \gamma \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\omega} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \mathbf{B} &= \text{Grad } \boldsymbol{\omega} - (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величины p и $\mathbf{M}$ предполагаются выраженными через ρ и $\mathbf{B}$ при помощи уравнений состояния (2.4). Вращательная инерция γ , вообще говоря, может быть заданной функцией плотности ρ . В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, давление p не выражается через ρ и $\mathbf{B}$, а является неизвестной функцией координат и времени.

В задаче о покоящейся жидкости $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = 0$, и уравнения (2.6) превращаются в уравнения равновесия. Из однородности жидкости и соотношений (2.4), (2.5) вытекает тождество

$$\text{Grad}(W + \rho^{-1} p) = \rho^{-1} [\text{Grad } p + \text{Div}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)] - \rho^{-1} [\text{Div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times] \cdot \mathbf{B}^T \quad (2.7)$$

При $\boldsymbol{\mu} = 0$, т.е. при отсутствии внешних массовых моментов силовое уравнение равновесия согласно (2.6), (2.7) приводится к виду

$$\text{Grad} \left(W + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) = \mathbf{m} \quad (2.8)$$

и будет разрешимо в случае потенциальных массовых сил $\mathbf{m}$. Для несжимаемой жидкости выражение в скобках в (2.8) следует заменить на $W + \rho^{-1} p$. Таким образом, определение равновесного состояния УМПЖ сводится к определению ортонормированной тройки векторов $\mathbf{D}_k$ из уравнений

$$\text{Div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times = 0, \quad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k \quad (2.9)$$

а затем к нахождению плотности или давления при помощи (2.8).

Поскольку согласно (2.4) тензор напряжений Коши в упругой жидкости не является шаровым, покоящаяся МПЖ способна выдерживать касательные силовые напряжения, а также моментные напряжения.

Рассматривая задачу о равновесии МПЖ, к уравнениям (2.9) необходимо присоединить краевые условия на границе Σ объема V , занимаемого жидкостью. Эти условия состоят в задании триэдра $\mathbf{D}_k$ или вектора моментной нагрузки: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{N}$ — единичная нормаль к границе. Можно проверить, что указанная краевая задача в случае несжимаемой жидкости может быть сформулирована в виде вариационного принципа

$$\delta \iiint_V \rho W dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\psi} d\Sigma = 0 \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2} \delta \mathbf{D}_k \times \mathbf{D}_k$$

Здесь Σ_1 — часть поверхности Σ , на которой задан триэдр $\mathbf{D}_k$, Σ_2 — часть поверхности, на которой задана моментная нагрузка, $\boldsymbol{\psi}$ — вектор виртуальной ориентации, через который выражается вариация тензора кривизны

$$\delta \mathbf{B} = \text{Grad } \boldsymbol{\psi} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.11)$$

Из системы уравнений (2.9) можно исключить векторы D_k , заменив последнее соотношение в (2.9) уравнением совместности относительно тензора B (Rot – оператор ротора в эйлеровых координатах)

$$(\text{Rot } B)^T = B^2 - (\text{tr } B)B + \frac{1}{2}(\text{tr}^2 B - \text{tr } B^2)E \quad (2.12)$$

При помощи формулы Гамильтона–Кэли для неособого тензора B уравнение (2.12) можно записать иначе:

$$(\text{Rot } B)^T = B^{-1} \det B \quad (2.13)$$

В односвязной области тройка ортонормированных векторов D_k определяется по заданному гладкому тензорному полю B , удовлетворяющему условию совместности (2.12), единственным образом, если триэдр D_k задан в некоторой точке области.

Поскольку кривизна микроструктуры B – псевдотензор второго ранга, свободная энергия W – четная функция от B : $W(\rho, -B) = W(\rho, B)$. Простейшим примером четной функции служит квадратичная форма, общее представление которой с учетом изотропности функции $W(B)$ в случае несжимаемой среды имеет вид

$$\rho W = \frac{1}{2}[\lambda \text{tr}^2 B + \mu \text{tr}(B \cdot B^T) + \nu \text{tr } B^2] \quad (2.14)$$

где λ, μ, ν – постоянные.

