

УДК 531.584

© 1999 г. А.С. Кулешов

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИСКА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследуется ветвление стационарных движений тяжелого круглого диска на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Рассматриваются движения, отвечающие критическим точкам интеграла энергии на фиксированных уровнях двух других интегралов, имеющих форму гипергеометрических рядов.

Известно, что консервативные неголономные системы Чаплыгина с псевдоциклическими координатами могут допускать, помимо интеграла энергии, и другие первые интегралы, явный вид которых неизвестен. Тем не менее, исследование вопросов существования и устойчивости стационарных движений таких систем можно проводить на основе теории Рауса – Ляпунова – Сальвадори (см., например, [1–3]). Однако исследование ветвления стационарных движений таких систем на основе теории бифуркаций Пуанкаре – Четаева сопряжено с большими трудностями и до сих пор не проводилось, поскольку классическая теория бифуркаций требует знания явного вида всех первых интегралов.

Ниже делается попытка построения бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева в задаче о стационарных движениях тяжелого диска на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Как известно [4–7], в этой задаче кроме интеграла энергии существуют еще два интеграла, отвечающие двум псевдоциклическим координатам (углы прецессии и собственного вращения) и представленные в виде гипергеометрических рядов.

Рассмотрим движение без скольжения тяжелого круглого диска, опирающегося о горизонтальную плоскость. Пусть m – масса диска, a – радиус, A_1 и A_3 – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции, g – ускорение свободного падения.

Следуя предложенному ранее подходу [3], будем определять положение диска декартовыми координатами проекции его центра на горизонтальную плоскость и углами Эйлера θ , ψ и ϕ (θ – угол между плоскостью диска и опорной плоскостью, ψ – угол прецессии, ϕ – угол собственного вращения). Тогда уравнения движения при учете уравнений связи, выражающих отсутствие проскальзывания диска в точке его контакта с опорной плоскостью запишем в виде

$$\begin{aligned} (A_1 + ma^2)\ddot{\theta} &= A_1 q^2 \operatorname{ctg} \theta - (A_3 + ma^2)qr - m g a \cos \theta \\ (A_3 + ma^2)\dot{r} &= ma^2 q \dot{\theta} \\ A_1 \frac{d}{dt}(q \sin \theta) &= A_3 r \sin \theta \dot{\theta} \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta, \quad r = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \tag{1}$$

Переходя в уравнениях (1) к новой независимой переменной – углу θ , получим для r дифференциальное уравнение второго порядка. Введя в него вместо угла θ новую независимую переменную z , определяемую равенством (см. [4–7]) $\cos \theta = 1 - 2z$, по-

лучим гипергеометрическое уравнение [8]

$$z(1-z)\frac{d^2r}{dz^2} + (1-2z)\frac{dr}{dz} - Br = 0, \quad B = \frac{ma^2 A_3}{A_1(A_3 + ma^2)} \quad (2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача о движении диска интегрируется при помощи гипергеометрической функции $F(\xi, \eta, \zeta; z)$. Напомним, что гипергеометрический ряд $F(\xi, \eta, \zeta; z)$ сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, лежащем внутри интервала $-1 < z < 1$ [8].

Для уравнения (2)

$$\zeta = 1, \quad \xi + \eta = 1, \quad \xi\eta = B$$

и следовательно, его общее решение имеет вид

$$r = c_1 F(\xi, \eta, 1; z) + c_2 F(\xi, \eta, 1; 1-z)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а ξ и η — корни квадратного уравнения

$$s^2 - s + B = 0$$

Возвращаясь от z к прежней независимой переменной θ , получаем

$$r = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$u_1 = F\left(\xi, \eta, 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad u_2 = F\left(\xi, \eta, 1; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (3)$$

Учитывая выражение для производной гипергеометрической функции, из соотношений (1) и (3) находим

$$q = \frac{A_3}{2A_1} \sin \theta (c_1 v_1 - c_2 v_2)$$

$$v_1 = F\left(\xi + 1, \eta + 1, 2; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad v_2 = F\left(\xi + 1, \eta + 1, 2; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (4)$$

Известно (см. [3, 7]), что диск может совершать стационарные движения вида

$$\theta = \alpha = \text{const}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad q = q_0 = \text{const}, \quad r = r_0 = \text{const}$$