Можно показать, что необходимые и достаточные условия положительной определенности формы (2.14) состоят в выполнении неравенств

$$3\lambda + \mu + \nu > 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad \mu > 0 \quad (2.15)$$

Согласно (2.4) выражению (2.14) соответствует линейная зависимость тензора моментных напряжений от кривизны структуры

$$M = \lambda E \text{tr } B + \mu B + \nu B^T \quad (2.16)$$

Как и в нелинейной теории упругости [17], целесообразно сформулировать дополнительные ограничения на форму зависимости $W(B)$ помимо положительной определенности. В частности, таким условием может служить условие сильной эллиптичности уравнений равновесия. Можно показать, что условие сильной эллиптичности моментного уравнения равновесия (2.9) эквивалентно неравенству

$$\frac{d^2}{d\tau^2} W(B + \tau c \otimes d) \Big|_{\tau=0} > 0 \quad (2.17)$$

для любых ненулевых векторов c, d .

Для уравнения состояния (2.14) условие (2.17) выполнено, если и только если

$$\mu > 0, \quad \mu + \nu + \lambda > 0$$

Как и в случае линейной теории упругости, последние неравенства вытекают из условий положительной определенности (2.15). Вместе с тем, для уравнений состояния общего вида условие (2.17) не следует из положительности функции $W(B)$.

3. Некоторые задачи о равновесии упругих жидкостей. Далее ограничимся нахождением равновесных решений в случае однородной несжимаемой жидкости при отсутствии объемных моментов.

Закрученная структура. Рассмотрим следующее поле направляющих векторов:

$$D_1 = e_1 \cos \alpha(Z) + e_2 \sin \alpha(Z) \quad (3.1)$$

$$D_2 = -e_1 \sin \alpha(Z) + e_2 \cos \alpha(Z), \quad D_3 = e_3$$

Здесь и далее e_1, e_2, e_3 – ортонормированный декартовый базис, а X, Y, Z – декартовы координаты.

Тензор кривизны $\mathbf{B}$, соответствующий (3.1), определяется соотношением $\mathbf{B} = \alpha'(Z)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. Из свойства изотропности функции $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ следует, что $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_x = 0$ для произвольных определяющих соотношений. В предположении, что $\alpha' = \text{const}$, тензор $\mathbf{M}$ постоянен и уравнение (2.9) выполняется тождественно. Таким образом, структура (3.1) при $\alpha(Z) = aZ + b$ является универсальным решением, не зависящим от выбора уравнений состояния.

Плоская задача. В этом случае ориентация частиц МПЖ определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X, Y)$ триэдра $\mathbf{D}_k$ вокруг некоторой оси. Для определенности будем считать, что ось совпадает с направлением $\mathbf{D}_3$. Тогда триэдр $\mathbf{D}_k$ определяется равенствами

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \alpha(X, Y) + \mathbf{e}_2 \sin \alpha(X, Y) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \alpha(X, Y) + \mathbf{e}_2 \cos \alpha(X, Y), \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{e}_3$$

Для (3.2) тензор кривизны $\mathbf{B}$ дается формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = (\text{Grad } \alpha) \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.3)$$

Из (2.4), (3.2), (3.3) следует, что для деформации (3.2) все компоненты $\mathbf{M}$ обращаются в нуль, кроме $M_{13}, M_{23}, M_{31}, M_{32}$. Кроме того, выполняется равенство $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_x = 0$. Таким образом, из трех моментных уравнений равновесия (2.9) два выполнены тождественно, а последнее принимает вид

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial X} + \frac{\partial M_{23}}{\partial Y} = 0 \quad (3.4)$$

Примером плоской деформации может служить изогнутая структура, определяемая соотношениями

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_R \cos \beta \Phi + \mathbf{e}_\Phi \sin \beta \Phi, \quad \beta = \text{const} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D}_2 = -\mathbf{e}_R \sin \beta \Phi + \mathbf{e}_\Phi \cos \beta \Phi, \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{e}_Z$$

Здесь R, Φ, Z – полярные координаты, $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ – координатные орты. Тензор кривизны $\mathbf{B}$ дается формулой

$$\mathbf{B} = \frac{1+\beta}{R} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_Z \quad (3.6)$$

Можно показать, что решение (3.5) является универсальным, как и решение (3.1).

Рассмотрим плоскую задачу для определяющих соотношений (2.14). С учетом (3.3) уравнение состояния (2.16) запишем в виде

$$\mathbf{M} = \mu(\text{Grad } \alpha) \otimes \mathbf{e}_3 + \nu \mathbf{e}_3 \otimes (\text{Grad } \alpha)$$

а уравнение равновесия (3.4) сокращается до уравнения Лапласа

$$\mu \Delta \alpha = 0$$

Таким образом, для закона состояния (2.14) определение структуры МПЖ в плоской задаче сводится к нахождению гармонической функции. Заметим, что эта же задача получается при исследовании плоской деформации нематического жидкого кристалла в одноконстантном приближении.