если три постоянные α, q_0 и r_0 удовлетворяют одному уравнению

$$A_1 q_0^2 \operatorname{ctg} \alpha - (A_3 + ma^2) q_0 r_0 - m g a \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что $A_1 = kma^2, A_3 = 2kma^2$, где $k = 1/2$ в случае обруча и $k = 1/4$ в случае диска. Кроме того, через $X = c_1 \sqrt{a/g}$ и $Y = c_2 \sqrt{a/g}$ обозначим безразмерные постоянные первых интегралов, заданных неявно соотношениями (3), (4). При введенных обозначениях уравнение (5) перепишется в виде

$$a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 - \cos \alpha = 0$$

$$a_{ii} = v_i \sin \alpha (k v_i \cos \alpha + (-1)^i (2k + 1) u_i), \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$a_{12} = \sin \alpha ((k + 1/2)(u_1 v_2 - u_2 v_1) - k v_1 v_2 \cos \alpha)$$

При каждом $\alpha \neq \pi/2$ уравнение (6) задает гиперболу, а при $\alpha = \pi/2$ — пару пересекающихся прямых $X = Y$ и $X = -Y$, которые соответствуют двум однопара-

метрическим подсемействам стационарных движений диска вида

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad r = 2u_* c_1 = \Omega, \quad q = 0; \quad u_* = F\left(\xi, \eta, 1; \frac{1}{2}\right) \quad (7)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad q = 2v_* c_1 = \omega, \quad r = 0; \quad v_* = F\left(\xi + 1, \eta + 1, 2; \frac{1}{2}\right) \quad (8)$$

Эти подсемейства отвечают соответственно равномерному качению вертикально расположенного диска вдоль прямой (7) и равномерному верчению диска вокруг вертикально расположенного диаметра (8). Первое устойчиво (неустойчиво) при

$$\Omega^2 > \Omega_0^2 = \frac{g}{2a(2k+1)} \quad (\Omega^2 < \Omega_0^2)$$

а второе – при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{g}{a(k+1)} \quad (\omega^2 < \omega_0^2)$$

(см. [3, 7]). Данные условия можно переписать следующим образом:

$$X^2 > X_+^2 = (8(2k+1)u_*^2)^{-1}$$

$$X^2 > X_-^2 = (4(k+1)v_*^2)^{-1}$$

Исследуем поведение стационарных движений системы вблизи значения $\theta = \pi/2$. Для этого рассмотрим уравнение (6) при $\alpha = \pi/2 + \varepsilon_1$, $X = X_0 + \varepsilon_2$, $Y = Y_0 + \varepsilon_3$, где X_0 и Y_0 – некоторые фиксированные значения, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – малые величины. Разлагая левую часть уравнения (6) в ряд по $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (для разложения функции F используется гипергеометрический ряд) и сохраняя члены не выше первого порядка малости, получаем соотношение

$$(2k+1)u_*v_*(Y_0^2 - X_0^2) + 2(2k+1)u_*v_*(Y_0\varepsilon_3 - X_0\varepsilon_2) + \\ + \left[1 - \frac{(X_0 + Y_0)^2}{4X_+^2} - \frac{(X_0 - Y_0)^2}{4X_-^2} \right] \varepsilon_1 = 0$$

При $X_0 = \pm Y_0$ это соотношение принимает вид

$$\left(1 - \frac{X_0^2}{X_{\pm}^2} \right) \varepsilon_1 = 2(2k+1)u_*v_*X_0(\varepsilon_2 \mp \varepsilon_3)$$

Таким образом, нетривиальные решения уравнения (6) в окрестности семейств $X = \pm Y$ существуют при

$$\text{sign}\left((X_{\pm}^2 - X_0^2)\varepsilon_1\right) = \text{sign}(X_0(\varepsilon_2 \mp \varepsilon_3))$$

Проведенный анализ позволяет построить в окрестности прямых $X = \pm Y$ поверхность $\alpha = \alpha(X, Y)$ согласно уравнению (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051, 98-01-00041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.

2. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 45–52.
3. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
4. Воронец П.В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Киев: Тип. Ун-та Св. Владимира, 1903. 152 с.
5. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
6. Appell P. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arête circulaire sur un plane horizontal; cas particulier du cerceau // Rend. circ. mat. di Palermo. 1900. V. 14. P. 1–6.
7. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1999