Равновесие МПЖ со свободной поверхностью. Рассмотрим задачу о равновесии тяжелой несжимаемой жидкости, имеющей свободную поверхность и содержащейся в бесконечно длинном цилиндрическом сосуде. Уравнение свободной поверхности Σ запишем в виде

$$Z = \zeta(X, Y), \quad (X, Y) \in \Omega$$

где область Ω представляет собой поперечное сечение цилиндра. Свободная граница Σ обладает поверхностной энергией, которую будем вычислять по формуле

$$\pi = \int_{\Sigma} \sigma d\Sigma$$

Здесь σ – постоянный коэффициент поверхностного натяжения.

Краевые условия на Σ выведем, как и в случае простой жидкости, вариационным методом [25], Варьируя функционал полной энергии в предположении, что на поверхности Σ отсутствуют внешние нагрузки, получим следующее уравнение для функции ζ :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla \zeta|^2}} \nabla \zeta \right) = h\zeta + \frac{1}{\sigma} W \Big|_{z=\zeta(X,Y)}, \quad (X,Y) \in \Omega \quad (3.7)$$

В (3.7) ∇ – оператор градиента на плоскости (X, Y) , g – ускорение свободного падения, $h = \rho g / \sigma$ – капиллярная постоянная. Последнее слагаемое в (3.7) отличает полученное соотношение от уравнений капиллярной поверхности простой жидкости [25].

На границе области Ω выполняются условия, заключающиеся в задании угла контакта ξ свободной границы Σ со стенками сосуда

$$\mathbf{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla \zeta|^2}} \nabla \zeta = \cos \xi \quad (3.8)$$

($\mathbf{N}$ – внешняя единичная нормаль к стенке цилиндра).

Таким образом, задача об определении формы капиллярной поверхности МПЖ сводится к уравнениям равновесия (2.8), (2.9), краевым условиям на поверхности цилиндра и соотношениям (3.7), (3.8).

Уравнения (3.7), (3.8) позволяют сделать качественный вывод о влиянии микроструктуры на величину объема жидкости, поднявшейся в сосуде над некоторым исходным уровнем под действием капиллярных эффектов. А именно, пусть V_0 – указанный выше объем в случае простой жидкости, а V – объем поднявшейся МПЖ в том же сосуде. Тогда, интегрируя уравнение (3.7) с учетом краевого условия (3.8), получим, что

$$V - V_0 = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho g} W \Big|_{z=\zeta(X,Y)} d\Omega, \quad V_0 = \frac{1}{h} \int_{\partial\Omega} \cos \xi ds$$

Так как плотность свободной энергии W неотрицательна, последнее соотношение показывает, что в случае МПЖ объем поднявшейся жидкости будет меньше.

Равновесие фаз МПЖ. Рассмотрим задачу о равновесии фаз МПЖ в однородном поле температур. Условия термодинамического равновесия фаз упругого материала с моментными напряжениями общего вида получены в [26]. Для МПЖ условия фазового равновесия можно получить непосредственно при помощи вариационного уравнения (2.10) с учетом того, что граница раздела фаз может изменяться независимо от поля направляющих векторов $\mathbf{D}_k$.

Для микрокогерентного фазового перехода, т.е. в случае непрерывного в окрестности фазовой границы поля $\mathbf{D}_k$, скачки вектора виртуальной ориентации ψ и тензора кривизны $\mathbf{B}$ связаны соотношением

$$[\psi]_{-}^{+} + c \mathbf{N} \cdot [\mathbf{B}]_{-}^{+} = 0 \quad (3.9)$$

В (3.9) c – скорость движения фазовой границы в направлении нормали, квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при пересечении

фазовой границы. Для фазового перехода с микропроскальзыванием на фазовой поверхности обращается в нуль вектор $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}$.

Из условия стационарности (2.10) для микрокогерентных фазовых переходов и фазовых переходов с микропроскальзыванием следует дополнительное краевое условие на фазовой границе, необходимое для ее определения

$$[W + p/\rho]_+^+ = 0 \quad (3.10)$$

Можно показать, что уравнение (3.10) также вытекает из условия термодинамического равновесия [26] с использованием уравнений состояния (2.4).

В качестве примера рассмотрим задачу об образовании новой фазы – простой несжимаемой жидкости в окрестности изогнутой структуры (3.5). В силу симметрии решения (3.5) область, занятая новой фазой, представляет собой круговой цилиндр радиуса δ . Предположим, что плотности фаз совпадают и равны ρ . Для МПЖ уравнение состояния выберем в виде (2.14), для простой жидкости массовая плотность свободной энергии W_- постоянна. Тогда радиус фазового включения находится из уравнения (3.10) и дается формулой

$$\delta = (1 + \beta) \sqrt{\mu/(2\rho W_-)}$$

4. Вязкозиметрические течения несжимаемой МПЖ. В теории простых неньютоновских жидкостей важное место занимает класс вязкозиметрических течений [17, 18]. В этом классе течений произвольная неньютоновская жидкость ведет себя как жидкость дифференциального типа. Подобные течения играют значительную роль при экспериментальных исследованиях свойств вязкоупругих жидкостей, позволяющих, в частности, определить постоянные, входящие в уравнения состояния.

Сдвиговое течение. Простейшим примером вязкозиметрического течения служит плоское установившееся течение жидкости в слое глубины h ($-\infty < X < \infty$, $0 \leq Y \leq h$, $-\infty < Z < \infty$), вызванное либо приложением на поверхности $Y = h$ касательных напряжений ($T_{21} = \tau$), либо заданием скорости сдвига ($\mathbf{v} = v^0 \mathbf{e}_1$) (линейное течение Куэтта [18]).

Рассмотрим более детально плоское движение МПЖ. В нем направляющие векторы $\mathbf{D}_k$ определяются формулами (3.2) с учетом того, что угол поворота α зависит и от времени t : $\alpha = \alpha(X, Y, t)$. Поля скорости и угловой скорости имеют вид

$$\mathbf{v} = v_1(X, Y, t)\mathbf{e}_1 + v_2(X, Y, t)\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(X, Y, t)\mathbf{e}_3 \quad (4.1)$$

Величина угловой скорости ω связана с углом поворота формулой

$$\omega = d\alpha/dt \quad (4.2)$$

Представим уравнение состояния для тензора напряжений Коши в виде

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mathbf{S}$$

Тогда, учитывая соотношения (4.1), (4.2), уравнения движения и условие несжимаемости приведем к виду

$$-\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial S_{11}}{\partial X} + \frac{\partial S_{21}}{\partial Y} = \rho \frac{dv_1}{dt}, \quad -\frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X} + \frac{\partial S_{22}}{\partial Y} = \rho \frac{dv_2}{dt} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial X} + \frac{\partial M_{23}}{\partial Y} + S_{12} - S_{21} = \gamma \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0$$

Предположим, что в сдвиговом течении скорость и угол поворота имеют вид

$$v_1 = v(Y), \quad v_2 = 0, \quad \alpha = \alpha(Y) \quad (4.4)$$

Можно показать, что все тензоры скоростей деформаций и изгибных деформаций

кроме ϵ в сдвиговом стационарном течении вида (4.4) обращаются в нуль. При учете разложений (1.23) это означает, что в течении (4.1), (4.4) зависимость уравнений состояния от предыстории деформации сводится к зависимости от $\mathbf{B}$ и ϵ . Другими словами, в сдвиговом течении никакая вязкоупругая жидкость неотличима от жидкости дифференциального типа сложности (1,0).

Определение полей ν и α из уравнений (4.3) требует конкретизации уравнений состояния. Примем следующие зависимости для $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{S} = \mu_1 \epsilon + \mu_2 \epsilon^T - (\nu_1 \mathbf{B} + \nu_2 \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{B}^T \quad (4.5)$$

$$\mathbf{M} = \eta_1 \kappa + \eta_2 \kappa^T + \nu_1 \mathbf{B} + \nu_2 \mathbf{B}^T$$

где $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2$ — постоянные.

Уравнения (4.5) представляют собой линейную зависимость тензоров напряжений и моментных напряжений от тензоров скоростей. В состоянии равновесия закон состояния (4.5) сводится к зависимостям типа (2.14).

В предположении об отсутствии поверхностных моментов ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0$ при $Y = h$) решение системы (4.3) дает

$$T_{21} = \tau, \quad T_{22} = 0, \quad M_{23} = \tau \xi (h - Y)$$

$$\nu(Y) = \nu^0 Y, \quad \nu^0 = \frac{\tau}{\mu_1} \quad (4.6)$$

$$\alpha(Y) = \alpha^0 + \frac{\tau}{\nu_1} \xi \left(hY - \frac{Y^2}{2} \right); \quad \xi = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1$$

(α^0 — угол ориентации при $Y = 0$).

Формулы (4.6) описывают линейное распределение скоростей и моментных напряжений по глубине.

Течение в канале. Рассмотрим плоское течение МПЖ в слое между двумя параллельными пластинами ($-\infty < X < \infty, -h < Y < h, -\infty < Z < \infty$), вызванное перепадом давления в направлении оси X .

Поля скорости, угла поворота триэдра $\mathbf{D}_k$ и давление p примем в виде

$$\nu_1 = \nu(Y), \quad \nu_2 = 0, \quad \alpha = \alpha(Y), \quad p = -GX \quad (G = \text{const}) \quad (4.7)$$

Как и в сдвиговом течении, в течении (4.7) МПЖ неотличима от жидкости дифференциального типа сложности (1,0).

Для закона состояния (4.5) решение уравнений (4.3) дается формулами

$$T_{21} = -GY, \quad T_{22} = -GX$$

$$M_{23} = \frac{\xi G}{2} Y^2 + \frac{\xi G}{6} h^2 - \frac{\nu_1}{2h} (\alpha_+ - \alpha_-)$$

$$\nu(Y) = \frac{G}{2\mu_1} (h^2 - Y^2) \quad (4.8)$$

$$\alpha(Y) = -\frac{\xi G}{6\nu_1} Y (Y^2 - h^2) + \frac{1}{2h} (\alpha_+ - \alpha_-) Y + \frac{1}{2} (\alpha_+ + \alpha_-)$$

В (4.8) $\alpha_{\pm}$ — углы ориентации триэдра на пластинах ($\alpha(\pm h) = \alpha_{\pm}$).

Течение Куэтта. Рассмотрим течение ВУМПЖ между вращающимися соосными цилиндрами. Пусть течение определяется формулами

$$\mathbf{v} = \nu(R) \mathbf{e}_\Phi, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\nu(R)}{R} \mathbf{e}_Z, \quad p = p(R), \quad \alpha = \alpha(R) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_R \cos \alpha + \mathbf{e}_\Phi \sin \alpha, \quad \mathbf{D}_2 = -\mathbf{e}_R \sin \alpha + \mathbf{e}_\Phi \cos \alpha, \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{e}_Z$$

Можно показать, что в этом случае выполняются равенства

$$\mathbf{B} = \alpha' \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_Z + \frac{1}{R} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \left(\nu' - \frac{\nu}{R} \right) \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_\Phi, \quad \boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{\nu'}{R} - \frac{\nu}{R^2} \right) \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_Z$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Последние два равенства означают, что в классе течений (4.9) произвольная ВУМПЖ неотличима от жидкости дифференциального типа сложности (1.1).

Уравнения движения сводятся к трем уравнениям относительно ν , α и p

$$-p' + S'_{RR} + \frac{S_{RR} - S_{\Phi\Phi}}{R} + \frac{\rho \nu^2}{R} = 0, \quad S'_{R\Phi} + \frac{S_{R\Phi} + S_{\Phi R}}{R} = 0 \quad (4.10)$$

$$M'_{RZ} + \frac{M_{RZ}}{R} + S_{R\Phi} - S_{\Phi R} = 0$$

В силу громоздкости получаемых выражений приведем только решение уравнений (4.10) для поля скорости и угла поворота (использованы определяющие соотношения (4.5))

$$\nu(R) = c_0 R + \frac{c_1}{2\eta_1} R \ln \frac{R^2}{\delta + R^2}, \quad \alpha(R) = \alpha_0 + c_1 I(R) + c_2 \ln \frac{R}{R_0}$$

$$c_0 = \Omega_1 - \frac{c_1}{2\eta_1} \ln \frac{R_1^2}{\delta + R_1^2}$$

$$c_1 = \frac{2\eta_1(\Omega_0 - \Omega_1)}{\ln[R_0^2(\delta + R_1^2)] - \ln[R_1^2(\delta + R_0^2)]} \quad (4.11)$$

$$c_2 = \left(\ln \frac{R_1}{R_0} \right)^{-1} [\alpha_1 - \alpha_0 - c_1 I(R_1)]$$

$$I(R) = \int_{R_0}^R \left[\frac{\xi}{2} \ln(\delta + R^2) - \frac{\delta}{\delta + R^2} \right] dR, \quad \delta = \frac{\eta_1}{\mu_1}$$

В (4.11) Ω_0 и Ω_1 – угловые скорости вращения цилиндров, между которыми движется жидкость, R_0 и R_1 – их радиусы ($R_1 > R_0$), α_0 и α_1 – углы ориентации триэдра направляющих векторов на поверхностях цилиндров.

Течение Пуазейля. В качестве примера трехмерного течения рассмотрим стационарное осесимметричное течение ВУМПЖ в круглой трубе, вызванное перепадом давления. Введем цилиндрические координаты R, Φ, Z так, чтобы ось Z совпадала с осью симметрии трубы. Будем искать решение в виде

$$\mathbf{v} = \nu(R) \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad p = -GZ + q(R), \quad \alpha = \alpha(R) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_R \cos \alpha + \mathbf{e}_Z \sin \alpha, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{D}_3 = -\mathbf{e}_R \sin \alpha + \mathbf{e}_Z \cos \alpha$$

В течение (4.12) все тензоры скоростей деформации и изгибной деформации кроме $\boldsymbol{\epsilon}$ обращаются в нуль. При учете равенств (1.23) это означает, что в течение вида (4.12) зависимости уравнений состояния от предыстории деформации заключаются в зависимости от $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\epsilon}$.

Используя свойство изотропности функций $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$, можно показать, что в течении (4.12) обращаются в нуль следующие компоненты тензоров $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$: $S_{R\Phi}, S_{\Phi R}, S_{Z\Phi}, S_{\Phi Z}$,

$M_{RR}, M_{\Phi\Phi}, M_{ZZ}, M_{RZ}, M_{ZR}$.

Уравнения движения сводятся к трем уравнениям относительно неизвестных u , α и q

$$S'_{RR} + \frac{S_{RR} - S_{\Phi\Phi}}{R} - q' = 0, \quad S'_{RZ} + \frac{S_{RZ}}{R} + G = 0$$

$$M'_{R\Phi} + \frac{M_{R\Phi} + M_{\Phi R}}{R} + S_{ZR} - S_{RZ} = 0$$

Интегрирование этих уравнений для определяющих соотношений (4.5) и граничных условий при $R = R_0$: $u(R_0) = 0$, $\alpha(R_0) = \alpha_0$ дает

$$u(R) = \frac{G}{4\mu_1}(R_0^2 - R^2), \quad \alpha(R) = \alpha_0 + \frac{\xi G}{18\nu_1}(R_0^3 - R^3)$$

Аналогично могут быть исследованы и другие течения, например кольцевое течение между соосными цилиндрами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01019).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. № 7. С. 1399–1409.
2. Koiter W.T. Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I–II // Proc. Koninkl. Neterland. Akad. Wetensh. 1964. V. B 67. № 1. P. 17–44.
3. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
4. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
5. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
6. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
7. Зубов Л.М. Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно-упругих тел с моментными напряжениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 10–16.
8. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.
9. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin et al.: Springer, 1997. 205 p.
10. Eringen A.C. Linear theory of micropolar viscoelasticity // Intern. J. Eng. Sci. 1967. V. 5. № 2. P. 191–204.
11. DeSilva C.N., Kline K.A. Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory // Z. Angew. Math. and Phys. 1968. V. 19. № 1. P. 128–139.
12. Динариев О.Ю., Николаевский В.Н. Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями // ПММ. 1997. Т. 61. № 6. С. 1023–1030.
13. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. С. 297–308.
14. Eringen A.C. Theory of micropolar fluids // J. Math. and Mech. 1966. V. 16. № 1. P. 1–18.
15. Мизун Н.П., Прохоренко П.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
16. Бессонов Н.М., Аэро Э.Л. Моментная гидродинамическая теория трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 1. С. 107–111.
17. Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972 = Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

18. *Astarita G., Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. London et al.: McGraw-Hill, 1974. = Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.*
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.*
20. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 7. С. 106–213.*
21. *Chandrasekhar S. Liquid Crystals. Cambridge: Cambridge University Press, 1974. = Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.*
22. *Эриксен Дж. Статика жидких кристаллов // Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977. С. 46–123.*
23. *Gennes P.G. de. The physics of liquid crystals. Oxford: Clarendon press, 1974. = Жен П.Ж. де. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.*
24. *Блинов Л.М., Пикин С.А. Жидкие кристаллы // Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1990. Т. 2. С. 31–36.*
25. *Finn R. Equilibrium capillary surfaces. New York: Springer, 1986. = Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 310 с.*
26. *Еремеев В.А., Zubov Л.М. Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Докл. РАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1052–1056.*

Ростов-на-Дону
e-mail: eremeyev@math.rsu.ru, zubov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
4.IX.1998